空间经济计量滞后模型 Moran 检验的渐近分布①

欧变玲[1,2]，龙志和[1]，林光平[3]

(1. 华南理工大学经济与贸易学院，广州 510640；
2. 中国科学院数学与系统科学研究院，北京 100190；
3. 波特兰州立大学经济系，波特兰 97207)

摘要：基于空间经济计量滞后模型的 2SLS 残差，证明误差项服从正态独立同分布时，空间滞后模型 Moran 检验渐近服从正态分布，提出 OLL-Moran 检验②. Monte Carlo 实验结果显示，与 KP-Moran 检验相比，提出的 OLL-Moran 检验的水平扭曲更低、功效更高. OLL-Moran 检验具有良好的有限样本性质，能够更有效地检验空间经济计量滞后模型估计残差间的空间关系.

关键词：空间经济计量滞后模型；OLL-Moran 检验；2SLS 估计；蒙特卡洛

中图分类号：F224.0　　文献标识码：A　　文章编号：1007-9807(2011)12-0079-08

0　引　言

随着人类社会活动空间的增大，区域或个体间的空间关系日益紧密，研究其空间关系在经济分析中极为重要. 在传统经济计量模型中引入空间权重矩阵，能够有效刻画研究对象间的空间相关性，比如吴玉鸣和何建坤[1]研究发现考虑地理空间效应的空间滞后模型和空间误差模型是研究大学、企业和区域创新集聚机制及其成因的较好方法，张嘉为等[2]采用空间经济计量方法，研究 1997-2006 年间我国 31 个省市对外贸易的空间关系，并预测部分省市的出口贸易，结果显示空间关系的引入显著提高了模型的预测精度. 然而，空间相关性检验是空间数据分析的关键.

空间经济计量滞后模型(简称"空间滞后模型")是经典的空间经济计量模型. 它是线性回归模型的延伸模型，即在一般线性回归方程中嵌入滞后因变量. 文献中，Anselin[3]基于空间滞后模型的 ML 估计残差，给出误差项服从正态独立同分布时，空间相关性 LM 检验渐近服从自由度为 1 的卡方分布. Anselin 和 Kelejian[4]、Kelejian 和 Prucha[5]等利用空间滞后模型的 2SLS 估计残差，构建 Moran's I 统计量，证明误差项服从独立同分布时③，空间相关性检验统计量渐近服从期望为 $E_{KP}(I)$ 和方差为 $V_{KP}(I)$ 的正态分布(简称"KP-Moran 检验"). KP-Moran 检验形如 $I_{KP}=\boldsymbol{e}'\boldsymbol{We}/\hat{\sigma}$. KP-Moran 检验的均值和方差分别为 $E_{KP}(I)=0$，$V_{KP}(I)=N^{-2}[\mathrm{tr}(\boldsymbol{WW}+\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W})+\hat{\sigma}^2\boldsymbol{u}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{PZ})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u}]$，$\hat{\sigma}^2=\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}/N$，$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{W}')\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{e}$ 是空间滞后模型 $\boldsymbol{y}=\lambda\boldsymbol{Wy}+\boldsymbol{X}\beta+\varepsilon$ 的 2SLS 估计残差，$\boldsymbol{W}$ 是行标准化的空间权重矩阵，

---

① 收稿日期：2009-11-05；修订日期：2011-06-02.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(70871041)；中国博士后科学基金资助项目(20100480492).
作者简介：欧变玲(1981—)，女，河南登封人，博士. Email：oubianling@amss.ac.cn

② OLL-Moran 检验中的"OLL"是"Ou Bian-ling、Long Zhi-he、Lin Kuan-pin"姓氏第 1 个字母的组合. 为避免与 Kelejian 和 Prucha[5]提出的 Moran 检验(即 KP-Moran 检验)混淆，将本文中提出的 Moran 检验简称为 OLL-Moran 检验.

③ Kelejian 和 Prucha[5]证明了模型误差存在异方差时，Tobit 模型、二分模型(dichotomous model)、样本选择模型和多分模型(polychotomous model)等限值因变量模型情况下，Moran's I 统计量的渐近分布；但空间经济计量滞后模型情况下，Moran's I 统计量的渐近分布仍然要求误差项服从独立同分布，而没有放松至异方差误差情形.

$\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{Wy}, \boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{H}'\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{H}$为工具矩阵.

因为空间滞后模型的 ML 估计通常受限于繁杂的计算和严格的模型假设条件，而样本量通常较小且不满足模型假设，故此 Anselin[3] 提出的 LM 检验较为少用. 虽然空间滞后模型的 2SLS 估计方法计算方便且模型假设条件相对简单，但是 KP-Moran 检验仅适用于大样本情况，在小样本情况下会出现较大扭曲.

总的来看，目前在理论和实证研究中，虽然空间滞后模型的应用极为广泛，但是国际学术界对空间经济计量模型，尤其是基于模型2SLS 估计残差进行空间相关性检验的理论研究较少. 研究空间滞后模型残差间的空间相关性检验方法势在必行. 本文拓展 KP-Moran 检验的适用范围，基于空间滞后模型的2SLS 估计残差，证明空间滞后模型 Moran 检验的渐近分布，提出 OLL-Moran 检验. 首先从理论角度给出 OLL-Moran 的渐近分布，进而从仿真分析角度比较 KP-Moran 和 OLL-Moran 检验的相对有效性.

1 模型及其假定

根据研究对象之间“空间”表现形式的不同，空间经济计量模型主要分为空间滞后模型和空间误差模型两种类型. 空间滞后模型主要用于研究相邻机构或地区的行为对整个系统内其他机构或地区的行为都有影响的情形，具体表达式为

$$\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{Wy} + \boldsymbol{X}\beta + \varepsilon \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{y}$为因变量，是$1 \times N$列向量；$\boldsymbol{X}$为自变量，是$K \times N$阶矩阵（其中，K为自变量的个数）；ε是模型误差. $\boldsymbol{W}$是空间权重矩阵，即反映各个机构或地区之间相互关系的网络结构矩阵. $\boldsymbol{Wy}$为周边因变量的加权平均，视为空间滞后因变量. λ是空间自回归系数.

在空间滞后模型的误差项中引入空间误差滞后项，可以得到空间滞后模型的两个扩展模型，即空间滞后误差自相关模型（简称“SARAR(1,1)模型”）和空间滞后误差移动平均模型（简称“SARMA(1,1)模型”）. 其中，SARAR(1,1)模型较常见，具体形式如下

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \lambda \boldsymbol{Wy} + \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u} &= \rho \boldsymbol{Wu} + \varepsilon \end{aligned} \tag{2}$$

其中，λ和ρ分别是空间自回归系数和空间误差自相关系数，其他参数含义与式(1)相同.

记$\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{Wy}, \boldsymbol{X})$，$\delta = (\lambda, \beta')'$，则式(1)可写成$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Z}\delta + \varepsilon$. 借鉴 Kelejian 和 Prucha[5-8] 给出如下假定. 这里，δ的 2SLS 估计量 $\hat{\delta} = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{PZ})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Py}$ 一致（详见欧变玲等[9]），$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{H}'\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}'$，并且 OLL-Moran 检验的渐近分布成立.

假定 1 自变量$\boldsymbol{X}$为一致有界常数，即$x_{ij} < \infty$，$(1 \leqslant i \leqslant N,\ 1 \leqslant j \leqslant K)$. 同时，$\boldsymbol{X}$满秩，$\lim\limits_{N\to\infty}(1/N)\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$存在且非退化. 其中，$K$是$\boldsymbol{X}$的列数.

假定 2 矩阵$\boldsymbol{W}$的行列绝对一致有界，即

$$\|\boldsymbol{W}\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,N}\sum_{j=1}^{N}|w_{ij}| < \infty$$

$$\|\boldsymbol{W}\|_1 = \max_{j=1,\cdots,N}\sum_{i=1}^{N}|w_{ij}| < \infty$$

假定 3 空间滞后模型中，误差项ε服从正态独立同分布，期望为0，$E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0$，$\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$，不妨记$\sigma^2 = 1$ $(i \neq j;\ i, j = 1, \cdots, N)$④.

假定 4 矩阵$(\boldsymbol{I}_N - \lambda\boldsymbol{W})^{-1}$的行列绝对一致有界，即

$$\|(\boldsymbol{I}_N - \lambda\boldsymbol{W})^{-1}\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,N}\sum_{j=1}^{N}|\{(\boldsymbol{I}_N - \lambda\boldsymbol{W})^{-1}\}_{ij}| < \infty,$$

$$\|(\boldsymbol{I}_N - \lambda\boldsymbol{W})^{-1}\|_1 = \max_{j=1,\cdots,N}\sum_{i=1}^{N}|\{(\boldsymbol{I}_N - \lambda\boldsymbol{W})^{-1}\}_{ij}| < \infty$$

其中，$|\lambda| < 1$.

假定 5 工具矩阵$\boldsymbol{H}$是$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{WX}, \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{X}, \cdots)$的线性无关列. 其中，$\boldsymbol{H}$至少包括$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{WX})$的线性无关列.

④ 当模型误差存在异方差时，本文的后续研究引入了非参数方法—Bootstrap 方法，构造 Bootstrap Moran 统计量，放松对误差项的限制，检验空间经济计量滞后模型中可能存在的空间相关性（详见欧变玲等[10]）.

假定 6　工具矩阵 $\boldsymbol{H}$ 满足如下条件：

1）矩阵 $\boldsymbol{Q}_{\mathbf{HH}}=\lim_{N\to\infty}N^{-1}\boldsymbol{H}'\boldsymbol{H}$ 有限、可逆；

2）矩阵 $\boldsymbol{Q}_{\mathbf{HZ}}=p\lim_{N\to\infty}N^{-1}\boldsymbol{H}'\boldsymbol{Z}$ 有限、满秩.

假定 7　工具矩阵 $\boldsymbol{H}$ 与模型误差 ε 线性无关，即 $\boldsymbol{Q}_{\mathbf{H}\varepsilon}=\lim_{N\to\infty}N^{-1}\boldsymbol{H}'\varepsilon=0$.

当假定1、3、4、6 和 7 成立时，$\hat{\delta}$ 是 δ 的一致估计量. 进而，在假定1、2 和 5 条件下，基于空间滞后模型的 2SLS 估计残差得到的 Moran 检验统计量将具有良好的性质.

2　OLL-Moran 检验的渐近分布

空间相关性 OLL-Moran 检验的原假设为空间滞后模型的误差项空间无关，即空间滞后模型成立，备择假设为空间滞后模型的误差项空间相关，即 SARAR（1，1）模型或 SARMA（1，1）模型成立. 基于空间滞后模型的 2SLS 估计残差，Moran's I 统计量为

$$I=\frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}\tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{e}$ 是空间滞后模型的2SLS 估计残差，$\boldsymbol{W}$ 是行标准化的空间权重矩阵. 易得 $\boldsymbol{e}=\tilde{\boldsymbol{M}}\varepsilon$，其中 $\tilde{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{I}_N-\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{P}$ 是幂等矩阵，$\boldsymbol{I}_N$ 为 N 阶单位矩阵. 故此，式（3）可写成

$$I=\frac{\varepsilon'\tilde{\boldsymbol{M}}'\boldsymbol{W}\tilde{\boldsymbol{M}}\varepsilon}{\varepsilon'\tilde{\boldsymbol{M}}'\tilde{\boldsymbol{M}}\varepsilon}=\frac{\varepsilon'\tilde{\boldsymbol{M}}'\boldsymbol{W}'\tilde{\boldsymbol{M}}\varepsilon}{\varepsilon'\tilde{\boldsymbol{M}}'\tilde{\boldsymbol{M}}\varepsilon}\tag{4}$$

记 $\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{W}')/2$，从而，Moran's I 统计量亦可表示为

$$I=\frac{\varepsilon'\tilde{\boldsymbol{M}}'\boldsymbol{V}\tilde{\boldsymbol{M}}\varepsilon}{\varepsilon'\tilde{\boldsymbol{M}}'\tilde{\boldsymbol{M}}\varepsilon}\tag{5}$$

利用空间滞后模型 2SLS 估计残差构建的 Moran's I 统计量，检验 2SLS 估计残差间的空间相关性，即 OLL-Moran 检验. 它能够用于识别空间滞后模型的 2SLS 估计残差间是否存在空间相关性.

命题1　如果假定1 至假定7 成立，对于 $\eta\geqslant 0$，$\mathrm{E}(\varepsilon_i^{4+\eta})<\infty$，即模型误差至少存在4 阶矩，那么空间滞后模型中的 Moran's I 统计量，即 OLL-Moran 检验渐近服从期望为 $E_{\mathrm{OLL}}(I)$ 和方差为 $V_{\mathrm{OLL}}(I)$ 的正态分布. $E_{\mathrm{OLL}}(I)$ 和 $V_{\mathrm{OLL}}(I)$ 的表达式如下

$$E_{\mathrm{OLL}}(I)=\frac{\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{M}}'\boldsymbol{V}\tilde{\boldsymbol{M}})}{N-K+1},$$

$$V_{\mathrm{OLL}}(I)=\frac{2\mathrm{tr}[(\tilde{\boldsymbol{M}}'\boldsymbol{V}\tilde{\boldsymbol{M}})^2]+[\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{M}}'\boldsymbol{V}\tilde{\boldsymbol{M}})]^2}{(N-K-1)(N-K+1)}-[E_{\mathrm{OLL}}(I)]^2$$

其中，$\mathrm{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹，即矩阵的对角线元素之和，$\tilde{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{I}_N-\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{I}_N$ 为 N 阶单位矩阵，$\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{W}')/2$，$N$ 和 K 分别是自变量 $\boldsymbol{X}$ 的行数和列数. 当采用 2SLS 方法时，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{H}'\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}'$. 命题 1 的证明详见附录.

综上，标准化的 OLL-Moran 检验渐近服从标准正态分布，即

$$\frac{I-E(I)}{\sqrt{V_{\mathrm{OLL}}(I)}}\sim N(0,1)\tag{6}$$

比较 OLL-Moran 检验与 KP-Moran 检验可知：第 1，两者的形状一致，OLL-Moran 检验和 KP-Moran 检验都渐近服从正态分布. 第2，两者的期望值不同，OLL-Moran 检验的期望为 $E_{\mathrm{OLL}}(I)$，KP-Moran 检验的期望为 0. 当样本量 $N\to\infty$ 时，$E_{\mathrm{OLL}}(I)\to 0$，即在大样本情况下，OLL-Moran 检验的分布函数左移，与 KP-Moran 检验类似，OLL-Moran 检验的渐近分布函数关于原点对称；在小样本情况下，OLL-Moran 检验的期望大于 KP-Moran 检验. 第 3，两者的方差不同，即实际值与期望值之间的平均偏离距离不同. 第 3 部分利用 Monte Carlo 仿真实验，深入研究 OLL-Moran 检验的有限样本性质⑤，以及 OLL-Moran 检验和 KP-Moran 检验的关系.

3　Monte Carlo 实验

文献 [10] 在 Gauss7.0 软件中自编程序，通过大量 Monte Carlo 实验，考察原假设空间滞后模型

⑤　实际研究中，无法研究样本量为无穷大的情形，即进行大样本的模拟实验和实际应用，然而可以通过不断提高样本量，取得近似结果. 随着样本量的增加，OLL-Moran 检验的有限样本性质将近似于大样本.

和备择假设 SARAR(1,1) 模型情况下，OLL-Moran 检验的有限样本性质，以及 OLL-Moran 检验和 KP-Moran 检验的关系.

3.1 Monte Carlo 实验设计

在空间滞后模型 2SLS 估计残差的空间相关性检验中，原假设和备择假设分别为空间滞后模型式(1)，以及 SARAR(1,1) 模型式(2). 本文 Monte Carlo 实验的数据生成过程空间经济计量滞后模型和SARAR(1,1)模型. Monte Carlo 实验的相关参数设定如下.

1) 空间权重矩阵 $\boldsymbol{W}$ 为虚拟的 Rook 矩阵. 其中，Rook 矩阵的构造规则为 Rook 规则，即研究对象间存在公共边则取1，否则取0. 并且，$\boldsymbol{W}$ 是行标准化、对角线元素为0的矩阵. Rook 矩阵是实证研究中常用的空间权重矩阵.

2) 自变量 $\boldsymbol{X}$ 为 $N\times 3$ 的矩阵，包括两个自变量和1个常数项. 其中，第1列和第2列变量在[0，10]之间随机生成，第3列元素为常数向量1. 对应的参数 $\beta=(1,1,1)'$ 是 3×1 的向量.

3) ε 为随机生成的正态独立同分布误差.

4) 空间自回归系数 $\lambda=-0.9, -0.7, \cdots, 0.7, 0.9$. 当原假设成立时，$\rho=0$；当备择假设成立时，空间误差自相关系数 $\rho=-0.9, -0.7, \cdots, 0.7, 0.9$.

5) 当原假设空间滞后模型成立时，因变量 $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{I}_N-\lambda\boldsymbol{W})^{-1}(\boldsymbol{X}\beta+\varepsilon)$；当备择假设 SARAR(1,1)模型成立时，因变量

$$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{I}_N-\lambda\boldsymbol{W})^{-1}[\boldsymbol{X}\beta+(\boldsymbol{I}_N-\rho\boldsymbol{W})^{-1}\varepsilon]$$

基于以上设定，本文在名义显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，取5 000个Monte Carlo实验样本，考察样本量 $N=25,49,100$ 情况下，OLL-Moran 检验和 KP-Moran 检验的有限样本性质.

3.2 Monte Carlo 实验结果

3.2.1 水平扭曲

当原假设成立，即空间滞后模型的2SLS 估计残差间不存在空间相关性时，Rook 矩阵情况下，OLL-Moran 检验和 KP-Moran 检验的水平扭曲如表1 所示.

表1 OLL-Moran 检验和 KP-Moran 检验的水平扭曲

Table 1 Size distortion of OLL-Moran test and KP-Moran test

λ	$N=25$		$N=49$		$N=100$	
	KP-Moran	OLL-Moran	KP-Moran	OLL-Moran	KP-Moran	OLL-Moran
-0.9	-0.032 2	0.002 4	-0.018 0	0.002 8	-0.014 0	-0.000 2
-0.7	-0.028 0	0.008 2	-0.013 8	0.005 4	-0.011 4	0.004 0
-0.5	-0.024 8	0.007 8	-0.013 0	0.006 6	-0.010 8	0.005 4
-0.3	-0.022 4	0.006 6	-0.012 4	0.005 8	-0.011 4	0.005 4
-0.1	-0.020 6	0.005 0	-0.013 0	0.005 4	-0.012 0	0.006 0
0.1	-0.017 8	0.004 0	-0.012 8	0.006 8	-0.011 8	0.007 0
0.3	-0.015 8	0.001 0	-0.012 8	0.007 2	-0.009 8	0.006 0
0.5	-0.013 6	0.001 6	-0.010 8	0.006 6	-0.009 2	0.006 2
0.7	-0.011 4	0.000 8	-0.009 8	0.003 6	-0.006 4	0.003 6
0.9	-0.009 6	0.001 6	-0.008 6	0.002 2	-0.005 8	0.000 4

所谓水平扭曲，是指当原假设为真时，假设检验错误地拒绝原假设的概率(rejection probability)与名义显著性水平之差. 水平扭曲的绝对值越小表示假设检验结果越可信. 由表1 可见，在给定名义显著性水平下，OLL-Moran 检验的水平扭曲都远小于KP-Moran 检验，二者的差异均随样本量的增大而减小. 简言之，从水平扭曲角度看，当样本量较小时，OLL-Moran 优于 KP-Moran；当样本量较大时，OLL-Moran 检验更优，或者与 KP-Moran 同等有效.

3.2.2 功效

当备择假设 SARAR(1,1)模型成立，即空间滞后模型的2SLS 估计残差间存在空间相关性时，OLL-Moran 检验和 KP-Moran 检验的功效，见表2

和表 3．由于篇幅所限，本文以空间误差自相关系数 $\lambda = -0.5, 0.5$ 为例进行报告．所谓功效，是指当原假设为假时不接受原假设的概率，即不犯第 2 类错误的概率．记犯第 2 类错误的概率为 β，则假设检验的功效为 $1-\beta$，此数值越大表示假设检验结果越可信．

表 2　**OLL-Moran** 检验和 **KP-Moran** 检验的功效（$\lambda = -0.5$）

Table 2 Power of OLL-Moran test and KP-Moran test（$\lambda = -0.5$）

ρ	$N=25$		$N=49$		$N=100$	
	KP-Moran	OLL-Moran	KP-Moran	OLL-Moran	KP-Moran	OLL-Moran
−0.9	0.088 0	0.433 4	0.963 2	0.995 6	0.988 4	0.999 8
−0.7	0.246 2	0.541 2	0.929 6	0.947 8	0.997 0	0.998 4
−0.5	0.213 8	0.335 6	0.669 0	0.704 6	0.929 6	0.946 8
−0.3	0.108 4	0.154 4	0.286 2	0.317 2	0.529 6	0.567 8
−0.1	0.041 4	0.066 0	0.072 0	0.086 0	0.096 6	0.118 2
0.1	0.020 8	0.067 6	0.047 2	0.081 4	0.082 6	0.122 4
0.3	0.050 0	0.164 8	0.207 0	0.316 0	0.492 4	0.581 8
0.5	0.149 2	0.364 2	0.584 2	0.702 6	0.923 4	0.956 4
0.7	0.333 8	0.620 6	0.897 6	0.946 0	0.999 0	0.999 4
0.9	0.521 2	0.839 0	0.991 6	0.998 8	1.000 0	1.000 0

从表 2 和表 3 可以看出，在给定名义显著性水平下，无论空间自回归是正相关还是负相关，OLL-Moran 检验的功效均大于 KP-Moran 检验；OLL-Moran 检验和 KP-Moran 检验的功效均随样本量增大而提高，并趋于近似相等；OLL-Moran 检验和 KP-Moran 检验的功效随空间误差自相关系数绝对值的增大而提高．简言之，从功效角度看，OLL-Moran 检验优于 KP-Moran 检验，尤其是样本量较小时，OLL-Moran 检验的功效显著大于 KP-Moran 检验．

表 3　OLL-Moran 检验和 KP-Moran 检验的功效（$\lambda = 0.5$）

Table 3 Power of OLL-Moran test and KP-Moran test（$\lambda = 0.5$）

ρ	$N=25$		$N=49$		$N=100$	
	KP-Moran	OLL-Moran	KP-Moran	OLL-Moran	KP-Moran	OLL-Moran
−0.9	0.666 8	0.931 8	0.994 6	0.998 2	1.000 0	1.000 0
−0.7	0.676 4	0.739 4	0.953 2	0.959 6	0.999 4	0.999 6
−0.5	0.416 4	0.419 0	0.721 6	0.717 0	0.957 4	0.957 8
−0.3	0.191 2	0.177 0	0.332 0	0.324 0	0.587 6	0.581 2
−0.1	0.067 6	0.065 8	0.084 8	0.084 8	0.121 8	0.121 0
0.1	0.023 2	0.066 2	0.038 0	0.082 4	0.069 8	0.122 4
0.3	0.035 6	0.163 4	0.160 4	0.308 2	0.431 4	0.567 4
0.5	0.108 2	0.349 2	0.483 8	0.664 6	0.887 0	0.944 4
0.7	0.248 8	0.592 2	0.803 0	0.919 6	0.995 6	0.999 4
0.9	0.303 0	0.786 2	0.901 2	0.986 0	0.997 4	1.000 0

综上，大量的 Monte Carlo 实验结果表明，从水平扭曲和功效角度看，当误差项服从正态独立同分布时，与 KP-Moran 检验相比，OLL－Moran 检验更能有效地识别研究对象间的空间相关性．

4 结束语

本文基于空间滞后模型的2SLS估计残差,从理论角度,给出空间滞后模型 Moran 检验渐近服从期望为 $E_{OLL}(I)$ 和方差为 $V_{OLL}(I)$ 的正态分布,提出 OLL-Moran 检验. 进而,在 Gauss 7.0 软件中编写程序,从仿真角度,研究OLL-Moran检验的有限样本性质,以及OLL-Moran检验与KP-Moran检验的关系. 大量 Monte Carlo 仿真实验结果显示,本文提出的OLL-Moran具有较低的水平扭曲和较高的功效,尤其是在小样本情况下,OLL-Moran明显优于KP-Moran,即OLL-Moran检验具有良好的有限样本性质,能够有效地研究空间滞后模型2SLS估计残差间的空间关系存在与否.

简言之,当模型误差服从正态分布时,OLL-Moran检验比KP-Moran检验的有限样本性质更好,同时二者具有相似的大样本性质.

参 考 文 献:

[1] 吴玉鸣, 何建坤. 研发溢出、区域创新集群的空间计量经济分析[J]. 管理科学学报, 2008, 11(4): 59 - 66.
Wu Yu-ming, He Jian-kun. Spatial econometric analysis of R&D spillovers and regional innovation cluster[J]. Journal of Management Sciences in China, 2008, 11(4): 59 - 66. (in Chinese)

[2] 张嘉为, 陈 曦, 汪寿阳. 新的空间权重矩阵及其在中国省域对外贸易中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(11): 84 - 92.
Zhang Jia-wei, Chen Xi, Wang Shou-yang. New spatial weight matrix and its application in China s′regional foreign trade[J]. System Engineering-Theory &Practice in China, 2009, 29(11): 84 - 92. (in Chinese)

[3] Anselin L. Spatial Econometrics: Methods and Models[M]. Dordrecht Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1988.

[4] Anselin L, Kelejian H. Testing for spatial error autocorrelation in the presence of endogenous regressors[J]. International Regional Science Review, 1997, 20(1/2): 153 - 182.

[5] Kelejian H, Prucha I R. On the asymptotic distribution of the moran I test statistic with applications[J]. Journal of Econometrics, 2001, 104(2): 219 - 257.

[6] Kelejian H, Prucha I R. A generalized spatial two-stage least squares procedure for estimating a spatial autoregressive model with autoregressive disturbance[J]. Journal of Real Estate Finance and Economics, 1998, 17(1): 99 - 121.

[7] Kelejian H, Prucha I R. A generalized moments estimator for the autoregressive parameter in a spatial model[J]. International Economic Review, 1999, 40(2): 509 - 533.

[8] Kelejian H, Prucha I R. 2SLS and OLS in a spatial autoregressive model with equal spatial weights[J]. Regional Science and Urban Economics, 2002, 32(6): 691 - 707.

[9] 欧变玲, 龙志和, 林光平. 空间经济计量滞后模型Bootstrap Moran检验的水平扭曲[J]. 系统工程, 2009, 27(8): 69 - 73.
Ou Bian-ling, Long Zhi-he, Lin Kuan-pin. Size distortion of bootstrap Moran diagnostic testing for spatial autoregressive models[J]. System Engineering in China, 2009, 27(8): 69 - 73. (in Chinese)

[10] 欧变玲, 龙志和, 林光平. 空间滞后模型中Morans′I统计量的Bootstrap检验[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1537-1544.
Ou Bian-ling, Long Zhi-he, Lin Kuan-pin. Bootstrap Moran s′I test statistic in spatial autoregressive models[J]. System Engineering-Theory & Practice in China, 2010, 30(9): 1537 - 1544. (in Chinese)

[11] Lin K P. Computational Econometrics: GAUSS Programming for Econometricians and Financial Analysis[M]. Los Angles: ETEXT Publishing, 2001.

[12] Plackett R. Principles of Regression Analysis[M]. Oxford: Clarendon, 1960.

[13] Pitman E J G. The ‘closest estimates’ of statistical parameters[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1937, 33(2): 212 - 222.

[14] Koopmans T C. Serial correlation and quadratic foms in normal variables[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1942, 13(1): 14-33.

[15] Hoeffding W. The large-sample power of tests based on permutations of observations[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1952, 23(2): 169-192.

Asymptotic distribution of Moran test in spatial econometric autoregressive models

OU Bian-ling[1,2], *LONG Zhi-he*[1], *LIN Kuang-ping*[3]

1. School of Economy and Trade, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China;
2. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;
3. Department of Economics, Portland State University, Portland, Oregon, 97207, USA)

Abstract: In this paper, based on the 2SLS residuals in the spatial econometric autoregressive model, we prove that Moran test is asymptotically normal distribution when the error is independent and identically distributed, and then establish OLL-Moran test. Monte Carlo experiment results show that size distortion of OLL-Moran test in this research is less than that of KP-Moran, and the power of OLL-Moran test is more than that of KP-Moran. OLL-Moran test has good finite sample performance, and could check effectively spatial correlation among 2SLS residuals in the spatial econometric autoregressive model.

Key words: spatial econometric autoregressive model; OLL-Moran test; 2SLS estimation; Monte Carlo

附录

命题1的证明　按照如下3个步骤, 证明OLL-Moran检验的渐近分布. 首先, 基于 ε 的分布假设, 利用矩母函数性质, 给出 $\varepsilon'\tilde{M}'V\tilde{M}\varepsilon$ 的原点矩; 其次, 给出 $\varepsilon'\tilde{M}'\tilde{M}\varepsilon$ 的矩; 进而, 证明空间滞后模型中 Moran's I 统计量的渐近分布, 提出 OLL-Moran 检验.

第1步　给出Moran's I统计量分子 $\varepsilon'\tilde{M}'V\tilde{M}\varepsilon$ 的矩. 假设 1 成立条件下, 其矩母函数 (moment generating function) 为

$$\begin{aligned}
&E(\exp(\theta\varepsilon'\tilde{M}'V\tilde{M}\varepsilon)) = \\
&(2\pi)^{-N/2}\int_{(N)}\exp(\theta\varepsilon'\tilde{M}'V\tilde{M}\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon'\varepsilon)d\varepsilon_1\cdots d\varepsilon_N \\
&\quad=|I_N-2\theta\tilde{M}'V\tilde{M}|^{-1/2} \\
&\quad=\prod_{i=1}^{N}(1-2\theta w_i)^{-1/2} \qquad (A-1)
\end{aligned}$$

其中, $w_i(i=1,\cdots,N)$ 是矩阵 $\tilde{M}'V\tilde{M}$ 的特征值.

对式(A-1)两边取对数可得

$$\ln[\exp(\theta\varepsilon'MVM\varepsilon)] = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\ln(1-2\theta w_i) \qquad (A-2)$$

对式(A-2)右边的 $\ln(1-2\theta w_i)$ 在 $\theta=0$ 处进行 Taylor 展开, 得

$$\begin{aligned}
\ln(1-2\theta w_i) &= \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{(-2\theta w_i)^j}{j} \\
&=-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(2\theta w_i)^j}{j}
\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
\ln E[\exp(\theta\varepsilon'\tilde{M}'V\tilde{M}\varepsilon)] &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}\frac{2^{j-1}(j-1)!\,w_i^j}{j!}\theta^j \\
&=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{j-1}(j-1)!\,\mathrm{tr}[(\tilde{M}'V\tilde{M})^j]}{j!}\theta^j \qquad (A-3)
\end{aligned}$$

记 $Q=\varepsilon'\tilde{M}'V\tilde{M}\varepsilon$, $k_j(Q)$ 是 $\varepsilon'\tilde{M}'V\tilde{M}\varepsilon$ 的第 j 个累积量, 则

$$\ln E[\exp(\theta\varepsilon'\tilde{M}'V\tilde{M}\varepsilon)] = k_1(Q)\theta+\frac{k_2(Q)}{2!}\theta^2+\cdots+\frac{k_j(Q)}{j!}\theta^j+\cdots \qquad (A-4)$$

其中, $\mathrm{tr}(\tilde{M}'V\tilde{M})$ 表示矩阵 $\tilde{M}'V\tilde{M}$ 的迹, 即矩阵 $\tilde{M}'V\tilde{M}$ 的对角线元素之和.

结合式(A-3)和(A-4),可得 $\boldsymbol{Q} = \varepsilon'\tilde{\boldsymbol{M}}'\boldsymbol{V}\tilde{\boldsymbol{M}}\varepsilon$ 的第 j 个累积量为

$$k_j(\boldsymbol{Q}) = 2^{j-1}(j-1)!\,\mathrm{tr}[(\tilde{\boldsymbol{M}}'\boldsymbol{V}\tilde{\boldsymbol{M}})^j] \quad (A-5)$$

进而,根据累积量和矩的关系,可得 $\boldsymbol{Q} = \varepsilon'\tilde{\boldsymbol{M}}'\boldsymbol{V}\tilde{\boldsymbol{M}}\varepsilon$ 的矩. 其中,记 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{M}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{M}$,则 $\boldsymbol{Q}$ 的前 4 阶矩为

$$E(\boldsymbol{Q}) = \mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}})$$

$$E(\boldsymbol{Q}^2) = 2\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}}^2) + [\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}})]^2$$

$$E(\boldsymbol{Q}^3) = 8\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}}^3) + 6\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}}^2)\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}}) + [\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}})]^3$$

$$E(\boldsymbol{Q}^4) = 48\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}}^4) + 32\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}}^3)\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}}) + 12\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}}^2)[\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}})]^2 + [\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}})]^4$$

第 2 步 给出 Moran's I 统计量分母 $\varepsilon'\boldsymbol{M}'\boldsymbol{M}\varepsilon$ 的矩

在 $\varepsilon'\tilde{\boldsymbol{M}}'\tilde{\boldsymbol{M}}\varepsilon$ 中,ε_i 独立同分布,$\tilde{\boldsymbol{M}}'\tilde{\boldsymbol{M}}$ 为实对称矩阵,$\tilde{\boldsymbol{M}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{M}}'$ 都是幂等矩阵,则根据 Plackett[12] 可知,$\varepsilon'\tilde{\boldsymbol{M}}'\tilde{\boldsymbol{M}}\varepsilon$ 近似服从 $\chi^2(N-K-1)$ 分布,其中 $K+1$ 是矩阵 $\tilde{\boldsymbol{M}}'\tilde{\boldsymbol{M}}$ 的秩. 从而,记 $\boldsymbol{G} = \varepsilon'\tilde{\boldsymbol{M}}'\tilde{\boldsymbol{M}}\varepsilon$,易得其矩母函数为

$$\chi_G(\theta) = E[\exp(\theta\varepsilon'\tilde{\boldsymbol{M}}'\tilde{\boldsymbol{M}}\varepsilon)] = (1-2\theta)^{-(N-K-1)/2} \quad (A-6)$$

利用随机变量矩与矩母函数之间的关系,可得 $\varepsilon'\tilde{\boldsymbol{M}}'\tilde{\boldsymbol{M}}\varepsilon$ 的矩为

$$E(\boldsymbol{G})^j = [\chi_G(0)]^j = \prod_{m=1}^{j}[N-K-1+2(m-1)] \quad (A-7)$$

其中,$[\chi_G(0)]^j$ 表示矩母函数 $\chi_G(\theta)$ 的第 j 阶导数在 $\theta = 0$ 处的值.

第 3 步 证明空间滞后模型中 Moran's I 统计量的渐近分布

由 Pitman[13] 和 Koopmans[14] 可知,式(5)中的 I 和其分母 $\boldsymbol{G} = \varepsilon'\tilde{\boldsymbol{M}}'\tilde{\boldsymbol{M}}\varepsilon$ 相互独立,进而有

$$E(I^j) = \frac{E(\boldsymbol{Q}^j)}{E(\boldsymbol{G}^j)} = \frac{E[(\varepsilon'\tilde{\boldsymbol{M}}'\boldsymbol{V}\tilde{\boldsymbol{M}}\varepsilon)^j]}{E[(\varepsilon'\tilde{\boldsymbol{M}}'\tilde{\boldsymbol{M}}\varepsilon)^j]} \quad (A-8)$$

综上,可得 Moran's I 统计量的矩,其中,前 4 阶矩如下

$$E(I) = \frac{\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}})}{N-K-1}$$

$$E(I^2) = \frac{2\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}}^2) + [\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}})]^2}{(N-K-1)(N-K+1)}$$

$$E(I^3) = \frac{8\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}}^3) + 6\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}}^2)\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}}) + [\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}})]^3}{(N-K-1)(N-K+1)(N-K+3)}$$

$$E(I^4) = \frac{48\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}}^4) + 32\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}}^3)\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}}) + 12\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}}^2)[\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}})]^2 + [\mathrm{tr}(\tilde{\boldsymbol{T}})]^4}{(N-K-1)(N-K+1)(N-K+3)(N-K+5)}$$

当 $N \to \infty$ 时,Moran's I 统计量的矩 $E(I^j)$ 收敛于正态分布的矩,故此利用 Hoeffding[15] 可得基于空间滞后模型 2SLS 估计残差的 Moran's I 统计量将渐近服从正态分布. Moran's I 统计量的期望 $E_{OLL}(I)$ 和方差 $V_{OLL}(I)$ 分别为

$$E_{OLL}(I) = E(I) = \frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{M}\varepsilon)}{N-K+1} \quad (A-9)$$

$$V_{OLL}(I) = E(I^2) - [E(I)]^2 = \frac{2\mathrm{tr}[(\boldsymbol{M}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{M})^2] + [\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{M})]^2}{(N-K-1)(N-K+1)} - [E_{OLL}(I)]^2 \quad (A-10)$$

显然,命题 1 成立.