第 14 卷第 11 期 管 理 科 学 学 报 Vol. 14 No. 11
2011 年 11 月 JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA Nov. 2011

外部风险、异质信念与特质波动率风险溢价①

杨华蔚[1,2]，韩立岩[1]

(1. 北京航空航天大学经济管理学院，北京 100191;
2. 贵州财经学院数学与统计分院，贵阳 550006)

摘要： 本文将影响资产价格的不确定性划分为基本面不确定性、市场层面以及公司层面外部因素不确定性，(后二者对基本面没有影响，是非基本面因素)，认为投资者对基本面和外部因素分别形成异质信念. 在此基础上用连续时间的鞅分析方法，在纯交换市场均衡模型的框架下，建立了基于投资者异质信念的消费资本资产定价模型. 该模型从理论上证明了除来自总消费/禀赋的基本面风险外，投资者对市场层面和公司层面外部因素信念差异也是影响股票价格的风险因素，模型的结论有助于解释金融市场一些异常现象，特别是特质波动率异常现象.

关键词： 资产定价; 异质信念; 特质波动率; 外部风险

中图分类号： F275，F830.2 **文献标识码：** A **文章编号：** 1007 - 9807(2011)11 - 0071 - 10

0 引 言

经典的消费资本资产定价模型认为，证券价格只与总体风险(aggregate risk)即总禀赋/消费中的风险有关[1]. 但人们发现股价波动并不都是由经济基本面状况改变而引起的，投资者心理、市场情绪等因素对股票价格波动有一定的影响作用. Cass 和 Shell[2] 把这些来自于生产活动之外、不影响禀赋过程的不确定性所带来的风险称为非基本面风险/外部风险(extraneous risk)，也称为 sunspots risk. 他们证明了在一定条件下，外部风险会影响资产价格.

市场情绪是一种典型的外部因素，在整个市场层面影响资产价格，这种影响在牛市和熊市的阶段非常显著. 如在 2006 年下半年直至 2007 年底的中国股市大牛市时段，上证综指在 2006 年 11 月 20 日从 2041 点一路上扬，到 2007 年 10 月 17 日达到 6036 点，不到一年的时间，上证综指上升了 4000 点. 在这种市场情绪下，连 ST 股票价格也“狂飙”不已，完全脱离了其基本面价值，充分反映出投资者非理性心态对整个股市的影响.

Cass 和 Shell 以及后续的一些模型都假设投资者对外部因素有相同信念. 然而，对于市场情绪、投资者心理等这样一些外部不确定因素，没有统一、可靠的指标进行度量，也没有专门的机构和制度要求进行定期发布，投资者只能通过观察、对比等方法间接感受和了解，认为他们会对市场情绪变化有统一的认识是非常不现实的. 因此，Basak[3-4] 在纯交换市场均衡的框架下，研究外部风险信念差异对市场均衡状态的影响，发现投资者之间对外部因素的信念差异使得外部因素成为影响证券价格的风险因子. Basak[3-4] 中投资者可以有不同的风险偏好，有广泛的适用性，但其市场中的证券不支付红利，不能更好地描述股票市场风险收益权衡关系.

本文旨在讨论外部因素对股票横截面收益的影响. 由于 Ang 等[5] 发现在美国股票市场中具有高特质波动率股票组合有异常低预期收益回报，杨华蔚，韩立岩和李东辉[6] 对中国股票市场的研究也有相同发现，因此本文认为除市场情绪等在

---

① 收稿日期: 2008 - 02 - 14; 修订日期: 2010 - 06 - 03.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70671005; 70821061); 贵州省科技厅自然科学基金资助项目(〔2009〕2072).
作者简介: 杨华蔚(1965—)，女，河南开封人，博士，教授. Email: yang - hw2005@163.com

整个市场层面影响资产价格的外部因素外，对不同的行业和不同的股票，也有充分反映其自身特点的特质外部因素，如企业自身生产经营特点对投资者心理的影响、企业文化，甚至对企业的炒作、追捧、虚假信息等. 如此，均衡时影响股票价格的不确定性风险源是，基本面因素、市场层面外部因素、公司层面特质外部因素. 其中基本面因素、市场层面外部因素的不确定性会影响所有股票价格，而公司层面的特质外部因素只影响特定股票价格. 由于外部因素成因复杂，投资者对市场层面和公司层面的外部因素均会出现异质信念. 在此分析基础上建立了连续时间均衡定价模型，发现两种外部因素异质信念均是影响股票收益的风险因素，构造投资组合并不能分散特质外部因素风险对股票收益的影响.

本文的模型中关于外部因素的思想来自 Basak [3－4]，而模型的构造主要参考 Li [7]，类似的研究还包括 Detemple [8]、Zapatero [9] 和 Divad [10] ②. 与这些文献相同，本文采用一般均衡分析框架，通过建立连续时间模型讨论异质信念对市场均衡价格的影响. 不同的是，本文在只有一种产品有多种付息证券(生产技术) 的纯交换市场中建立模型，引入特质外部因素不确定性，重点研究外部因素异质信念与均衡价格以及波动率之间的关系. 特别地，本文区分了出现异质信念的不确定性风险源，这样可以更清晰地看到外部因素(主要是非理性因素) 对证券收益的影响.

本文关于外部因素异质信念的假设与 Daniel 等 [11] 的模型有类似之处，在他们建立的基于过度自信心理特征的两期静态定价模型中，投资者对于系统风险因子和个股特质风险的估值偏差(investor misevaluation) 与系统风险一起成为影响横截面预期回报的因素. 笔者认为过度自信投资者对特质风险产生估值偏差，而理性投资者有正确估值，这与本文假设投资者对特质外部因素存在异质信念一致. 与本文结论不同，Daniel，等发现，在市场是完全的并且投资者接近完全理性的条件下，通过理性投资者的对冲活动，除少量证券外，大多数个股特质风险的错误定价趋于零，即特质风险对横截面预期收益没有影响，而系统风险定价错误会一直存在. Lee 和 Liu [12] 在一个多期带噪音的理性预期均衡模型中讨论了非系统风险因子信息含量对价格的影响，与本文关注特质外部风险的思想相近，但是 Lee 和 Liu 与本文研究问题的角度不同，关注的内容也不同，模型有很大差异.

一些基于信念更新的金融模型刻画了投资者特定心理作用下形成的后验信念差异对资产价格的影响③，而讨论信息质量的模型认为投资者间不同信息质量产生不同后验信念，影响了资产均衡价格④. 本文不具体分析异质信念的产生过程，而是借用这些研究成果直接假设投资者之间会出现后验异质信念. 与本文不同，这些研究不区分投资不确定性是来自基本面因素还是外部因素，因此无法把外部风险对证券价格的影响从传统定价模型的非系统风险中分离出来.

国内研究异质信念与资产价格关系的文献比较少，且多为两期静态模型. 如张圣平 [23] 用一个两期静态异质性先验信念纯交换模型来讨论非完美理想预期均衡问题. 而张维，张永 [24] 采用均值——方差的分析方法建立了一个基于卖空限制的异质信念风险资产价格均衡模型，并指出应用该模型可以对现有金融市场上许多异象提出一致的解释性假说.

1 市场结构

考虑 Lucas [25] 的纯交换经济，其中只有一个易腐蚀的消费品，禀赋过程是外生的，投资者通过资本市场的交易进行资源配置以使其效用最大化.

② Basak [3－4]、Li [8]、Detemple [9]、Zapatero [10] 和 David [11] 均假设市场中只有一种生产技术和一种产品，其中 Li、Detemple、Zapatero 仅假设投资者对基本面因素(总禀赋过程) 存在异质信念.

③ 主要有，(1) 过度自信以及由于自我归因偏差而更加严重的过度自信 [13－15]；(2) 保守性和代表性心理，表现为对信息过度反应和反应不足 [16]；(3) 投资者可以分为基于信息交易者和惯性交易者 [17].

④ Wang [18]、Veronesi [19] 和 Easley [20] 分别研究信息不对称、信息质量不同对资产价格的影响; Lundtofte [21] 具体讨论了完全信息交易者、内部交易者和外部交易者信念更新过程的差异，这些差异导致了交易者对股票价格过程产生不同的主观信念; Buraschi [22] 考虑模型不确定性(指投资者不知道红利增长率的准确值) 和投资者之间信息差异共同作用导致异质信念.

本文从以下几个方面介绍资本市场和投资者偏好.

1.1 禀赋过程

经济中存在 N 种生产性资产,每种资产产生以消费品形式表示的随机实物收益 δ_{nt}, $n = 1,\cdots,N$, $\delta_t = (\delta_{1t},\cdots,\delta_{Nt})'$ 可以表示为受基本面风险影响的随机向量过程⑤

$$d\delta_{nt} = \delta_{nt}(\mu_{\delta_{nt}}dt + \sigma_{\delta_{nt}}dw_{\delta t}) \quad (1)$$

其中 $\mu_{\delta n}(t)$ 、$\sigma_{\delta n}(t)$ 均是 $(\Omega,\{F_t^{w_\delta}\},P)$ 上的适应过程,$\{F_t^{w\delta}\}$ 表示由 $\{w_\delta(t)\}$ 生成的 σ - 代数流. 市场的不确定性由完备信息空间 $(\Omega,F,\{F_t\},P)$ 表示,$F_t^{w_\delta} \subseteq F_t$.

拥有不同股票表示对不同生产性资产的所有权,这样 δ_{nt} 可以表示为股票 n 在 t 期可以获得的支付(红利收入),即第 n 种生产过程带来的禀赋.

1.2 资本市场

假设除每种风险资产的支付对股票价格有决定作用外,还有一种市场层面的外部风险因素,对所有股票价格都有影响,其变化过程可以表示为

$$dZ_t = \mu_{Zt}dt + \sigma_{zt}dw_{Zt} \quad (2)$$

w_{Zt} 是独立于 w_{δ_t} 的一维布朗运动,代表与经济基本面无关的不确定性. 由假设可知市场层面外部因素 $Z(t)$ 不影响总消费品的供给过程.

除以上两种因素外,不同的股票价格还受到仅与该股票相关的特质外部风险的影响,其变化过程为

$$dX_{nt} = \mu_{Xnt}dt + \sigma_{\chi nt}dw_{Xnt} \quad (3)$$

其中 w_{Xn} 是布朗运动过程,代表与股票 n 相关的特质风险源,为简单起见,假设不同 w_{Xn} 之间相互独立,$n = 1,\cdots,N$.

假设投资者之间关于 σ_{Zt} 的信念是一致的,即 σ_{Zt} 适应于 $\{F_t^{w_Z}\}$[3-4;7-9]. 由于市场外部因素可以是市场情绪、外部环境甚至炒作、违规等一切可能影响股票价格的不确定性,因此假设市场中关于外部因素的信息是不完全的,投资者只能部分地观察到 μ_{Zt},即 μ_{Zt} 适应于 $\Im \times \{F_t^{w_Z}\}$,其中 $\Im$ 是独立于 $F_t^{w_Z}$ 的 σ - 代数,$\Im \times \{F_t^{w_Z}\} \supset \{F_t^{w_Z}\}$,并且 $\Im \not\subset \{F^{\omega_\delta,w_z,w_{X1},\cdots,w_{XN}}\}$,即 $\Im$ 是不可观察到的信息结构. 同样,假设 μ_{Xnt}、$\sigma_{\chi nt}$ 分别适应于 $\Im \times \{F^{w_{\chi n}}\}$ 和 $\{F_t^{w_{\chi n}}\}$ σ - 代数流.

注 1,本文参考 Basak[3-4] 方法简单地用式(2)刻画市场层面外部因素的变化过程. 这里假设市场外部因素可以用一种指标 Z 表示⑥,其中 μ_{zt} 代表市场外部因素的平均水平,而 σ_{zt} 体现市场外部因素波动情况. 由于基本面对市场外部因素变化有一定影响,完整的式(2)应该是 $dZ_t = \mu_{Zt}dt + \sigma_{zt}dw_{Zt} + \sigma_{\delta t1}dw_{\delta_t}$,但是在后面的证明过程中,由基本面通过对情绪的影响继而对股票收益产生的间接影响可以合并到基本面对股票收益的直接影响中,为简洁起见,在式(2)中不体现基本面不确定性对市场外部风险的影响. 同样,式(3)中没有出现基本面和市场层面外部因素对公司层面外部因素的影响.

$S_t = (S_{t1},\cdots,S_{tN})'$ 表示 t 时刻股票的除红价格向量,满足方程

$$dS_t + \delta_t dt = I_S(\mu_{St}dt + \sigma_{\Delta t}dw_{\delta t} + \sigma_{Zt}dw_{Zt} + \sigma_{Xt}dw_{Xt}) \quad (4)$$

这里 σ_Δ、σ_Z 均为 $N \times 1$ 维列向量,σ_X、I_S 分别为以 $\sigma_{X1},\cdots,\sigma_{XN}$ 和 $S_1,\cdots,S_N$ 为对角线元的 $N \times N$ 阶可逆对角线矩阵.

假设市场上还存在两种分别以总量消费和市场外部风险为标底的衍生证券⑦,其价格函数为

$$dO_t = I_O[\mu_{Ot}dt + \upsilon_{\Delta t}dw_{\delta t} + \upsilon_{Zt}dw_{zt}] \quad (5)$$

这里 υ_Δ、υ_Z 为 2×1 维列向量.

记 $\Sigma_S = \begin{pmatrix} \sigma_\Delta & \sigma_Z & \sigma_X \\ \upsilon_\Delta & \upsilon_Z & 0 \end{pmatrix}$ 为风险证券波动率组成的矩阵,假设 Σ_S 可逆.

无风险证券的价格过程为 $dB_t = B_t r_t dt$,r_t 是 t 时刻的无风险利率.

1.3 投资者偏好

假设投资者具有对数效用偏好,其效用函数为

$$U^i(t,c) = \int_t^T e^{-\rho^i s}\ln(c(s))ds \quad (6)$$

⑤ 用一维而不是多维布朗运动描述基本面的不确定性,既可以避免一些复杂的向量运算表达式,又不影响结论.

⑥ 投资者情绪是最受学者关注的外部风险,在学术界和业界有多种反映投资者心理变化的情绪指数,各种指数尤其是间接指数的构造方法差异较大[20],因此假设外部因素可以用指标表示有一定的合理性.

⑦ 在完全市场存在唯一的等价鞅测度,可以使模型的解变得非常简单. 由于本文中有 $N+2$ 种风险源,除已有的 N 种证券外,引入两种衍生证券就能使市场完全化. 文中对期权的特殊假设,是为了使模型表达比较简单. 各交易市场中的市场指数期货、期权和芝加哥交易所的波动率指数期货(VIX Future)是假设存在这两种衍生证券的现实基础.

$\rho^i > 0$ 是主观折现率,代表投资者的时间偏好,本文假设投资者之间有异质性时间偏好,如果 $\rho^1 < \rho^2$,表示投资者 1 比投资者 2 更有耐心⑧.

2 投资者仅对非基本面因素有异质信念

采用一般均衡方法分析异质信念对市场均衡价格的影响. 均衡价格的形成过程是,(1) 投资者根据先验信念和新到达的信息更新自己的信念,形成后验信念,产生自己的期望效用;(2) 在财富预算约束下投资者追求期望效用最大化得到个体的消费需求函数;(3) 所有个体的需求函数汇总为市场的供求关系,形成均衡价格使得消费市场和资本市场实现出清.

2.1 后验信念

因为 $\mu_{\delta nt}$、$\sigma_{\delta nt}$ 均适应于 $\{F_t^{w_\delta}\}$,投资者对经济基本面有完全的信息,他们对股票的红利过程会产生相同的后验信念. 但在根据已有信息逐渐更新对 μ_{Zt}、μ_{Xnt} 信念的过程中,由于存在不可观察的信息结构 $\Im$,投资者在对外部因素的变化水平进行推断时,会因为他们之间存在信息不对称或具有不同心理特征、采用不同的学习方法等各种原因而做出不同的判断,对 μ_Z、$\mu_X = (\mu_{X1},\cdots,\mu_{XN})'$ 的信念产生差异,记 $\mu_Z^i(t) = \mathrm{E}^i(\mu_Z(t) \mid F_t^{w_\delta,w_Z,w_{X1},\cdots,w_{XN}})$、$\mu_X^i(t) = \mathrm{E}^i(\mu_{Xn}(t) \mid F_t^{w_\delta,w_Z,w_{X1},\cdots,w_{XN}})$ 是投资者 $i(i=1,2)$ 在 t 时刻根据已有信息形成的对 μ_{Zt}、μ_{Xt} 的后验估计. 如果 $\mu_Z^1(t) > \mu_Z^2(t)$,则表示在没有基本面信息推动的情况下,投资者 1 比投资者 2 对市场"人气"更为乐观,而 $\mu_{Xn}^1(t) > \mu_{Xn}^2(t)$ 表示投资者 1 相比投资者 2 更"盲目"地钟情于股票 n.

根据滤波理论[28],异质信念的投资者观测到不同的噪声过程,满足下面关系

$$\mathrm{d}w_{Zt}^i = \mathrm{d}w_{Zt} - \hat{\mu}_{Zt}^i\mathrm{d}t$$

其中 $\hat{\mu}_{Zt}^i = \dfrac{\mu_{Zt}^i - \mu_{Zt}}{\sigma_{zt}}$

$$\mathrm{d}w_{Xt}^i = \mathrm{d}w_{Xt} - \hat{\mu}_{Xt}^i\mathrm{d}t$$

其中 $\hat{\mu}_{Xt}^i = (I_{\sigma_\chi})^{-1}(\mu_{Xt}^i - \mu_{Xt})$

I_{σ_χ} 是由 $\sigma_{\chi 1},\cdots,\sigma_{\chi N}$ 为对角线元构成的对角线矩阵

上式表明,投资者 1 和投资者 2 有不同的主观概率空间,每个空间里关于 μ_Z、μ_X 的噪声过程 $(w_{Zt}^i,w_{X1t}^i,\cdots,w_{XNt}^i)$ 是 $N+1$ 维布朗过程. 不同投资者噪声过程之间有下列关系

$$\mathrm{d}w_{Zt}^1 = \mathrm{d}w_{Zt}^2 - \bar{\mu}_{Zt}\mathrm{d}t$$

$$\bar{\mu}_{Zt} = \hat{\mu}_{Zt}^1 - \hat{\mu}_{Zt}^2 = \frac{\mu_{Zt}^1 - \mu_{Zt}^2}{\sigma_{zt}}$$

$$\mathrm{d}w_{Xt}^1 = \mathrm{d}w_{Xt}^2 - \bar{\mu}_{Xt}\mathrm{d}t$$

$$\bar{\mu}_{Xt} = \hat{\mu}_{Xt}^1 - \hat{\mu}_{Xt}^2 = (I_{\sigma_\chi})^{-1}[\mu_{Xt}^1 - \mu_{Xt}^2] \tag{7}$$

这里 $w_X^i(t) = (w_{X1}^i(t),\cdots,w_{XN}^i(t))'$,$w_{Xn}^i(t)$ 代表与股票 n 相关的特质风险源,$\mu_X^i(t) = (\mu_{X1}^i(t),\cdots,\mu_{XN}^i(t))'$.

投资者 i 认为由扰动过程 w_Z^i、w_X^i 驱动的证券价格过程分别为

$$\mathrm{d}S_t + \delta_t\mathrm{d}t = I_S(\mu_{St}^i\mathrm{d}t + \sigma_{\Delta t}\mathrm{d}w_{\delta_t} + \sigma_{Zt}\mathrm{d}w_{Zt}^i + \sigma_{Xt}\mathrm{d}w_{Xt}^i) \tag{8}$$

$$\mathrm{d}O_t = I_O(\mu_{Ot}^i\mathrm{d}t + \upsilon_{\Delta t}\mathrm{d}w_{\delta_t} + \upsilon_{Zt}\mathrm{d}w_{Zt}^i + \upsilon_{Xt}\mathrm{d}w_{Xt}^i) \tag{9}$$

假设市场是无套利的,由"一价律",可得

$$\begin{pmatrix}\mu_{St}^1 - \mu_{St}\\ \mu_{Ot}^1 - \mu_{Ot}\end{pmatrix} = \Sigma_{St}\begin{pmatrix}\hat{\mu}_{\delta t}\\ \hat{\mu}_{Zt}\\ \hat{\mu}_{Xt}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mu_{St}^1 - \mu_{St}^2\\ \mu_{Ot}^1 - \mu_{Ot}^2\end{pmatrix} = \Sigma_{St}\begin{pmatrix}\bar{\mu}_{\delta t}\\ \bar{\mu}_{Zt}\\ \bar{\mu}_{Xt}\end{pmatrix} \tag{10}$$

2.2 等价鞅测度与个人最优消费

2.2.1 等价鞅测度

由于构造的市场中有 $N+2$ 种风险源,同时存在 $N+2$ 种线性无关的证券,市场是完全的. 根据资产定价基本定理,无套利假设保证对每个投资者 $i(i=1,2)$,存在唯一的风险市场价格(market price of risk)[29]

$$\begin{pmatrix}\theta_{St}^i\\ \theta_{Zt}^i\\ \theta_{Ot}^i\end{pmatrix} = \Sigma_S^{-1}\begin{pmatrix}\mu_{St}^i - r_t\\ \mu_{Ot}^i - r_t\end{pmatrix} \tag{11}$$

状态价格密度(state price density)ξ_t^i

$$\mathrm{d}\xi_t^i = \xi_t^i[-r_t\mathrm{d}t - \theta_{St}^i\mathrm{d}w_{\delta t} - \theta_{Zt}^i\mathrm{d}w_{Zt}^i - (\theta_{Ot}^i)'\mathrm{d}w_{Xt}^i]$$

⑧ Shefrin[27] 讨论了投资者之间存在异质性时间偏好的实证证据.

$$\mathrm{d}(\xi_t^i)^{-1} = (\xi_t^i)\{(r_t + (\theta_{St}^i)^2 + (\theta_{Zt}^i)^2 + (\theta_{Ot}^i)'\theta_{Ot}^i)\mathrm{d}t + \theta_{St}^i \mathrm{d}w_{\delta t} + \theta_{Zt}^i \mathrm{d}w_{Xt}^i + (\theta_{Ot}^i)'\mathrm{d}w_{Xt}^i\} \tag{12}$$

结合式(10)和(11),可知

$$\begin{pmatrix} \theta_{St}^1 - \theta_{St}^2 \\ \theta_{Zt}^1 - \theta_{Zt}^2 \\ \theta_{Xt}^1 - \theta_{Xt}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mu}_{\delta t} \\ \bar{\mu}_{Zt} \\ \bar{\mu}_{Xt} \end{pmatrix} \tag{13}$$

由 $\bar{\mu}_{\delta t} = 0$ 知,$\theta_{St}^1 = \theta_{St}^2$.

定义 $\zeta(t)$ 为投资者 1 和投资者 2 状态价格密度之比,即 $\zeta_t = \dfrac{\xi_t^1}{\xi_t^2}$,有

$$\zeta_t = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t (\bar{\mu}_{Zs})^2 \mathrm{d}s - \int_0^t \bar{\mu}_{Zs}\mathrm{d}w_{Zs}^1 - \frac{1}{2}\int_0^t (\bar{\mu}_{Xs})'\bar{\mu}_{Xs}\mathrm{d}s - \int_0^t (\bar{\mu}_{Xs})'\mathrm{d}w_{Xs}^1\right\} \tag{14}$$ [⑨]

由定义可以知道,$\zeta(t)$ 表示相对于投资者 2,投资者 1 的状态价格,可以反映两个投资者的信念差异.

2.2.2　最优消费

记 $\pi_t^i = \begin{pmatrix} \pi_{St}^i \\ \pi_{Ot}^i \end{pmatrix}$,其中 $\pi_{St}^i = (\pi_{1t}^i \cdots \pi_{Nt}^i)'$、$\pi_{Ot}^i = (\pi_{O1t}^i, \pi_{O2t}^i)'$ 分别表示 t 时刻投资者持有的股票、期权的数量,则 t 时刻投资者的财富过程为

$$\mathrm{d}W_t^i = (W_t^i - I_1\pi_{St}^i - \pi_{Ot}^i)\frac{\mathrm{d}B_t}{B_t} + (\pi_{St}^i)'\frac{\mathrm{d}S_t + \delta_t \mathrm{d}t}{S_t} + (\pi_{Ot}^i)\frac{\mathrm{d}O_t}{O_t} - c_t^i \mathrm{d}t \tag{15}$$

投资者在财富约束下选择投资和消费策略 $(\pi_{St}^i, \pi_{Ot}^i, c_t^i)$ 最大化其效用函数

$$\max_{c_i} \mathrm{E}^i\left[\int_0^T \mathrm{e}^{-\rho^i t}\ln(c_t^i)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$\text{s.t. } \mathrm{E}^i\left[\int_0^T \xi_t^i c_t^i \mathrm{d}t\right] = W^i(0)$$

由于假设市场中只有两种投资者,根据最优组合选择的鞅方法[30],在投资者具有对数效用偏好的条件下,投资者 i 的最优消费为

$$c_t^i = (k^i)^{-1}\mathrm{e}^{-\rho^i t}(\xi_t^i)^{-1} \tag{16}$$

最优财富过程

$$W_t^i = (\xi_t^i)^{-1}\mathrm{E}^i\left[\int_t^T \xi_s^i c_s^i \mathrm{d}s\right] = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\rho^i(T-t)}}{\rho^i}c_t^i \tag{17}$$

记 φ 是投资者 1 与投资者 2 之间消费率(消费/财富)之比[7],

$$\varphi_t = \frac{c_t^1 W_t^2}{c_t^2 W_t^1} = \frac{\rho^1(1 - \mathrm{e}^{-\rho^2(T-t)})}{\rho^2(1 - \mathrm{e}^{-\rho^1(T-t)})}$$

则投资者 1 与投资者 2 之间的消费量之比为

$$\eta_t\varphi_t = \frac{c^1}{c^2} = \frac{k^2\mathrm{e}^{-\rho^1 t}}{k^1\mathrm{e}^{-\rho^2 t}}(\zeta_t)^{-1}$$

其中 η_t 是投资者财富之比

$$\eta_t = \frac{W_t^1}{W_t^2} = \frac{1}{\varphi_t}\frac{k^2\mathrm{e}^{-\rho^1 t}}{k^1\mathrm{e}^{-\rho^2 t}}(\zeta_t)^{-1}$$

由于假设 $\rho^1 < \rho^2$,即投资者 1 比投资者 2 在消费时间上更有耐心,因此 $\varphi_t < 1$[⑩]. 也就是说,投资者 1 现在的消费财富比小于投资者 2,他将更多的财富进行投资,为将来的消费作储备.

2.3　市场均衡

市场均衡条件,消费市场出清 $\sum_{n=1}^N \delta_n(t) = c_t^1 + c_t^2$

资本市场出清 $\sum_{n=1}^N S_n(t) = W_t^1 + W_t^2 \quad \pi_{Ot}^1 + \pi_{Ot}^2 = 0$

性质 1　市场均衡时,风险市场价格为

$$\theta_{St}^1 = \theta_{St}^2 = \theta_{St} = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_{it}}{\sum_{j=1}^N \delta_{jt}}\sigma_{\delta it} \tag{18}$$

$$\theta_{Zt}^1 = \frac{1}{1+\eta_t\varphi_t}\bar{\mu}_{Zt}, \theta_{Zt}^2 = \frac{\eta_t\varphi_t}{1+\eta_t\varphi_t}\bar{\mu}_{Zt} \tag{19}$$

$$\theta_{Ont}^1 = \frac{1}{1+\eta_t\varphi_t}\bar{\mu}_{Xnt}, \theta_{Ont}^2 = -\frac{\eta_t\varphi_t}{1+\eta_t\varphi_t}\bar{\mu}_{Xnt} \tag{20}$$

均衡利率为

$$r_t = \sum_{n=1}^N \frac{\delta_{it}}{\sum_{n=1}^N \delta_{nt}}\mu_{\delta it} + \frac{\varphi_t\eta_t\rho^1 + \rho^2}{\varphi_t\eta_1 + 1} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{it}}{\sum_{j=1}^N \delta_{jt}}\sigma_{\delta it}\right)^2 \tag{21}$$

根据资产市场风险价格以及市场出清条件,

---

⑨　式(14)的推导过程见附录.

⑩　$\rho > 0$ 时,函数 $F(\rho) = \dfrac{(1 - \mathrm{e}^{-\rho^2(T-t)})}{\rho}$ 关于 ρ 单调下降.

很容易得到市场均衡时的资产定价关系.

性质 2 市场均衡时,资产的风险溢价为

$$\mu_{Snt} - r_t = \sigma_{\Delta nt} \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_{it}\sigma_{\delta it}}{\sum_{n=1}^{N}\delta_{nt}} - \frac{\sigma_{Znt}}{\sigma_{Zt}}\left(\frac{\eta_t\varphi_t\mu_{Zt}^1 + \mu_{Zt}^2}{\eta_t\varphi_t + 1} - \mu_{Zt}\right) - \frac{\sigma_{Xnt}}{\sigma_{\chi nt}}\left(\frac{\eta_t\varphi_t\mu_{Xnt}^1 + \mu_{Xnt}^2}{\eta_t\varphi_t + 1} - \mu_{Xnt}\right) \tag{22}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{S_{it}}{\sum_{j=1}^{N}S_{jt}}\sigma_{\Delta it} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_{it}}{\sum_{j=1}^{N}\delta_{jt}}\sigma_{\delta it} \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{S_{it}}{\sum_{j=1}^{N}S_{jt}}\sigma_{Zit} = \frac{\eta_t(1-\varphi_t)}{(1+\eta_t)(1+\varphi_t\eta_t)}\bar{\mu}_{Zt} \tag{24}$$

$$\sigma_{Xnt} = \frac{\sum_{n=1}^{N}S_{nt}}{S_{nt}}\frac{\eta_t(1-\varphi_t)}{(1+\eta_t)(1+\varphi_t\eta_t)}\bar{\mu}_{Xnt} \tag{25}$$

式(25)表明股票收益关于个股特质外部风险源的波动率与投资者关于该风险的异质信念差异成正比,而与该股票在市场中所占份额成反比关系,即投资者特质外部风险异质信念差异越大,则波动率(绝对值)越大;股票市值在市场总市值中所占比重越小,异质信念所引起的波动率越大.该结论告诉我们对小市值股票特质外部因素的信念差异易导致较大波动性.

3 模型的含义

根据 Cox 等[31]的结论可知,如果投资者对基本面因素信念一致,则均衡时的无风险利率与市场的平均时间折现率和总支付增长率正相关,与支付面临的不确定性风险负相关(这里表现为总支付变化率的方差),与支付变化无关的风险不影响均衡利率.式(21)与该结论形式相同,表明由于外部因素不影响基本面因素,因此投资者关于外部风险的异质信念对均衡利率没有直接影响.但是对外部因素信念的差异决定了不同投资者最优消费之比,进而影响了市场的平均时间折现率,最终影响到市场均衡利率.

把式(22)变形为

$$\mu_{Snt} - r_t = \frac{\sigma_{\Delta nt}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_{it}\sigma_{\delta it}}{\sum_{n=1}^{N}\delta_{nt}}}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\delta_{nt}\mu_{\delta nt}}{\sum_{1}^{N}\delta_{nt}} + \frac{\varphi_t\eta_t\rho^1 + \rho^2}{\varphi_t\eta_1 + 1} - r_t\right) - \frac{\sigma_{Znt}}{\sigma_{Zt}}\left(\frac{\varphi_t\eta_t\mu_{Zt}^1 + \mu_{Zt}^2}{\eta_t\varphi_t + 1} - \mu_{Zt}\right) - \frac{\sigma_{Xnt}}{\sigma_{\chi n}}\left(\frac{\eta_t\varphi_t\mu_{Xnt}^1 + \mu_{Xnt}^2}{\eta_t\varphi_t + 1} - \mu_{Xnt}\right) \tag{26}$$

式(22)、式(26)是股票风险溢价的两种不同表示式,其中第一项的系数可以变形为

$$\beta_{ct} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_{it}\sigma_{\delta it}}{\sum_{n=1}^{N}\delta_{nt}}\sigma_{\Delta nt}}{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_{it}\sigma_{\delta it}}{\sum_{n=1}^{N}\delta_{nt}}\right)^2} = \frac{\mathrm{Cov}\left(\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}, \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_{it}}{\sum_{n=1}^{N}\delta_{nt}}\frac{\mathrm{d}\delta_{it}}{\delta_{it}}\right)}{\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_{it}}{\sum_{n=1}^{N}\delta_{nt}}\frac{\mathrm{d}\delta_{it}}{\delta_{it}}\right)} \tag{27}$$

β_{ct} 是股票 n 的收益率和市场总消费(禀赋)变化的瞬时协方差与市场总消费(禀赋)变化的方差之比,表示股票 n 的支付与未来总消费(禀赋)的相关程度,反应了股票 n 所承担的总体风险(aggregate risk)的大小.如果投资者之间不存在关于外部风险的异质信念,则二、三项变为零,式(22)、式(26)变为经典的消费资本资产定价模型(CCAPM),刻画了投资风险资产可以得到的总体风险溢价.

当投资者之间存在关于外部风险的异质信念时,股票 n 的风险溢价不仅受到传统意义上的总体风险的影响,还受到异质信念带来的外部风险的影响.其中由于市场层面外部风险因素 Z 对所有股票价格都有影响,每支股票的风险溢价都包含有因素 Z 异质信念风险补偿部分,其大小由 β_Z 决定. $\beta_{Zn} = \frac{\mathrm{Cov}\left(\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}, \mathrm{d}Z_t\right)}{\mathrm{Var}(\mathrm{d}Z_t)} = \frac{\sigma_{zt}\sigma_{Znt}}{(\sigma_{zt})^2}$,是股票 n 收

益率与市场层面外部风险因素的协方差与风险因素波动率之比，可以看作是股票 n 关于因素 Z 的风险载荷，它与因素 Z 的“风险溢价”(投资者关于因素 Z 平均信念与真实值之间差异) 的乘积组成股票 n 关于因素 Z 异质信念风险补偿. 由此可见，股票收益率与市场层面外部风险 Z 之间相关性越高，其异质信念风险补偿越大(绝对值)；市场平均信念偏离程度越大(因素 Z 的“风险溢价”越高)，股票关于 Z 异质信念风险补偿也越大(绝对值).

由于公司层面外部风险 X_n 只影响股票 n 的价格过程，因此只有股票 n 的风险溢价中包含因素 X_n 的异质信念风险补偿部分. 其风险载荷 $\beta_{X_n} = \frac{\sigma_{Xn}}{\sigma_{\chi n}}$ 与信念差异成正比，与股票 n 的市值在市场中所占份额成反比，即在信念差异相同的条件下，小市值股票比大市值股票有更高(绝对值)的个股公司层面外部风险波动率，产生绝对值更大的公司层面外部风险溢价. 同样，如果投资者对股票 n 的平均信念偏离程度越大，其公司层面外部风险补偿的绝对值也越大，

考察市场组合的风险溢价问题，对式(26) 以市值为权重求和，结合式(23)、式(24) 和式(25) 得到

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{S_{it}\mu_{Snt}}{\sum_{j=1}^{N}S_{jt}} - r_t = \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\delta_{nt}}{\sum_{1}^{N}\delta_{nt}}\mu_{\delta nt} + \frac{\varphi_t\eta_t\rho^1 + \rho^2}{\varphi_t\eta_1 + 1} - r\right) - \frac{\eta_t(1-\varphi_t)}{(1+\eta_t)(1+\varphi_t\eta_1)}\frac{\bar{\mu}_{Zt}}{\sigma_{zt}}\left(\frac{\varphi_t\eta_t\mu_{Zt}^1 + \mu_{Zt}^2}{\varphi_t\eta_1 + 1} - \mu_{Zt}\right) - \frac{\eta_t(1-\varphi_t)}{(1+\eta_t)(1+\varphi_t\eta_1)}\sum_{n=1}^{N}\frac{\bar{\mu}_{Xnt}}{\sigma_{\chi nt}}\left(\frac{\varphi_t\eta_t\mu_{Xnt}^1 + \mu_{Xnt}^2}{\varphi_t\eta_1 + 1} - \mu_{Xnt}\right) \tag{28}$$

可以看到，市场组合的消费 $\beta_c = 1$，式(28) 中第二、三项均不为零，说明构造投资组合不能消除异质信念风险溢价.

由于因素 Z 以及因素 X_n 均与总消费过程无关，也即它们与总体风险无关，因此从传统定价理论观点来看，上述因素异质信念产生的风险属于特质风险(idiosyncratic risk) 或剩余风险范畴. 但是鉴于市场层面外部风险因素 Z 对所有股票价格都有影响，因素 Z 异质信念风险应该属于总体风险中被传统定价理论遗漏掉的部分. 而由于因素 X_n 只影响单只股票价格，因此因素 X_n 异质信念风险是特质风险中一部分. 在同质信念假设下，CCAPM 模型认为特质风险没有风险溢价，本文的模型也支持该结论. 但如果存在外部因素异质信念，虽然市场层面和公司层面的外部因素不影响基本面，但是也存在风险溢价.

式(26) 表明，当投资者之间存在外部因素异质信念时，市场层面和公司层面的外部因素是影响资产价格的风险因子. 投资者信念差异程度越大，对资产收益和波动率的影响越严重. 对市场层面外部因素而言，由于耐心投资者总是呈现相对乐观情绪，因此股票 n 关于因素 Z 的风险载荷 $\beta_Z > 0$⑪，当市场整体呈现过度乐观情绪时($\frac{\varphi_t\eta_t\mu_{Zt}^1 + \mu_{Zt}^2}{\varphi_t\eta_1 + 1} - \mu_{Zt} > 0$ 时)，股票 n 有负的外部风险溢价. 市场整体过度乐观情绪越严重，外部风险越大，股票的收益回报越低; 反之，当市场整体显示过度悲观情绪时($\frac{\varphi_t\eta_t\mu_{Zt}^1 + \mu_{Zt}^2}{\varphi_t\eta_1 + 1} - \mu_{Zt} < 0$ 时)，股票 n 有正的外部风险溢价，过度悲观情绪越严重，证券的外部风险溢价越高，股票的收益回报越高. 这可以从理论上证明为什么情绪因素成为影响资产价格的风险因子[32-36].

与上面分析相同，套利风险和卖空限制削弱了悲观投资者套利能力，均衡时市场上剩下的总是相对乐观投资者. 由式(25) 和(26) 知，投资者对公司层面外部风险信念差异越大，股票特质波动率越高，均衡时股票的预期收益越低，从而对特质波动率异常现象给出一种理论解释.

4　结束语

本文用连续时间均衡模型的分析框架，在纯

⑪　由于市场总是存在套利风险，对卖空操作也有一些限制，虽然投资衍生产品可以“做空”，但保证金制度也使卖空存在一定风险，因此悲观投资者常常不能通过卖空操作向市场表达自己对股价的看法，而只能做“壁上观”，留在市场中的投资者总是对后市存有希望的相对乐观者.

交换经济中研究外部风险异质信念对波动率和资产风险溢价的影响，推导出一个具有外部风险异质信念的消费资本资产定价模型。进而从理论上证明了：不仅承受与总禀赋/消费过程相关的总体风险有风险溢价，承受由市场层面外部因素异质信念产生的外部风险也会有风险溢价，同时由公司层面外部因素异质信念带来的特质波动率风险对股票收益也有解释作用. 本文的研究有助于从不同的角度理解行为金融理论，同时也有助于解释资产定价中出现的一些异常现象. 当然，本文仅仅是一种理论尝试，还存在许多可以继续深入探讨之处，特别是在市场非完全条件下建立模型，并讨论两种模型的差异；另外对模型主要结论进行数据模拟和实际数据检验也是笔者今后努力的方向.

参 考 文 献：

[1] 王 江. 金融经济学[M]. 北京：中国人民大学出版社，2006.
Wang Jiang. Financial Economics. [M]. Beijing: China Renmin University Press, 2006. (in Chinese)

[2] Cass D and Shell K. Do sunspots matter? [J]. Journal of Political Economy, 1983, (91): 193 – 227.

[3] Basak S. A model of dynamic equilibrium asset pricing with heterogeneous beliefs and extraneous risk [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2000, 24(1): 63 – 95.

[4] Basak S. Asset pricing with heterogeneous beliefs [J]. Journal of Banking and Finance, 2005, 29, (11): 2849 – 2881.

[5] Ang A R, Hodrick J, Xing Y, et al. The Cross-Section of volatility and expected returns [J]. Journal of Finance, 2006a, (61): 259 – 299.

[6] 杨华蔚，韩立岩，李东辉. 高风险一定有高回报吗？——基于中国证券市场特质波动率的实证研究[J]. 中国金融评论，2007，(2)：31 – 49.
Yang Huawei, Han Liyan, Li Donghui. Does high risk mean high return?: An empirical study of the idiosyncrativ volatility in Chinese stock markets [J]. China Finance Review, 2007, (2): 31 – 49. (in Chinese)

[7] Li T. Heterogeneous beliefs, asset prices and volatility in a pure exchange economy [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2007, 31(5): 1697 – 1727.

[8] Detemple J, Murthy S. Intertemporal asset pricing with Heterogeneous beliefs [J]. Journal of Economic Theory, 1994, (62): 294 – 320.

[9] Zapatero F. Effects of financial innovations on market volatility when beliefs are heterogeneous [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1998, (22): 597 – 626.

[10] David A. Heterogeneous beliefs, speculation and the equity premium [J]. Journal of Finance, 2008, 63(1).

[11] Daniel K D, Hirshleifer D, Subrahmanyam A. Overconfidence, arbitrage and equilibrium asset pricing [J]. Journal of Finance, 2001, 56: 921 – 966.

[12] Lee D W, Liu M H. Does More Information in Stock Price Lead to Greator or Smaller Idiosyncratic Return Volatility? [R]. Working paper, 2007.

[13] Daniel K, Hirshleifer D, Subrahmanyam A. Investor psychology and security market under- and overreactions [J]. Journal of Finance, 1998, 53, (6): 1839 – 1885.

[14] Odean T. Volume volatility, price and profit when all traders are above average [J]. Journal of Finance, 1998, V53 (6): 1887 – 1934.

[15] Gervais S, Odean T. Learning to be overconfident [J]. Review of Financial Studies, 2001, 14(1): 1 – 27.

[16] Barberis N, Shleifer A, Vishny R. A model of investor sentiment [J]. Journal of Financial Economics, 1998, 49, 307 – 343.

[17] Hong H, J Stein. A unified theory of underreaction, momentum trading and overreaction in asset markets [J]. Journal of Finance, 1999, 54: 2143 – 2184.

[18] Wang J. A model of intertemporal asset prices under asymmetric information [J]. Review of Economic Studies, 1993, 60: 249 – 282.

[19] Veronesi P. How does information quality affect stock returns? [J]. Journal of Finance, 2000, 55(2): 807 – 838.

[20] Easley D, O'Hara M. Information and the Cost of Capital [J]. Journal of Finance, 2004, 59(4): 1553 – 1583.

[21] Lundtofte F. The effect of information quality on optimal portfolio choice [J]. The Financial Review, 2006, 41: 157 – 185.

[22] Buraschi A, Jiltsov A. Model uncertainty and option markets with heterogeneous beliefs [J]. Journal of Finance, 2006, 61

(6): 2841 – 2897.

[23] 张圣平. 偏好、信念、信息与证券价格[M]. 上海: 上海人民出版社, 2002.
Zhang Shengping. Preference, Beliefs, Information and Securities Prices[M]. Shanghai: Shanghai Renmin Chubanshe, 2002. (in Chinese)

[24] 张　维, 张永杰. 异质信念、卖空限制与风险资产价格[J]. 管理科学学报, 2006, 9(4): 58 – 65.
Zhang Wei, Zhang Yong jie. Heterogeneous beliefs, shor-selling constraints and the asset prices[J]. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(4): 58 – 65. (in Chinese)

[25] Lucas R, Asset prices in an exchange economy[J]. Econometrica, 1978, V46, 1429 – 1445.

[26] 杨春鹏, 淳于松涛, 杨德平, 等. 投资者情绪指数研究综述[J]. 青岛大学学报(自然科学版), 2007, 20(1): 86 – 92.
Yang Chunpeng, ChunYu songtao, Yang Dengping, et al. Survey of investor sentiment indes[J]. Journal of Qingdao University (Natural Science Edition), 2007, 20(1): 86 – 92. (in Chinese)

[27] Shefrin H. A Behavioral Approach to Asset Pricing[M]. New York: Elsevier Inc, 2005.

[28] Liptser R, Shiryayev A. Statistics of Random Processes I: General Theory[M]. 2nd. New York: Springer-Verlag, 2001.

[29] Shreve S E. Stochastic Calculus for Finance II Continuous-Time Models[M]. New York: Springer Science Business Media Inc, 2004.

[30] Cox J, Huang C F. Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process[J]. Journal of Economic Theory, 1989, 49: 33 – 83.

[31] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. An intertemporal general equilibrium model of asset prices[J]. Econometrica(pre – 1986), 1985, 52(2), 63 – 384.

[32] Tetlock P C. Giving content to investor sentiment: The role of media in the stock market[J]. Journal of Finance, 2007, 62(3): 1139 – 1168.

[33] Baker M, Wurgler J. Investor sentiment and the cross-section of stock returns[J]. Journal of Finance, 2006, 61(4): 1645 – 1680.

[34] Brown G W, Cliff M T. Investor sentiment and asset valuation[J]. Journal of Business, 2005, 78(2): 405 – 440.

[35] 伍燕然, 韩立岩. 不完全理性、情绪与封闭式基金之谜[J]. 经济研究, 2007, (3): 117 – 129.
Wu Yanran and Han Liyan. Imperfect rationality, sentiment and closed-end-fund puzzle[J]. Economic Research Journal, 2007, (3): 117 – 129. (in Chinese)

[36] 韩立岩, 伍燕然. 投资者情绪与 IPOs 之谜[J]. 管理世界, 2007, (3): 51 – 61.
Han Liyan, Wu Yanran. Investors´sentment and the puzzle about IPO: underpricing or overpricing? [M]. Management World, 2007, (3): 51 – 61. (in Chinese)

Extraneous risk, heterogeneous beliefs and idiosyncratic risk

YANG Hua-wei[1,2], *HAN Li-yan*[1]

1. School of Economics and Management, Beihang University, Beijing 100083, China;
2. Guizhou College of Finance and Economics, Guiyang 550006, China

Abstract: It is assumed in the paper that stock price is determined not only by fundamental uncertainty but also by market nonfundamental (extraneous) uncertainty and firm idiosyncratic nonfundamental (extraneous) uncertainty, and the assumption is set that for different kinds of uncertainty different investors hold different kinds of heterogeneous beliefs. Thererhence, a dynamic equilibrium model in the continuous – time pure – exchange economy is presented. It is found that besides the fundamental uncertainty, market extraneous uncertainty and firm idiosyncratic extraneous uncertainty can also give explanations to expected returns. Furthermore, the model provides another explanation for some anomalies found in equity market, especially for anomaly of idiosyncratic volatility.

Key words: asset pricing; heterogeneous beliefs; idiosyncratic volatility; extraneous risk

附录：

性质 1 证明　对消费市场出清条件式两端求 Itô 微分，根据等式两边 Itô 微分项系数相等，并且注意到式(2)知

$$\sum_{i=1}^{N}\delta_{it}\sigma_{\delta it}=c_t^1\theta_{St}^1+c_t^2\theta_{St}^2 \tag{A1}$$

$$0=c_t^1\theta_Z^1+c_t^2\theta_Z^2 \tag{A2}$$

$$0=c_t^1\theta_O^1+c_t^2\theta_O^2 \tag{A3}$$

由于 $\theta_S^1=\theta_S^2=\theta_S$，并且根据式(13)可以得到式(18)、(19)、(21).

由消费市场出清条件两端 Itô 微分式中 dt 项系数相等知，

$$\sum_{i=1}^{2}c_t^i(-\rho^i+r_t+(\theta_{St}^i)^2+(\theta_{Zt}^i)^2+(\theta_{Ot}^i)^{\prime}\theta_{Ot}^i)-\sum_{i=1}^{2}c_t^i(\theta_{St}^i\hat{\mu}_{\delta t}^i+\theta_{Zt}^i\hat{\mu}_{Zt}^i+(\theta_{Ot}^i)^{\prime}\hat{\mu}_{Xt}^i)=\sum_{n=1}^{N}\delta_{nt}\mu_{\delta nt} \tag{A4}$$

并利用式(A1)、(A2)、(A3)，可以得到

$$\sum_{i=1}^{2}c_t^i(-\rho^i+r_t)+(\sum_{n=1}^{N}\delta_{nt}\sigma_{\delta nt})(\theta_{St}^2-\hat{\mu}_{\delta t}^2)=\sum_{n=1}^{N}\delta_{nt}\mu_{\delta nt} \tag{A5}$$

利用式(18)，注意 $\hat{\mu}_{\delta t}^i=0$ 可以得到

$$r_t=\frac{\varphi_t\eta_t\rho^1+\rho^2}{\varphi_t\eta_1+1}-\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_{it}}{\sum_{j=1}^{N}\delta_{jt}}\sigma_{\delta it}\right)^2+\sum_{n=1}^{N}\frac{\delta_{nt}}{\sum_{1}^{N}\delta_{nt}}\sigma_{\delta nt}\hat{\mu}_{\delta t}^2+\sum_{n=1}^{N}\frac{\delta_{nt}}{\sum_{1}^{N}\delta_{nt}}\mu_{\delta nt} \tag{A6}$$

经过整理可以得到式(21).　证毕.

性质 2 证明　对资本市场出清条件两端求 $It\hat{o}$ 微分有

$$\sum_{i=1}^{N}S_{nt}\sigma_{\Delta nt}=W_t^1\theta_{St}^1+W_t^2\theta_{St}^2 \tag{A7}$$

$$\sum_{i=1}^{N}S_{nt}\sigma_{Znt}=W_t^1\theta_{Zt}^1+W_t^2\theta_{Zt}^2 \tag{A8}$$

$$S_{nt}\sigma_{Xnt}=W_t^1\theta_{Ont}^1+W_t^2\theta_{Ont}^2 \tag{A9}$$

把式(18)、(19)、(20)分别代入(A7)、(A8)、(A9)，并注意资本市场出清条件可以得到式(23)、(24)、(25).

由式(11)知

$$\mu_{St}^i-r_t=\sigma_{\Delta t}\theta_{St}^i+\sigma_{Zt}\theta_{Zt}^i+\sigma_{Xt}\theta_{Ot}^i \tag{A10}$$

对式(A10)进行简单代数变换，有

$$c_t^1(\mu_{St}^1-r_t)+c_t^2(\mu_{St}^2-r_t)=c_t^1\sigma_{\Delta t}\theta_{St}^1+c_t^2\sigma_{\Delta t}\theta_{St}^2+c_t^1\sigma_{Zt}\theta_{Zt}^1+c_t^2\sigma_{Zt}\theta_{Zt}^2+c_t^1\sigma_{Xt}\theta_{Ot}^1+c_t^2\sigma_{Xt}\theta_{Ot}^2 \tag{A11}$$

注意到式(A1)、(A2)、(A3)，并经过简单的恒等变换，式(A11)变为

$$(c_t^1+c_t^2)(\mu_{St}-r_t)=\sigma_{\Delta t}\sum_{i=1}^{N}\delta_{it}\sigma_{\delta it}-c_t^1(\mu_{St}^1-\mu_{St})-c_t^2(\mu_{St}^2-\mu_{St}) \tag{A12}$$

根据式(10)

$$\mu_{St}-r_t=\sigma_{\Delta t}\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_{it}\sigma_{\delta it}}{\sum_{n=1}^{N}\delta_{nt}}-\sigma_{Zt}\frac{\eta_t\varphi_t\hat{\mu}_{Zt}^1+\hat{\mu}_{Zt}^2}{\eta_t\varphi_t+1}-\sigma_{Xt}\frac{\eta_t\varphi_t\hat{\mu}_{Xt}^1+\hat{\mu}_{Xt}^2}{\eta_t\varphi_t+1}$$

取上式的第 n 行，注意 σ_{Xt} 对角线矩阵的特点，可以得到式(22).

把式(21)代入式(22)，经过整理可以得到式(26).

式(14)的推导过程

由. 式(7)、(12)、(13)知

$$\mathrm{d}\xi_t^1=\xi_t^1\left[-r_t\mathrm{d}t-\theta_{St}^1\mathrm{d}w_{\delta t}-\theta_{Zt}^1\mathrm{d}w_{Zt}^1-(\theta_{Ot}^1)^{\prime}\mathrm{d}w_{Xt}^1\right]$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\xi_t^2)^{-1}&=(\xi_t^2)^{-1}\left[(r_t+(\theta_{St}^2)^2+(\theta_{Zt}^2)^2+(\theta_{Ot}^2)^{\prime}\theta_{Ot}^2)\mathrm{d}t+\theta_{St}^2\mathrm{d}w_{\delta t}+\theta_{Zt}^2\mathrm{d}w_{Zt}^1+(\theta_{Ot}^2)^{\prime}\mathrm{d}w_{Xt}^1+\theta_{Zt}^2\bar{\mu}_{Zt}\mathrm{d}t+(\theta_{Ot}^2)^{\prime}\bar{\mu}_{Xt}\mathrm{d}t\right]\\&=(\xi_t^2)^{-1}\left[(r_t+(\theta_{St}^2)^2+\theta_{Zt}^1\theta_{Zt}^2+(\theta_{Ot}^2)^{\prime}\theta_{Ot}^1)\mathrm{d}t+\theta_{St}^2\mathrm{d}w_{\delta t}+\theta_{Zt}^2\mathrm{d}w_{Zt}^1+(\theta_{Ot}^2)^{\prime}\mathrm{d}w_{Xt}^1\right]\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}\xi_t^1\mathrm{d}(\xi_t^2)^{-1}=-\theta_{St}^1\theta_{St}^2\mathrm{d}t-\theta_{Zt}^1\theta_{Zt}^2\mathrm{d}t-(\theta_{Ot}^1)^{\prime}\theta_{Ot}^2\mathrm{d}t$$

由 $\mathrm{d}\frac{\xi_t^1}{\xi_t^2}=\xi_t^1\mathrm{d}(\xi_t^2)^{-1}+(\xi_t^2)^{-1}\mathrm{d}\xi_t^1+\mathrm{d}\xi_t^1\mathrm{d}(\xi_t^2)^{-1}$ 知

$$\mathrm{d}\frac{\xi_t^1}{\xi_t^2}=\frac{\xi_t^1}{\xi_t^2}(-\bar{\mu}_{Z_s}\mathrm{d}w_{Zs}^1-(\bar{\mu}_{Xs})^{\prime}\mathrm{d}w_{Xs}^1)$$　证毕.

由 Itô 引理可得式(14).