集装箱班轮二维收益管理在线动态定价策略[①]

李冰州
(厦门大学管理学院，厦门 361005)

摘要: 为了在现实约束条件下最大化班轮公司收益，研究了集装箱海运二维收益管理多航段多箱型在线动态定价模型，提出了其最优在线动态定价策略，并且证明了模型价值函数的单调性及其上界. 基于降维的思想提出了更为实际的启发式算法. 在算例中分析了单航段单箱型、单航段多箱型和多航段多箱型 3 种情况下的最优动态定价策略，分析结果表明: 在单航段单箱型的情况下，最优价格具有单调性; 在单航段多箱型和多航段多箱型的情况下，最优价格不一定具有单调性.

关键词: 二维收益管理; 在线动态定价; 多航段; 集装箱类型
中图分类号: U169.6; F552.5 文献标识码: A 文章编号: 1007 -9807(2012)08 -0034 -16

0 引 言

收益管理的目标是通过在恰当的时间以恰当的价格把恰当的产品或服务销售给恰当的顾客以最大化总收益. 收益管理起源于 20 世纪 80 年代的美国航空业，并迅速应用到多个行业，如酒店、汽车出租、零售、航空货运、广播、电视和互联网广告、医院、能源供应、旅游业、高科技产品等[1-4]. 收益管理的经济学本质就是价格分歧(或称价格歧视)，价格分歧的平均价可能高于不分歧的平均价. 这样，在某些情况下价格分歧可能是出售者的生存之道[5]. 自 2010 年 6 月 1 日起，中国民航国内航线头等舱、公务舱票价实行市场调节价[6]，航空收益管理掘金空间的增大将为其他行业特别是集装箱班轮业的收益管理应用起到良好的示范作用.

集装箱班轮业具有应用收益管理的典型特征，但收益管理的应用价值关键在于体现行业的特殊性. 集装箱班轮业和其他行业显著的不同在于其具有二维的能力，包括体积和重量，并且有许多不同的集装箱类型，另外还需考虑多航段的循环航线结构、重箱运输成本以及集装箱货流不平衡下空箱的调运成本等. 如今，互联网的兴起和运用使得集装箱班轮公司能够实行在线预订业务，实时动态定价变得十分可行. 信息技术的应用将使集装箱班轮业成为真正的现代服务业. 因此，集装箱班轮公司面临着如下的问题: 在二维能力的情况下，如何根据时间和需求的变化设定最优价格以最大化来自集装箱舱位预订的期望收益?

为了求解这个问题，本文提出了集装箱海运二维收益管理多航段多箱型动态定价模型. 由于其多维状态空间，获得二维模型的精确解是很困难的. 因此，有必要开发可扩展应用到行业规模的问题且容易计算的启发式算法. 为此，本文通过降低维度的方法提出了求解该模型的启发式方法.

对于动态定价问题，Gallego 和 van Ryzin[7-8] 提出了单产品的动态定价模型，并把上述模型扩展到多产品的情形，提出两种启发式策略. You[9] 研究了离散时间下的考虑多航段和批量需求的航空公司动态定价策略，该研究针对的是顺序连接的单向航线结构. 另外，Bitran 和 Mondschein[10] 在考虑顾客认知价值分布的基础上，提出了零售业

① 收稿日期: 2010 -07 -29; 修订日期: 2011 -09 -20.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71172049); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2010221023).
作者简介: 李冰州(1981—)，男，福建惠安人，博士，副教授. Email: libingzhou260@163.com

季节性商品的周期性定价模型. Feng 和 Gallego[11-12] 在需求函数为一般函数的情况下建立了价格仅有一次变化的两级价格结构的收益管理模型,并给出了最优时间阈值策略,并考虑需求与价格随时间不断变化,对上述模型进行拓展. Feng 和 Xiao[13] 提出了考虑风险因素及多种价格等级的收益管理模型. Zhao 和 Zheng[14] 研究了顾客到达为非齐次泊松过程的动态定价问题,并证明了收益函数是剩余时间与剩余存量的凹函数. Feng 和 Xiao[15] 运用点过程密度控制论,就持续变化的价格情形提出了时间连续的、多级价格结构的动态定价模型,得出了最优时间阈值,并且指出这种持续变化的价格策略有利于收益与利润的增加. 相比较而言,本文的模型考虑到了能力的多个维度以及多种集装箱类型的预订请求.

当二维问题被简化成一维问题时,集装箱班轮收益管理问题和带有批量预订的航空客运收益管理问题类似. 当预订一个 40 英尺箱位时,承运人不能只接受部分的请求(只接受一个 TEU) ,就像一个数量为两张票的批量需求不能被分割一样. Lee 和 Hersh[16] 研究了考虑批量预订单航段航空客运收益管理问题. Van Slyke 和 Young[17] 把考虑团体预订的单航段客运收益管理问题看作有限期随机背包问题的一个特例,并提出了求解问题的一般算法. 然而,该文提出的算法对于求解大型的集装箱货运问题在计算上是不切实际的. Kleywegt 和 Papastavrou[18] 研究了随机背包问题的一个变种,并提出了最优值函数单调性和凸性的充分条件. 除了文献[17],这些模型都不考虑有多维资源要求的预订.

但到目前,集装箱二维收益管理动态能力分配问题的相关研究还不多见,Xiao 和 Yang[19] 把多个能力维度的收益管理问题建模为连续时间的随机控制模型,并在严格的假设下推导出最优解及其单调性,但文中仅考虑了单航段和两种箱型,未考虑多航段多等级的情况. Li[20] 研究了考虑多箱型的集装箱海运二维收益管理动态能力分配随机模型. 多维收益管理的文献更多集中于航空货运领域. Pak 和 Dekker[21] 把短期预订控制问题建模为多维的动态背包问题. Moussawi 和 Cakanyildrim[22] 、Luo 和 Cakanyildrim[23] 开发了二维的超订模型,但没有考虑动态预订控制问题. Amaruchkul 等[24] 研究了单航段的航空货运动态能力控制模型,并比较了各种启发式策略的优劣. 上述研究主要是关于预订控制或者超订的,但本文是从动态定价的角度来分析集装箱班轮收益管理问题的.

1　模型建立

1.1　符号与假设

把整个计划期分成 T 个决策期,每个决策期最多只有一个顾客到达. 决策期以逆序表示,例如,$t = 1$ 表示最后的决策期,$t = 2$ 表示最后的决策期之前的那个时期,如此类推. 当然,也用 t 来表示剩下的决策期数.

假设集装箱班轮航线为循环航线结构,该航线包括 n 个港口,分别记为 $0,1,2,\cdots,n-1$,班轮顺序访问每个港口,然后回到起始港口,因此港口 0 既是起始港口也是终点港口,当它作为终点港口时,另记为 n(如图 1 所示) . 在 t_i 时期末,班轮将从港口 $i-1$ 出发驶向港口 i,$i = 0,1,2,\cdots,n$,且 $T > t_1 > t_2 > \cdots > t_n = 1$. 那么,港口 $0,1,2,\cdots,n$ 由 n 个航段所连接. 起讫港口对(i,j) 由无中间节点的并连的起讫港口对$(i,i+1)$,$(i+1,i+2)$,$\cdots$,$(j-1,j)$ 组成.

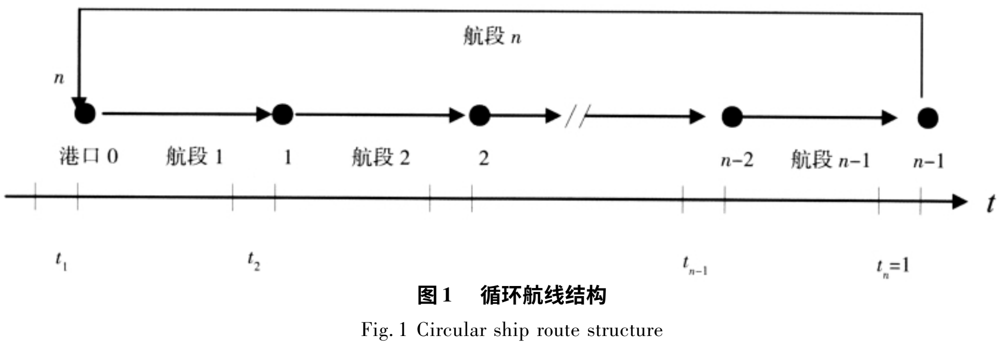

图 1　循环航线结构

Fig. 1 Circular ship route structure

集装箱班轮公司的目标是制定在决策期间 T 内销售所有集装箱舱位的策略以便最大化期望总收益. 策略包括为每个开放的预订等级制定合适的价格以及何时关闭这些开放的预订等级. 其它符号设定如下.

$C_{V,t}$—— 班轮拥有的从港口 $i-1$ 到港口 i 的最大容量, $i=0,1,2,\cdots,n$.

$C_{W,t}$—— 班轮拥有的从港口 $i-1$ 到港口 i 的最大载重量, $i=0,1,2,\cdots,n$.

$c_{V,t}$—— 当一个决策期开始时, 班轮从港口 $i-1$ 到港口 i 可获得的容量.

$c_{W,t}$—— 当一个决策期开始时, 班轮从港口 $i-1$ 到港口 i 可获得的载重量.

$\boldsymbol{c}_V$—— 表示当一个决策期开始时, 所有航段可获得的容量, $\boldsymbol{c}_V=(c_{V,1},c_{V,2},\cdots,c_{V,n})^T$.

$\boldsymbol{c}_W$—— 表示当一个决策期开始时, 所有航段可获得的载重量, $\boldsymbol{c}_W=(c_{W,1},c_{W,2},\cdots,c_{W,n})^T$.

$q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V)$ —— 在一个决策期初起讫港口对 (i,j) 可获得的容量, $q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V)=\min\{c_{V,i+1},c_{V,i+2},\cdots,c_{V,j}\}$.

$q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W)$ —— 在一个决策期初起讫港口对 (i,j) 可获得的容量, $q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W)=\min\{c_{W,i+1},c_{W,i+2},\cdots,c_{W,j}\}$.

$\lambda_{tk}^{(ijm)}$—— 一个起讫港口对 (i,j)、箱型为 m、等级为 k 的预订请求在时期 t 到达的概率, $m=1,2$.

λ_{t0}—— 在时期 t 没有任何集装箱货物运输预订请求到达的概率.

K_{ijm}—— 起讫港口对 (i,j)、箱型 m 包含的货物等级;

$l_k^{(ijm)}$ —— 一个起讫港口对 (i,j)、箱型为 m、等级为 k 的重箱的单位运输成本, 特别是在国际原油价格高涨的时期, 增量成本对集装箱运输业收益管理的影响变得更加重要;

$e_k^{(ijm)}$ —— 一个起讫港口对 (i,j)、上箱型为 m、等级为 k 的空箱的单位运输成本;

$\beta_k^{(ijm)}$ —— 集装箱货流不平衡因子, $\beta_k^{(ijm)}=\begin{cases}\dfrac{f_k^{(ijm)}-f_k^{(jim)}}{f_k^{(ijm)}}, & \text{若 } f_k^{(ijm)}>f_k^{(jim)}\\ 0, & \text{若 } f_k^{(ijm)}\leqslant f_k^{(jim)}\end{cases}$, 其中 $f_k^{(ijm)}$ 表示某段时期一个起讫港口对 (i,j)、箱型为 m、等级为 k 的重箱的平均流量.

集装箱一般有两种不同尺寸的箱型, 即 20 英尺箱和 40 英尺箱, 分别记为箱型 1 和箱型 2, 其容量分别为 $V_1=1\text{TEU}$(标准箱) 和 $V_2=2\text{TEU}$, 载货重量为 W_1 和 W_2, 由于一般 20 英尺箱载重货, 而 40 英尺箱载轻货, 根据实际调查得知, 虽然两种箱型容积不同, 但重量几乎相等, 所以设 $W_1=W_2=1$ 单位(以载货后的 20 英尺干货箱的重量为 1 个重量单位), 起讫港口对 (i,j) 箱型 1 和箱型 2 各包含 K_{ij1} 和 K_{ij2} 个不同的货物等级, 比如 20 英尺箱包括 20 英尺干货箱和 20 英尺冷藏箱, 40 英尺箱包括 40 英尺干货箱和 40 英尺冷藏箱.

从模型定义可知, 当 $t<t_{i+1}$ 时, $\lambda_{tk}^{(ijm)}=0$, 当 $t\geqslant t_{i+1}$ 时, $\lambda_{tk}^{(ijm)}\geqslant 0$, 且 $\lambda_{t0}+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{k_m}\lambda_{tk}^{(ijm)}=1$, $\forall t=1,2,\cdots,T$; 另外, 一般而言, 不存在从港口 0 出发再回到港口 0 的货运需求, 即 $\lambda_{tk}^{(0nm)}=0$.

若制定的价格高于或等于 $p_{k,\text{null}}^{(ijm)}$, 所有的顾客将不会订舱, 称其为关闭价格(null price), 并且满足 $p_{k,\text{null}}^{(ijm)}>l_k^{(ijm)}+\beta_k^{(ijm)}e_k^{(ijm)}$. 对于一个起讫港口对 (i,j)、上箱型为 m 的等级 k, 假设集装箱班轮公司预先说明价格点的集合 $P_k^{(ijm)}$, 称为可行价格集. 每个集合里的最高价格为 $p_{k,\text{null}}^{(ijm)}$. 无效价格 $p_{k,\text{null}}^{(ijm)}$ 可用来设定拒绝预订请求的条件, 即, 设定价格为 $p_{k,\text{null}}^{(ijm)}$ 等价于拒绝任何一个请求起讫港口对 (i,j)、上箱型为 m 的等级 k 的顾客, 也就是关闭起讫港口对 (i,j)、上箱型为 m 的等级 k. $p_{k,\text{null}}^{(ijm)}$ 也可以是存在政府价格管制的情况下的价格上限, 一旦集装箱班轮公司把价格设定为该水平, 那么就无法取得任何收益; 或者是, 网上价格应低于其他渠道的价格, 因此 $p_{k,\text{null}}^{(ijm)}$ 此时也是在线价格的上限. 这两种情况可统称为价格限制. 每个顾客心中都有订舱的认知价值, 只有集装箱舱位出售价格不大于顾客对货运服务的认知价值的情况下顾客才会订购舱位. 假设顾客认知价值的分布为 $F_k^{(ijm)}(x)$, 那么在舱位出售价格为 p 的情况下, $F_k^{(ijm)}(p)$ 表示顾客的认知价值小于舱位出售价格的概率, 这时顾客将不会订舱; 当顾客的认知价值大于舱位出售价格时, 顾客才会订舱, 即顾客会订购舱位的概率 $\theta_k^{(ijm)}(p)=1-F_k^{(ijm)}(p)$.

1.2　模型

借鉴 You[9] 的建模方式,并根据集装箱运输行业实际情况拓展为二维模型,有

$$
\begin{aligned}
u_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W,p) &= \theta_k^{(ijm)}(p)\,[p - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)} + g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V - \boldsymbol{V}_{ijm},\boldsymbol{c}_W - \boldsymbol{W}_{ijm})] + (1 - \theta_k^{(ijm)}(p))\,g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W) \\
&= g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W) + \theta_k^{(ijm)}(p)\{p - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)} - [g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W) - g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V - \boldsymbol{V}_{ijm},\boldsymbol{c}_W - \boldsymbol{W}_{ijm})]\} \\
& t \geqslant 1
\end{aligned}
\quad (1)
$$

上述公式中: $u_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W,p)$ 表示若起讫港口对(i,j)、箱型为 m、等级为 k 的货运服务的价格设定为 $p \in P_k^{(ijm)}$,当一个这样的预订请求在时期 t 到达时,给定剩余容量 $\boldsymbol{c}_V$ 和剩余重量 $\boldsymbol{c}_W$ 的最大期望收益; $g_t(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$ 表示给定剩余容量为 $\boldsymbol{c}_V$、剩余重量为 c_W 和剩余决策期数为 t 时的最大期望收益. 在式(1)中,若设定价格 $p = p_{k,\mathrm{null}}^{(ijm)}$, $u_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W,p) = g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$,这意味着拒绝该请求. 若设定价格 $p < p_{k,\mathrm{null}}^{(ijm)}$,则当顾客愿意购买(概率为 $\theta_k^{(ijm)}(p)$)时,期望收益为 $p - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)} + g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V - V_{ijm},\boldsymbol{c}_W - W_{ijm})$;而当顾客不愿意购买(概率为 $1 - \theta_k^{(ijm)}(p)$)时,期望收益为 $g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$.

其中

$$
\boldsymbol{V}_{0jm} = \underset{1\ \ 2\ \ \cdots\ \ j\ \ j+1\ \ \cdots\ \ n}{(V_m,V_m,\cdots,V_m,0,\cdots,0)},
$$

$$
\boldsymbol{V}_{ijm} = \underset{1\ \ 2\ \ \cdots\ \ i\ \ i+1\ \ \cdots\ \ j\ \ j+1\ \ \cdots\ \ n}{(0,0,\cdots,0,V_m,\cdots,V_m,0,\cdots,0)},\ i \geqslant 1,
$$

$$
\boldsymbol{c}_V - \boldsymbol{V}_{ijm} = (c_{V,1},\cdots,c_{V,i},c_{V,i+1} - V_m,\cdots,c_{V,j} - V_m,c_{V,j+1},\cdots,c_{V,n})
$$

$$
\boldsymbol{W}_{0jm} = \underset{1\ \ 2\ \ \cdots\ \ j\ \ j+1\ \ \cdots\ \ n}{(W_m,W_m,\cdots,W_m,0,\cdots,0)},
$$

$$
\boldsymbol{W}_{ijm} = \underset{1\ \ 2\ \ \cdots\ \ j\ \ j+1\ \ \cdots\ \ j\ \ j+1\ \ \cdots\ \ n}{(0,0,\cdots,0,W_m,\cdots,W_m,0,\cdots,0)},\ i \geqslant 1
$$

$$
\boldsymbol{c}_W - \boldsymbol{W}_{ijm} = (c_{W,1},\cdots,c_{W,i},c_{W,i+1} - W_m,\cdots,c_{W,j} - W_m,c_{W,j+1},\cdots,c_{W,n})
$$

建立动态规划方程

$$
q_t(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W) = \lambda_{t0} g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W) + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ijm}} \lambda_{tk}^{(ijm)}\{g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)\max[I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) < V_m),I(q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W) < \boldsymbol{W}_m)] + \max_{p \in P_k^{(ijm)}} u_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W,p)\,I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) \geqslant V_m,q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W) \geqslant \boldsymbol{W}_m)\},\quad t \geqslant 1 \quad (2)
$$

式中, $I(\cdot)$ 是指示因子,如果声明 S 是真的,那么 $I(S) = 1$,否则 $I(S) = 0$. $\max\{I(S_1),I(S_2)\}$ 表示取 $I(S_1)$ 和 $I(S_2)$ 二者中的大值,可能取值为 0 或 1.

显然, $g_0(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W) = 0$. 如果时期 t 没有顾客到达(其概率为 λ_{t0}),期望收益为 $g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$. 如果有一个起讫港口对$(i,j)$、箱型 m、等级 k 的预订请求到达(其概率为 $\lambda_{tk}^{(ijm)}$),此时,需要考虑两种情况: 1) 起讫港口对(i,j)可获得的容量小于 V_m(箱型 m 的容量)或者可获得的重量小于 W_m(箱型 m 的重量),即 $q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) < \boldsymbol{V}_m$ 或 $q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W) < W_m$. 此时由于剩余的容量和重量不能满足该请求,预订请求将被拒绝,那么期望收益就是 $g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$. 2) 起讫港口对$(i,j)$可获得的容量不小于 V_m 而且可获得的重量不小于 W_m,即 $q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) \geqslant \boldsymbol{V}_m$ 且 $q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W) \geqslant \boldsymbol{W}_m$,此时,期望收益由 $u_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W,p)$ 取最大值给出.

定义,当

$$
q_V^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V) \geqslant \boldsymbol{V}_m,\ q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W) \geqslant \boldsymbol{W}_m,
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_t^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W) &= g_t(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W) - g_t(\boldsymbol{c}_V - \boldsymbol{V}_{ijm},\boldsymbol{c}_W - \boldsymbol{W}_{ijm}) \\
& t \geqslant 0
\end{aligned}
\quad (3)
$$

则

$$
\begin{aligned}
\max_{p \in P_k^{(ijm)}} u_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W,p) &= g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W) + \max_{p \in P_k^{(ijm)}} \theta_k^{(ijm)}(p)\,[p - \varphi_{t-1}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W) - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)}] \\
& t \geqslant 1
\end{aligned}
\quad (4)
$$

因此,最优在线动态定价策略如下.

最优价格(用 $p_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$ 表示)由最大化 $\theta_k^{(ijm)}(p)(p - \varphi_{t-1}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W) - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)})$ 得到. 并且, $p_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$ 取决于 $\varphi_{t-1}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W) + l_k^{(ijm)} + \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)}$ 的大小,即最优价格应考虑预订请求将会造成的未来收益的期望减少值、重箱运输成本和空箱调运成本.

定义函数 $f_k^{(ijm)}(b) = \max_{p \in P_k^{(ijm)}} \theta_k^{(ijm)}(p)(p - b)$, b 为任意实数,并且用 $p_k^{(ijm)}(b)$ 表示取得同一函数

值的最小的 p. 那么,由 $p_{tk}^{(ijm)}(b)$ 与 b 的关系可推导出 $p_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$ 与 $\delta_{t-1}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)+l_k^{(ijm)}+\beta_k^{(ijm)}e_k^{(ijm)}$ 的关系.

引理 1 1) 对于任意的 b,$f_k^{(ijm)}(b)\geqslant 0$; 2) $f_k^{(ijm)}(b)$ 对 b、$\varphi_{t-1}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$、$l_k^{(ijm)}$、$\beta_k^{(ijm)}$ 和 $e_k^{(ijm)}$ 非递增; 3) $f_k^{(ijm)}(b)+b$ 对 b、$\varphi_{t-1}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$、$l_k^{(ijm)}$、$\beta_k^{(ijm)}$ 和 $e_k^{(ijm)}$ 是非递减的,并且如果 $b_1\leqslant b_2$,则 $f_k^{(ijm)}(b_1)-f_k^{(ijm)}(b_2)\leqslant b_2-b_1$; 4) $p_k^{(ijm)}(b)$ 对 b、$\varphi_{t-1}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$、$l_k^{(ijm)}$、$\beta_k^{(ijm)}$ 和 $e_k^{(ijm)}$ 非递减.

引理 1 说明了各箱型未来期望机会收益、重箱运输成本、集装箱货流不平衡因子以及空箱运输成本对最优价格的影响.

对于模型(2),在以下几种情况可以得到临界预订容量或临界决策期.

1.2.1 单航段单箱型

当航线只有 1 个航段而且只有 1 种箱型的货物运输需求(不失一般性,假设为 20 英尺箱,为简化符号,去掉箱型符号)时,预订策略可以由一组临界值完全给出. 由式(2)和式(3)可得

$$g_t(c_{V,1},c_{W,1}) = g_{t-1}(c_{V,1},c_{W,1}) + \sum_{k=1}^{K_{01}}\{\lambda_{tk}^{(01)}f_k^{(01)}[\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})+l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)}]\}I(c_{V,1}\geqslant 1,c_{W,1}\geqslant 1) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\varphi_t^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1}) = {}& \varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1}) + \sum_{k=1}^{K_{01}}\{\lambda_{tk}^{(01)}[f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})+l_k^{(01)}+\\ &\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})I(c_{V,1}\geqslant 1,c_{W,1}\geqslant 1)-\\ &f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1,c_{W,1}-1)+l_k^{(01)}+\\ &\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})I(c_{V,1}\geqslant 2,c_{W,1}\geqslant 2)]\}\\ &t\geqslant 1\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$g_1(c_{V,1},c_{W,1}) = \sum_{k=1}^{K_{01}}[\lambda_{tk}^{(01)}f_k^{(01)}(l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})]I(c_{V,1}\geqslant 1,c_{W,1}\geqslant 1) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1}) = {}& \sum_{k=1}^{K_{01}}\{\lambda_{tk}^{(01)}[f_k^{(01)}(l_k^{(01)}+\\ &\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})I(c_{V,1}\geqslant 1,c_{W,1}\geqslant 1)-\\ &f_k^{(01)}(l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})\times\\ &I(c_{V,1}\geqslant 2,c_{W,1}\geqslant 2)]\}\end{aligned} \tag{8}$$

定理 1 1) 所有的 t 和 $c_{W,1}$,$\varphi_t^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})$ 对 $c_{V,1}$ 非递增; 2) 所有的 t 和 $c_{V,1}$,$\varphi_t^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})$ 对 $c_{W,1}$ 非递增; 3) 所有的 t 和 $c_{W,1}$,$p_{tk}^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})$ 对 $c_{V,1}$ 非递增; 4) 所有的 t 和 $c_{V,1}$,$p_{tk}^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})$ 对 $c_{W,1}$ 非递增; 5) 所有的 $c_{V,1}$ 和 $c_{W,1}$,$\varphi_t^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})$ 对 t 非递减; 6) 所有的 $c_{V,1}$ 和 $c_{W,1}$,$p_{tk}^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})$ 对 t 非递减.

定理 1 表明: 1) 对于任一决策期和剩余载重量的组合$(t,c_{W,1})$,存在一组临界预订容量$\{c_{V,1}^{(tk)}\}$,使得当 $c_{V,1}\geqslant c_{V,1}^{(tk)}$ 时,接受等级 k 的预订请求,当 $c_{V,1}<c_{V,1}^{(tk)}$ 时,拒绝等级 k 的预订请求; 2) 对于任一决策期和剩余容量的组合$(t,c_{V,1})$,存在一组临界预订容量$\{c_{W,1}^{(tk)}\}$,使得当 $c_{W,1}\geqslant c_{W,1}^{(tk)}$ 时,接受等级 k 的预订请求,当 $c_{W,1}<c_{W,1}^{(tk)}$ 时,拒绝等级 k 的预订请求; 3) 对于任一给定的$(c_{V,1},c_{W,1})$,存在一组临界决策期$\{t_k(c_{V,1},c_{W,1})\}$,使得当 $t\leqslant t_k(c_{V,1},c_{W,1})$ 时,接受等级 k 的预订请求,当 $t>t_k(c_{V,1},c_{W,1})$ 时,拒绝等级 k 的预订请求.

1.2.2 两航段单箱型

航线结构如图 2 所示.

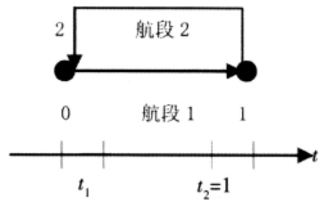

图 2 两航段的循环航线

Fig. 2 The circular ship route with two segments

显然,一般而言,从港口 0 出发再回到港口 0 的货运需求为零,因此对于所有的 t 和 k,$\lambda_{tk}^{(02)}=0$. 此时有两种解决方案:

1) 把起讫港口对(0,1)和(1,2)一起考虑,沿用模型(2),但令其中的 $\lambda_{tk}^{(02)}=0$.

2) 把航段 1 和航段 2 看作是相对独立的,因此,该两航段的决策问题等价于两个独立的单航段决策问题,不同的是,起讫港口对(0,1)的决策期间为 $T-t_1$,而起讫港口对(1,2)的决策期间为 T. 因此,同样可以运用定理 1 得到一组临界预订容量或临界决策期.

实际上,两种解决方案是等价的.

2　模型求解

最优策略要求存储所有的 $g_t(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$ 的值或每个状态对 $((\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W),t)$ 对应的决策(对于每个状态对,每种产品的最优价格是多少). 然而,当决策期、起讫港口对、箱型或货物等级的数量大大增加时,将极大地提高对计算机内存的要求. Amaruchkul 等[24] 在研究单航段航空货运能力分配问题时应用了分解降维的思想. 鉴于最优策略的复杂性,本文通过分解降维的方法提出一种启发式算法,使得实际应用时计算上更可行.

2.1　模型上界

令

$$\boldsymbol{c}_W' = (c_{W,1},c_{W,2},\cdots,c_{W,s-1},c_{W,s+1},\cdots,c_{W,n})^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{c}_V' = (c_{V,1},c_{V,2},\cdots,c_{V,s-1},c_{V,s+1},\cdots,c_{V,n})^{\mathrm{T}}$$

定理 2　对于 $s=1,2,\cdots,n$,有:

1) 当给定 $\boldsymbol{c}_V$ 和 $\boldsymbol{c}_W$ 时,$g_t(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$ 对 t 非递减;

2) 当给定 t、$\boldsymbol{c}_V$ 和 $\boldsymbol{c}_W'$ 时,$g_t(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$ 对 $c_{W,s}$ 非递减;

3) 当给定 t、$\boldsymbol{c}_W$ 和 $\boldsymbol{c}_V'$ 时,$g_k(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$ 对 $c_{V,s}$ 非递减.

$t\geqslant 1$ 时,令

$$\begin{aligned}U_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,p) &= \theta_k^{(ijm)}(p)[p-l_k^{(ijm)}-\beta_k^{(ijm)}e_k^{(ijm)}+G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V-\boldsymbol{V}_{ijm})]+(1-\theta_k^{(ijm)}(p))G_{t-i}(\boldsymbol{c}_V)\\ &= G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V)+\theta_k^{(ijm)}(p)(p-l_k^{(ijm)}-\beta_k^{(ijm)}e_k^{(ijm)}-(G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V)-G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V-\boldsymbol{V}_{ijm})))\end{aligned} \tag{9}$$

$$G_t(\boldsymbol{c}_V) = \lambda_{t0}G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V)+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ijm}}\lambda_{tk}^{(ijm)}\times\{G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V)I[q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V)<\boldsymbol{V}_m]+\max_{p\in P_k^{(ijm)}}U_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,p)I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V)\geqslant \boldsymbol{V}_m)\} \tag{10}$$

其中: $U_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,p)$ 表示若起讫港口对 (i,j)、箱型 m、等级 k 的货运服务的价格设定为 $p\in P_k^{(ijm)}$,当这样的预订请求在时期 t 到达时,给定剩余容量 $\boldsymbol{c}_V$ 的最大期望收益; $G_t(\boldsymbol{c}_V)$ 表示给定剩余容量为 $\boldsymbol{c}_V$ 和剩余决策期数为 t 时的最大期望收益. 在式(9)中,若设定价格 $p=p_{k,\mathrm{null}}^{(ijm)}$,$U_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,p)=G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V)$,这意味着拒绝该请求. 若设定价格 $p<p_{k,\mathrm{null}}^{(ijm)}$,则当顾客愿意购买(概率为 $\theta_k^{(ijm)}(p)$)时,期望收益为 $p-l_k^{(ijm)}-\beta_k^{(ijm)}e_k^{(ijm)}+G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V-\boldsymbol{V}_{ijm})$;而当顾客不愿意购买(概率为 $1-\theta_k^{(ijm)}(p)$)时,期望收益为 $G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V)$.

类似地,$t\geqslant 1$ 时,令

$$\begin{aligned}U_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_W,p) &= \theta_k^{(ijm)}(p)(p-l_k^{(ijm)}-\beta_k^{(ijm)}e_k^{(ijm)}+G_{t-1}(\boldsymbol{c}_W-\boldsymbol{W}_{ijm}))+(1-\theta_k^{(ijm)}(p))G_{t-i}(\boldsymbol{c}_W)\\ &= G_{t-1}(\boldsymbol{c}_W)+\theta_k^{(ijm)}(p)\{p-l_k^{(ijm)}-\beta_k^{(ijm)}e_k^{(ijm)}-[G_{t-1}(\boldsymbol{c}_W)-G_{t-1}(\boldsymbol{c}_W-\boldsymbol{V}_{ijm})]\}\end{aligned} \tag{11}$$

$$G_t(\boldsymbol{c}_W) = \lambda_{t0}G_{t-1}(\boldsymbol{c}_W)+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ijm}}\lambda_{tk}^{(ijm)}\times[G_{t-1}(\boldsymbol{c}_W)I(q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W)<\boldsymbol{W}_m)+\max_{p\in P_k^{(ijm)}}U_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_W,p)I(q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W)\geqslant W_m)] \tag{12}$$

其中: $U_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_W,p)$ 表示若起讫港口对 (i,j)、箱型 m、等级 k 的货运服务的价格设定为 $p\in P_k^{(ijm)}$,当这样的预订请求在时期 t 到达时,给定剩余重量 $\boldsymbol{c}_W$ 的最大期望收益; $G_t(\boldsymbol{c}_W)$ 表示给定剩余重量 $\boldsymbol{c}_W$ 和剩余决策期数为 t 时的最大期望收益. 在式(11)中,若设定价格 $p=p_{k,\mathrm{null}}^{(ijm)}$,$U_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_W,p)=G_{t-1}(\boldsymbol{c}_W)$,这意味着拒绝该请求. 若设定价格 $p<P_{k,\mathrm{null}}^{(ijm)}$,则当顾客愿意购买(概率为 $\theta_k^{(ijm)}(p)$)时,期望收益为 $p-l_k^{(ijm)}-\beta_k^{(ijm)}e_k^{(ijm)}+G_{t-1}(\boldsymbol{c}_W-\boldsymbol{W}_{ijm})$; 而当顾客不愿意购买(概率为 $1-\theta_k^{(ijm)}(p)$)时,期望收益为 $G_{t-1}(\boldsymbol{c}_W)$.

另外,定义

$$U_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W,p) = \min(G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V),G_{t-1}(\boldsymbol{c}_W))+\theta_k^{(ijm)}(p)\{p-l_k^{(ijm)}-\beta_k^{(ijm)}e_k^{(ijm)}-[\min(G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V),G_{t-1}(\boldsymbol{c}_W))-\min(G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V-\boldsymbol{V}_{ijm}),G_{t-1}(\boldsymbol{c}_W-\boldsymbol{W}_{ijm}))]\} \tag{13}$$

定理 3　1) $g_t(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)\leqslant G_t(\boldsymbol{c}_V)$,$t\geqslant 1$;

2) $g_t(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)\leqslant G_t(\boldsymbol{c}_W)$,$t\geqslant 1$;

3) $g_t(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)\leqslant \min\{G_t(\boldsymbol{c}_V),G_t(\boldsymbol{c}_W)\}$;

4) $u_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W,p)\leqslant U_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W,p)$.

定理 3 中: 1) 表明,$G_t(\boldsymbol{c}_V)$ 是 $g_t(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$ 的一个上界; 2) 表明,$G_t(\boldsymbol{c}_W)$ 也是 $g_t(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$ 的一个上界; 3) 表明 $\min\{G_t(\boldsymbol{c}_V),G_t(\boldsymbol{c}_W)\}$ 也是 $g_t(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$ 的一个上界,并且是比 $G_t(\boldsymbol{c}_V)$ 和 $g_t(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$ 更好的上界; 4) 表明 $U_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W,p)$ 是 $u_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,$

$c_W,p)$ 的一个上界.

2.2 启发式算法

在上文模型中,用上界 $\min\{G_t(c_V),G_t(c_W)\}$ 代替 $g_t(c_V,c_W)$,可得到模型求解的启发式算法

$$\begin{aligned}\min\{G_t(c_V),G_t(c_W)\} = &\min\{G_{t-1}(c_V),G_{t-1}(c_W)\} + \\ &\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ijm}}\lambda_{tk}^{(ijm)}\max_{p\in P_k^{(ijm)}}\theta_k^{(ijm)}(p)\ [p - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)}e_k^{(ijm)} - \\ &(\min\{G_{t-1}(c_V),G_{t-1}(c_W)\} - \min\{G_{t-1}(c_V - V_{ijm}),G_{t-1}(c_W - W_{ijm})\})]\times \\ &I(q_V^{(ij)}(c_V)\geqslant V_m,q_W^{(ij)}(c_W)\geqslant W_m) \\ &\forall t = 1,2,\cdots,T\end{aligned}\tag{14}$$

由于一般 20 英尺箱载重货,而 40 英尺箱载轻货,从经验调查知虽然两种箱型容积不同,但重量近似相等,所以设 $W_1 = W_2 = 1$(以载货后的 20 英尺干货箱的重量为 1 个重量单位),连同 $V_1 = 1$,$V_2 = 2$,代入式(14),得到

$$\begin{aligned}\min\{G_t(c_V),G_t(c_W)\} = &\min\{G_{t-1}(c_V),G_{t-1}(c_W)\} + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ij1}}\lambda_{tk}^{(ij1)}\max_{p\in P_k^{(ijm)}}\theta_k^{(ij1)}(p)\times \\ &(p - l_k^{(ij1)} - \beta_k^{(ij1)}e_k^{(ij1)} - [\min\{G_{t-1}(c_V),G_{t-1}(c_W)\} - \\ &\min\{G_{t-1}(c_V - V_{ij1}),G_{t-1}(c_W - W_{ij1})\}])I(q_V^{(ij)}(c_V)\geqslant 1,q_W^{(ij)}(c_W)\geqslant 1) + \\ &\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ij2}}\lambda_{tk}^{(ij2)}\max_{p\in P_k^{(ijm)}}\theta_k^{(ij2)}(p)(p - l_k^{(ij2)} - \beta_k^{(ij2)}e_k^{(ij2)} - \\ &[\min\{G_{t-1}(c_V),G_{t-1}(c_W)\} - \min\{G_{t-1}(c_V - V_{ij2}),G_{t-1}(c_W - W_{ij2})\}\times \\ &I(q_V^{(ij)}(c_V)\geqslant 2,q_W^{(ij)}(c_W)\geqslant 2) \qquad \forall t = 1,2,\cdots,T\end{aligned}\tag{15}$$

其中

$$V_{0j1} = (\underset{1}{1},\underset{2}{1},\underset{\cdots}{\cdots},\underset{j}{1},\underset{j+1}{0},\underset{\cdots}{\cdots},\underset{n}{0}),$$

$$V_{ij1} = (\underset{1}{0},\underset{2}{0},\underset{\cdots}{\cdots},\underset{i}{0},\underset{i+1}{1},\underset{\cdots}{\cdots},\underset{j}{1},\underset{j+1}{0},\underset{\cdots}{\cdots},\underset{n}{0}),i\geqslant 1,$$

$$V_{0j2} = (\underset{1}{2},\underset{2}{2},\underset{\cdots}{\cdots},\underset{j}{2},\underset{j+1}{0},\underset{\cdots}{\cdots},\underset{n}{0}) = 2V_{0j1},$$

$$V_{ij2} = (\underset{1}{0},\underset{2}{0},\underset{\cdots}{\cdots},\underset{i}{0},\underset{i+1}{2},\underset{\cdots}{\cdots},\underset{j}{2},\underset{j+1}{0},\underset{\cdots}{\cdots},\underset{n}{0}) = 2V_{ij1},i\geqslant 1,$$

$$W_{0jm} = (\underset{1}{1},\underset{2}{1},\underset{\cdots}{\cdots},\underset{j}{1},\underset{j+1}{0},\underset{\cdots}{\cdots},\underset{n}{0}),$$

$$W_{ijm} = (\underset{1}{0},\underset{2}{0},\underset{\cdots}{\cdots},\underset{i}{0},\underset{i+1}{1},\underset{\cdots}{\cdots},\underset{j}{1},\underset{j+1}{0},\underset{\cdots}{\cdots},\underset{n}{0}),i\geqslant 1,$$

当 $q_V^{(ij)}(c_V)\geqslant V_m,q_W^{(ij)}(c_W)\geqslant W_m,t\geqslant 0$ 时,定义

$$\begin{aligned}\delta_t^{(ijm)}(c_V,c_W) = &\min\{G_t(c_V),G_t(c_W)\} - \\ &\min\{G_t(c_V - V_{ijm}),G_t(c_W - W_{ijm})\}\end{aligned}\tag{16}$$

$t\geqslant 1$ 时,用上界 $U_{tk}^{(ijm)}(c_V,c_W,p)$ 代替 $u_{tk}^{(ijm)}(c_V,c_W,p)$,则

$$\begin{aligned}&\max_{p\in P_k^{(ijm)}}U_{tk}^{(ijm)}(c_V,c_W,p) = \\ &\min\{G_{t-1}(c_V),G_{t-1}(c_W)\} + \max_{p\in P_k^{(ijm)}}\theta_k^{(ijm)}(p)\times \\ &[p - \delta_{t-1}^{(ijm)}(c_V,c_W) - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)}e_k^{(ijm)}]\end{aligned}\tag{17}$$

因此,在线动态定价启发式策略如下.

启发式算法的最佳价格用 $p_{tk,h}^{(ijm)}(c_V,c_W)$ 表示(下标 h 表示启发式算法(heuristics),后面简称为启发价格),由最大化 $\theta_k^{(ijm)}(p)\ [p - \delta_{t-1}^{(ijm)}(c_V,c_W) - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)}e_k^{(ijm)}]$ 得到. 此时 $p_{tk,h}^{(ijm)}(c_V,c_W)$ 取决于 $\delta_{t-1}^{(ijm)}(c_V,c_W) - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)}e_k^{(ijm)}$ 的大小.

而且式(14)可重新表达为

$$\begin{aligned}\min\{G_t(c_V),G_t(c_W)\} = &\min\{G_{t-1}(c_V),G_{t-1}(c_W)\} + \\ &\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ijm}}\lambda_{tk}^{(ijm)}f_k^{(ijm)}\ [\delta_{t-1}^{(ijm)}(c_V,c_W) + l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)}e_k^{(ijm)}]\times \\ &I(q_V^{(ij)}(c_V)\geqslant V_m,q_W^{(ij)}(c_W)\geqslant W_m) \qquad \forall t = 1,2,\cdots,T\end{aligned}\tag{18}$$

对于 $q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) \geqslant V_m$ 且 $q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W) \geqslant W_m$，$\delta_0^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W) = 0$，所以有

$$\min\{G_1(\boldsymbol{c}_V), G_1(\boldsymbol{c}_W)\} = \sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{(n-1)n,m}} \lambda_{1k}^{(n-1)n,m} f_k^{(n-1)nm}(l_k^{(n-1)n,m} + \beta_k^{(n-1)n,m} e_k^{(n-1)n,m}) \times I[q_v^{(n-1)n}(\boldsymbol{c}_V) \geqslant v_m, q_w^{(n-1)n}(\boldsymbol{c}_W) \geqslant W_m] \quad (19)$$

3　算例

3.1　单航段单箱型

假设目前最大容量为 50TEU，最大载重量为 45 个单位，有 4 个预订等级，其中，20 英尺干货箱和 20 英尺冷藏箱各包含两个货物等级，决策期总数 $T = 50$，其它相关参数 $\lambda_{tk}^{(01)}$、$\theta_k^{(01)}(p)$、$l_k^{(01)}$、$e_k^{(01)}$ 和 $\beta_k^{(01)}$ 见表 1、表 2 和表 3.

表 1　各等级的预订请求到达概率(单航段单箱型)

Table 1 Arriving probability of every class (one segment and one container type)

到达	决策期				
	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50
$\lambda_{t1}^{(01)}$	0.10	0.08	0.12	0.04	0.12
$\lambda_{t2}^{(01)}$	0.08	0.09	0.07	0.11	0.14
$\lambda_{t3}^{(01)}$	0.09	0.07	0.04	0.05	0.05
$\lambda_{t4}^{(01)}$	0.07	0.13	0.13	0.06	0.15

表 2　可行价格集和顾客购买概率(单航段单箱型)

Table 2 Allowable price set and customer purchasing probabilities (one segment and one container type)

$P_1^{(01)}$	$\theta_1^{(01)}(p)$	$P_2^{(01)}$	$\theta_2^{(01)}(p)$	$P_3^{(01)}$	$\theta_3^{(01)}(p)$	$P_4^{(01)}$	$\theta_4^{(01)}(p)$
200	0.95	340	0.85	470	0.90	620	0.88
230	0.90	380	0.80	500	0.85	650	0.83
270	0.85	400	0.75	540	0.80	670	0.78
300	0.80	430	0.70	570	0.75	700	0.70
330	0.00	460	0.00	600	0.00	730	0.00

表 3　重箱运输成本、空箱调运成本和集装箱货流不平衡因子(单航段单箱型)

Table 3 Loaded container transport cost, empty container transport cost and container cargo flow imbalance factor(one segment and one container type)

$l_1^{(01)}$	$l_2^{(01)}$	$l_3^{(01)}$	$l_4^{(01)}$	$e_1^{(01)}$	$e_2^{(01)}$	$e_3^{(01)}$	$e_4^{(01)}$	$\beta_1^{(01)}$	$\beta_2^{(01)}$	$\beta_3^{(01)}$	$\beta_4^{(01)}$
40	40	75	75	20	20	20	20	0.5	0.5	0.25	0.25

通过数学计算软件 Matlab7.0 编程求解，结果表明，对于每一个预订等级，最优价格具有单调性，对剩余容量和剩余载重量都是非递增的，对剩余时间是非递减的. 这与定理 1 是一致的.

以 $t = 30$，$c_{V,1} = 35$ 为例，作出最优价格与剩余载重量的关系图，如图3. 以 $t = 30$，$c_{W,1} = 35$ 为例，作出最优价格与剩余容量的关系图，如图 4. 以 $c_{V,1} = 15$，$c_{W,1} = 6$ 为例，作出最优价格与剩余时间的关系图，如图 5.

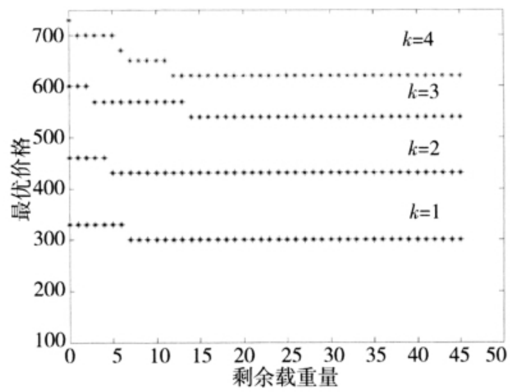

图 3　最优价格与剩余载重量的关系(单航段单箱型多等级)

Fig. 3 The relationship between optimal price and remaining dead weight capacity(one segment, one container type and multiple classes)

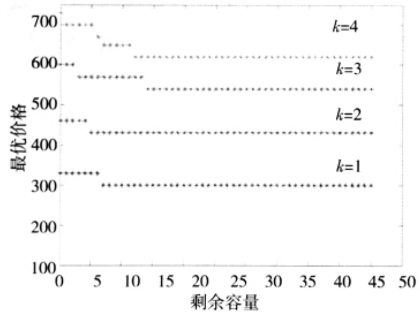

图 4 最优价格与剩余容量的关系(单航段单箱型多等级)

Fig. 4 The relationship between optimal price and remaining volume capacity (one segment, one container type and multiple classes)

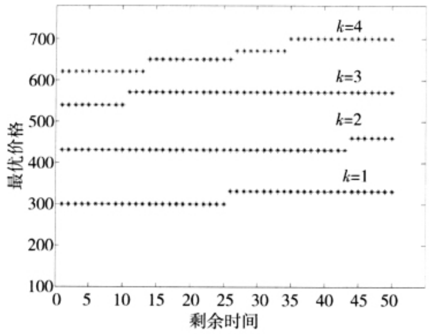

图 5 最优价格与剩余时间的关系(单航段单箱型多等级)

Fig. 5 The relationship between optimal price and remaining time (one segment, one container type and multiple classes)

3.2 单航段多箱型

假设目前最大容量为 25TEU，最大载重量为 20 个单位，有两种不同尺寸的箱型的货运需求，分别为 20 英尺箱和 40 英尺箱，其中 20 英尺箱包括 20 英尺干货箱和 20 英尺冷藏箱两个等级，40 英尺箱包括 40 英尺干货箱和 40 英尺冷藏箱两个等级，决策期总数 $T=50$. 其它相关参数 $\lambda_{tk}^{(01m)}$、$\theta_k^{(01m)}(p)$、$l_k^{(01m)}$、$e_k^{(01m)}$ 和 $\beta_k^{(01m)}$ 见表 4、表 5 和表 6.

表 4 每种箱型各个等级的预订请求到达概率(单航段多箱型)

Table 4 Arriving probability of every class of each container type (one segment and multiple container types)

到达概率	决策期				
	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50
$\lambda_{t1}^{(011)}$	0.10	0.08	0.12	0.04	0.12
$\lambda_{t2}^{(011)}$	0.08	0.09	0.07	0.11	0.14
$\lambda_{t3}^{(011)}$	0.09	0.07	0.04	0.05	0.05
$\lambda_{t4}^{(011)}$	0.07	0.13	0.13	0.06	0.15

表 5 可行价格集和顾客购买概率(单航段多箱型)

Table 5 Allowable price set and customer purchasing probabilities (one segment and multiple container types)

$P_1^{(011)}$	$\theta_1^{(011)}(p)$	$P_2^{(011)}$	$\theta_2^{(011)}(p)$	$P_3^{(011)}$	$\theta_3^{(011)}(p)$	$P_4^{(011)}$	$\theta_4^{(011)}(p)$
200	0.95	340	0.85	470	0.90	620	0.88
230	0.90	380	0.80	500	0.85	650	0.83
270	0.85	400	0.75	540	0.80	670	0.78
300	0.80	430	0.70	570	0.75	700	0.70
330	0.00	460	0.00	600	0.00	730	0.00

表 6 重箱运输成本、空箱调运成本和集装箱货流不平衡因子(单航段多箱型)

Table 6 Loaded container transport cost, empty container transport cost and container cargo flow imbalance factor (one segment and multiple container types)

$l_1^{(011)}$	$l_2^{(011)}$	$l_1^{(012)}$	$l_2^{(012)}$	$e_1^{(011)}$	$e_2^{(011)}$	$e_1^{(012)}$	$e_2^{(012)}$	$\beta_1^{(011)}$	$\beta_2^{(011)}$	$\beta_1^{(012)}$	$\beta_2^{(012)}$
40	75	76	125	20	20	35	35	0.5	0.25	0.4	0

通过数学软件 Matlab7.0 编程求解，结果表明：对于每一个预订等级，最优价格不一定具有单调性. 具有单调性的情形如下：对于 20 英尺箱型，最优价格对剩余载重量是非递增的；对于 40 英尺箱型，最优价格对剩余容量是非递增的；对于任一箱型，最优价格对剩余时间都是非递减的. 这同时意味着：1) 对于 20 英尺箱型，对于任一个决策期和剩余容量的组合 $(t, c_{V,1})$，存在一组临界预订容量 $\{c_{W,1}^{(tk)}\}$，使得当 $c_{W,1} \geqslant c_{W,1}^{(tk)}$ 时，接受等级 k 的预订请求，当 $c_{W,1} < c_{W,1}^{(tk)}$ 时，拒绝等级 k 的预订请求；2) 对于 40 英尺箱型，对于任一个决策期和剩余载重量的组合 $(t, c_{W,1})$，存在一组临界预订容量 $\{c_{V,1}^{(tk)}\}$，使得当 $c_{V,1} \geqslant c_{V,1}^{(tk)}$ 时，接受等级 k 的预订请求，当 $c_{V,1} < c_{V,1}^{(tk)}$ 时，拒绝等级 k 的预订请求；

3) 对于任一箱型、任一个给定的$(c_{V,1}, c_{W,1})$,存在一组临界决策期$\{t_k(c_{V,1}, c_{W,1})\}$,使得当$t \leqslant t_k(c_{V,1}, c_{W,1})$时,接受等级$k$的预订请求,当$t > t_k(c_{V,1}, c_{W,1})$时,拒绝等级$k$的预订请求.

不具有单调性的情形如下:1) 对于20英尺箱型,最优价格对剩余容量不一定是非递增的;2) 对于40英尺箱型,最优价格对剩余载重量不一定是非递增的. 以$t = 40$为例,作出最优价格与剩余载重量的关系图,如图6,作出最优价格与剩余容量的关系图,如图7. 以$c_{V,2} = 10$,$c_{W,2} = 10$为例,作出最优价格与剩余时间的关系图,如图8.

综合以上结果表明,在单航段多箱型的情形下,最优价格不一定具有单调性.

3.3　多航段多箱型

假设航线为包含两个航段的非循环航线,且$C_{V,1} = C_{V,2} = 15\text{TEU}$,$C_{W,1} = C_{W,2} = 10$个单位. 班轮可接收20英尺箱和40英尺箱这两种不同尺寸的箱型,决策期总数$T = 10$. 其它相关参数$\lambda_{tk}^{(01m)}$、$\theta_k^{(01m)}(p)$、$l_k^{(01m)}$、$e_k^{(01m)}$和$\beta_k^{(01m)}$见表7、表8和表9.

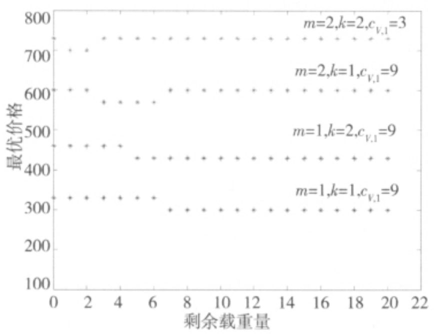

图6　最优价格与剩余载重量的关系(单航段多箱型多等级)

Fig. 6 The relationship between optimal price and remaining dead weight capacity

(one segment, multiple container types and multiple classes)

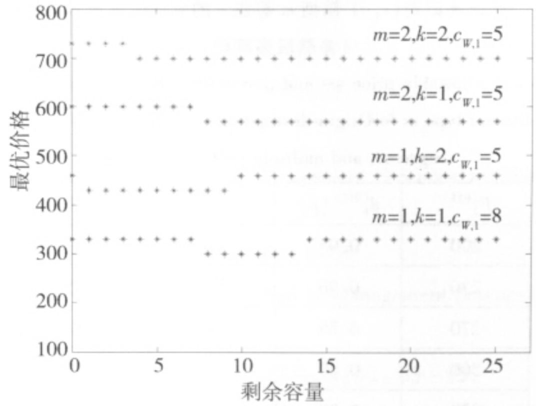

图7　最优价格与剩余容量的关系(单航段多箱型多等级)

Fig. 7 The relationship between optimal price and remaining volume capacity

(one segment, multiple container types and multiple classes)

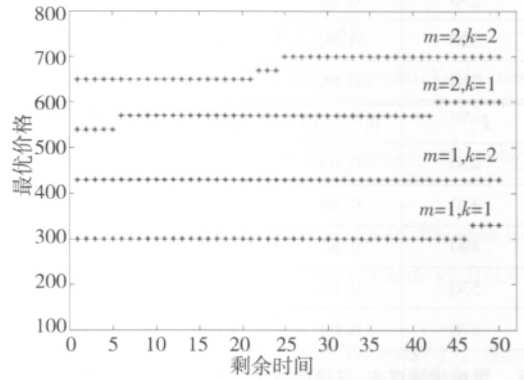

图8　最优价格与剩余时间的关系(单航段多箱型多等级)

Fig. 8 The relationship between optimal price and remaining time

(one segment, multiple container types and multiple classes)

通过$Matlab$软件编程计算,分析结果如下:最优价格对航段剩余容量不一定具有单调性;最优价格对航段剩余载重量不一定具有单调性;最优价格对剩余时间都是非递减的.

表7　起讫港口对(i,j)箱型m等级k的预订请求到达概率(多航段多箱型)

Table 7 Arriving probability of class k of container type m for origin-destination ports pair (i,j)

(multiple segments and multiple container types)

决策期	到达概率					
	$\lambda_{t1}^{(011)}$	$\lambda_{t1}^{(012)}$	$\lambda_{t1}^{(121)}$	$\lambda_{t1}^{(122)}$	$\lambda_{t1}^{(021)}$	$\lambda_{t1}^{(022)}$
1 - 2	0	0	0	0	0	0
3 - 4	0.07	0.06	0.07	0.07	0.03	0.07
5 - 6	0.10	0.05	0.14	0.05	0.15	0.05
7 - 8	0.04	0.09	0.09	0.13	0.06	0.16
9 - 10	0.05	0.03	0.06	0.12	0.01	0.11

表 8 起讫港口对(i，j) 箱型 m 等级 k 的可行价格集和购买概率(多航段多箱型)

Table 8 Allowable price set and purchasing probability of Class k of Container type m forOrigin-destination ports pair (i, j) (multiple segments and multiple container types)

$P_1^{(011)}$	$\theta_1^{(011)}(p)$	$P_1^{(012)}$	$\theta_1^{(012)}(p)$
200	0.95	470	0.90
230	0.90	500	0.85
270	0.85	540	0.80
300	0.80	570	0.75
330	0.00	600	0.00
$P_1^{(121)}$	$\theta_1^{(121)}(p)$	$P_1^{(122)}$	$\theta_1^{(122)}(p)$
220	0.95	500	0.90
250	0.90	530	0.85
290	0.85	570	0.80
320	0.80	600	0.75
340	0.00	620	0.00
$P_1^{(021)}$	$\theta_1^{(021)}(p)$	$P_1^{(022)}$	$\theta_1^{(022)}(p)$
420	0.95	920	0.90
450	0.90	950	0.85
490	0.85	990	0.80
530	0.80	1 030	0.75
570	0.00	1 060	0.00

表 9 重箱运输成本、空箱调运成本和集装箱货流不平衡因子(多航段多箱型)

Table 9 Loaded container transport cost, empty container transport cost and container cargo flow imbalance factor (multiple segments and multiple container types)

$l_1^{(011)}$	$l_1^{(012)}$	$e_1^{(011)}$	$e_1^{(012)}$	$\beta_1^{(011)}$	$\beta_1^{(012)}$
40	76	20	35	0.5	0.4
$l_1^{(121)}$	$l_1^{(122)}$	$e_1^{(121)}$	$e_1^{(122)}$	$\beta_1^{(121)}$	$\beta_1^{(122)}$
37	72	15	30	0.4	0.2
$l_1^{(021)}$	$l_1^{(022)}$	$e_1^{(021)}$	$e_1^{(022)}$	$\beta_1^{(021)}$	$\beta_1^{(022)}$
72	143	30	60	0.5	0.2

4 结束语

本文根据集装箱班轮运输行业实际情况，包括二维能力、多种集装箱类型、多航段的循环航线结构、重箱运输成本以及集装箱货流不平衡等，整合顾客基于货运服务认知价值的选择行为和价格限制建立了集装箱海运二维收益管理多航段多箱型动态定价模型，并提出了最优在线动态定价策略，同时说明了各箱型未来期望机会收益、重箱运输成本、集装箱货流不平衡因子和空箱运输成本对最优价格的影响，并证明了在单航段单箱型和两航段单箱型下最优价格具有单调性. 由于多维状态空间的存在导致计算最优策略是不实际的，因此有必要开发启发式的策略. 为此，首先证明了模型价值函数的单调性，进而提出并证明了模型价值函数的上界，通过分解降维的方法把二维问题转化为两个体现二维特性但计算上更可行的一维问题的组合，用模型上界代替原函数提出启发式算法. 最后通过数值分析讨论了在二维收益管理动态定价中最优价格的制定及其相关性质，得到如下结论: 1) 在单航段单箱型的情况下，最优价格具有单调性; 2) 在单航段多箱型和多航段多箱型两种情况下，最优价格对剩余时间具有单调性，而对航段剩余容量和剩余载重量不一定具有单调性.

本文的研究将有助于集装箱班轮公司在网络环境下建立基于自身特点的收益管理决策支持系统，提高公司的运作效率和收益水平，进一步实现管理科学化. 同时对于具有多维能力属性的邮轮(容量、救生艇数量)、航空货运(形状、体积、重量)、公路运输(体积、重量)、铁路集装箱运输(体积、重量、集装箱种类) 以及医院(医生、护士、病房) 等的收益管理问题都将具有很强的理论指导意义.

未来还可从以下两个方面进行研究.

1) 由于收益管理模型在引入竞争分析后会变得相当复杂，本文在研究收益管理问题时有一个隐含的假定，即集装箱班轮公司具有垄断或半垄断地位，建立模型时没有充分考虑竞争的因素. 然而随着集装箱运输业的迅猛发展，市场竞争日益激烈，企业在做每一步的决策时都不得不考虑竞争对手的反应. 因此，竞争环境下的集装箱二维收益管理问题是未来的研究方向之一.

2) 进一步的实证研究; 可通过把本文所提出的动态定价模型和启发式算法应用到在线集装箱舱位预订提供商来实施该研究.

参 考 文 献:

[1] 陈 旭. 酒店收益管理的研究进展与前景[J]. 管理科学学报，2003，6(6)：72 – 78.
Chen Xu. Hotel revenue management: Research overview and prospects[J]. Journal of Management Sciences in China，2003，6(6)：72 – 78. (in Chinese)

[2] 罗 利，萧柏春. 收入管理理论的研究现状及发展前景[J]. 管理科学学报，2004，7(5)：1 – 9.
Luo Li，Xiao Baichun. Revenue management: State of the art and future prospects[J]. Journal of Management Sciences in China，2004，7(5)：1 – 9. (in Chinese)

[3] 李晓花，萧柏春. 航空公司收入管理价格与舱位控制的统一分析[J]. 管理科学学报，2004，7(6)：63 – 93.
Li Xiaohua，Xiao Baichun. Comprehensive analysis of pricing and seat inventory control in airline revenue management[J]. Journal of Management Sciences in China，2004，7(6)：63 – 93. (in Chinese)

[4] 官振中，史本山. 易逝性高科技产品收益管理定价策略[J]. 管理科学学报，2008，11(5)：102 – 109.
Guan Zhenzhong，Shi Benshan. Optimal pricing policy for high technology perishable commodity with revenue management[J]. Journal of Management Sciences in China，2008，11(5)：102 – 109. (in Chinese)

[5] 张五常. 经济解释[M]. 香港: 花千树出版有限公司，百度文库(http://wenku.baidu.com)：137.
Zhang Wuchang. Economic Explanation[M]. Hongkong: Arcadia Press Ltd，Baidu Library(http://wenku.baidu.com)：137. (in Chinese)

[6] 航空业: 收益管理掘金空间加大? 关注国航和东航[R]. 北京: 中国民族证券，2010，http://money.163.com/10/0719/13/6BV8INFR0025/M00.html.
Airline Industry: The Space of Excavating Gold From Revenue Management Becomes Larger and Pay Close Attention to Air China and China Eastern airlines[R]. Beijing: China Minzu Securities，2010，http://money.163.com/10/0719/13/6BV8INFR0025/M00.html. (in Chinese)

[7] Gallego G，van Ryzin G. Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand over finite horizons[J]. Management Science，1994，40(8)：999 – 1020.

[8] Gallego G，van Ryzin G. A multi-product dynamic pricing problem and its application to network yield management[J]. Operations Research，1997，45(1)：24 – 41.

[9] You P. Dynamic pricing in airline seat management for flights with multiple flight legs[J]. Transportation Science，1999，33(2)：192 – 206.

[10] Bitran G R，Mondschein S V. Periodic pricing of seasonal products in retailing[J]. Management Science，1997，43(1)：64 – 79.

[11] Feng Y，Gallego G. Optimal starting times for end-of-season sales and optimal stopping-times for promotional fares[J]. Management Science，1995，41(8)：1371 – 1391.

[12] Feng Y，Gallego G. Perishable asset revenue management with markovian time dependent demand intensities[J]. Management Science，2000，46(7)：941 – 956.

[13] Feng Y，Xiao B. Maximizing revenues of perishable assets with a risk factor[J]. Operations Research，1999，47(2)：337 – 341.

[14] Zhao W，Zheng Y S. Optimal dynamic pricing for perishable assets with nonhomogeneous demand[J]. Management Science，2000，46(3)：375 – 388.

[15] Feng Y，Xiao B. A continuous-time yield management model with multiple prices and reversible price changes[J]. Management Science，2000，46(5)：644 – 657.

[16] Lee T C，Hersh M. A model for dynamic airline seat inventory control with multiple seat bookings[J]. Transportation Science，1993，27(3)：252 – 265.

[17] Van Slyke R, Young Y. Finite horizon stochastic knapsacks with applications to yield management [J]. Operations Research, 2000, 48(1): 155 – 172.

[18] Kleywegt A J, Papastavrou J D. The dynamic and stochastic knapsack problem with random sized items [J]. Operations Research, 2001, 49(1): 26 – 41.

[19] Xiao B, Yang W. Revenue Management with Multiple Capacity Dimensions [R]. New York: School of Bussiness, Long Island University, 2006.

[20] Li Bing-zhou. A stochastic model for dynamic capacity allocation of container shipping two-dimensional revenue management [C] // Proceedings of 2008 International Conference on Service System and Service Management. Melbourne: IEEE Systems, man and cybernetics society, 2008.

[21] Pak K, Dekker R. Cargo revenue management: Bid-prices for a 0-1 multi knapsack problem [C] //ERIM Report Series Research in Management, Rotterdam School of Management, Erasmus Universiteit Rotterdam, Rotterdam: The Netherlands, 2004.

[22] Moussawi L, Cakanyildrim M. Profit Maximization in Air Cargo Overbooking [R]. Dallas: School of Management, University of Texas, 2005.

[23] Luo S, Cakanyildrim M. Two-Dimensional Cargo Overbooking Models [R]. Dallas: School of Management, University of Texas, 2005.

[24] Amaruchkul K, Cooper W L, Gupta D. Single-Leg Air-Cargo Revenue Management [R]. Minnesota: Graduate Programin Industrial & Systems Engineering, Department of Mechanical Engineering, University Minnesota, 2006.

Online dynamic pricing policy for two-dimensional revenue management of container liners

LI Bing-zhou

School of Management, Xiamen University, Xiamen 361005, China

Abstract: A stochastic model for online dynamic pricing with multiple segments and multiple container types of two-dimensional revenue management is brought forward to maximize the total revenue of a container liner company under the condition of the realistic constraints. Then the optimal online dynamic pricing policy is presented. The bound of the value function of the model is proved and a more practical heuristic algorithem is presented based on the thought of reducing the dimensionality. The dynamic pricing policies are analyzed in three different cases—where there are one segment and one container, where there are one segment and multiple container types and where there are multiple segments and multiple container types—in our numerical examples. The analysis results show that the optimal price is monotonic in the first case, but is not necessarily monotonic in the second and third case.

Key words: two-dimensional revenue management; online dynamic pricing; multiple segments; container types

附录

引理 1 的证明:

1) 根据文献 [9] 中引理 2.1(a),容易得证.

2) 根据文献 [9] 中引理 2.1(c),可证得 $f_k^{(ijm)}(b)$ 对 b 非递增,而由于 b 对 $\varphi_{t-1}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W)$、$l_k^{(ijm)}$、$\beta_k^{(ijm)}$ 和 $e_k^{(ijm)}$ 递增,因此 $f_k^{(ijm)}(b)$ 对 $\varphi_{t-1}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W)$、$l_k^{(ijm)}$、$\beta_k^{(ijm)}$ 和 $e_k^{(ijm)}$ 非递增.

3) 根据文献 [9] 中引理 2.1(c2),可证得 $f_k^{(ijm)}(b)+b$ 对 b 非递减,而由于 b 对 $\varphi_{t-1}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$、$l_k^{(ijm)}$、$\beta_k^{(ijm)}$ 和 $e_k^{(ijm)}$ 递增,因此 $f_k^{(ijm)}(b)+b$ 对 $\varphi_{t-1}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$、$l_k^{(ijm)}$、$\beta_k^{(ijm)}$ 和 $e_k^{(ijm)}$ 非递减. 如果 $b_1\leqslant b_2$,可推出 $f_k^{(ijm)}(b_1)+b_1\leqslant f_k^{(ijm)}(b_2)+b_2$,那么 $f_k^{(ijm)}(b_1)-f_k^{(ijm)}(b_1)\leqslant b_2-b_1$,这正如文献 [9] 中引理 2.1(e) 所证明的.

4) 根据文献 [9] 中引理 2.1(d),可证得 $p_k^{(ijm)}(b)$ 对 b 非递减,而由于 b 对 $\varphi_{t-1}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$、$l_k^{(ijm)}$、$\beta_k^{(ijm)}$ 和 $e_k^{(ijm)}$ 递增,因此 $p_k^{(ijm)}(b)$ 对 $\varphi_{t-1}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)$、$l_k^{(ijm)}$、$\beta_k^{(ijm)}$ 和 $e_k^{(ijm)}$ 非递减.

定理 1 的证明:

1) 给定 t 和 $c_{W,1}$,当 $c_{V,1}\leqslant c_{W,1}$ 时,首先,易于表明

$$\varphi_1^{(01)}(2,c_{W,1})-\varphi_1^{(01)}(1,c_{W,1})=-\sum_{k=1}^{K_{01}}\lambda_{1k}^{(01)}f_k^{(01)}(l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})\leqslant 0,$$

并且,对于 $c_{V,1}\geqslant 3$,$\varphi_1^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})-\varphi_1^{(01)}(c_{V,1}-1,c_{W,1})=0$. 因此,对于 $t=1$,该命题成立. 当 $t\geqslant 2$ 时,假设该命题对于 $t-1$ 成立. 那么,从式(6) 可知,对于 $c_{V,1}\geqslant 2$,有

$$\begin{aligned}&\varphi_t^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})-\varphi_t^{(01)}(c_{V,1}-1,c_{W,1})=\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})-\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1,c_{W,1})+\\&\quad\sum_{k=1}^{K_{01}}\lambda_{tk}^{(01)}[f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})+l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})-f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1,c_{W,1})+l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})+\\&\quad f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-2,c_{W,1})+l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})I(c_{V,1}\geqslant 3,c_{W,1}\geqslant 3)-f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1,c_{W,1})+l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})]\end{aligned}$$

因为,从引理 1,1),对于 $c_{V,1}=2$,可得

$$\begin{aligned}&f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-2,c_{W,1})+l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})I(c_{V,1}\geqslant 3,c_{W,1}\geqslant 3)-f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1,c_{W,1})+l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})=\\&\quad -f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1,c_{W,1})+l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})\leqslant 0;\end{aligned}$$

从引理 1,2),对于 $c_{V,1}\geqslant 3$,可得

$$f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-2,c_{W,1})+l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})I(c_{V,1}\geqslant 3,c_{W,1}\geqslant 3)-f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1,c_{W,1})+l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})\leqslant 0$$

从引理 1,3),对于 $c_{V,1}\geqslant 2$,可得

$$\begin{aligned}&f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})+l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})-f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1,c_{W,1})+l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})\leqslant\\&\quad\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1,c_{W,1})-\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}&\varphi_t^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})-\varphi_t^{(01)}(c_{V,1}-1,c_{W,1})\leqslant\\&\quad\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})-\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1,c_{W,1})+\sum_{k=1}^{K_{01}}\lambda_{tk}^{(01)}[\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1,c_{W,1})-\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})]=\\&\quad\left(1-\sum_{k=1}^{K_{01}}\lambda_{tk}^{(01)}\right)(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})-\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1,c_{W,1}))\leqslant 0\end{aligned}$$

这表明 $\varphi_t^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})$ 对 $c_{V,1}$ 非递增.

而当 $c_{V,1}>c_{W,1}$ 时,易得

$$\varphi_t^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})=\varphi_t^{(01)}(c_{V,1}-1,c_{W,1})$$

所以 $\varphi_t^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})$ 对 $c_{V,1}$ 非递增.

综合以上两部分证明,定理 1,1) 得证.

2) 与 1) 同样的思路可证得.

3) 从引理 1,4) 和定理 1,1) 可直接证得.

4) 从引理 1,4) 和定理 1,2) 可直接证得.

5) 对于 $c_{V,1}=1$ 或 $c_{W,1}=1$,有

$$\begin{aligned}&f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})+l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})I(c_{V,1}\geqslant 1,c_{W,1}\geqslant 1)-\\&\quad f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1,c_{W,1}-1)+l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})I(c_{V,1}\geqslant 2,c_{W,1}\geqslant 2)=f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})+l_k^{(01)}+\beta_k^{(01)}e_k^{(01)})\end{aligned}$$

从而由式(6) 和引理 1,1) 可知

$$\varphi_t^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})=\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})+\sum_{k=1}^{K_{01}}\lambda_{tk}^{(01)}f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1},c_{W,1})+l_k^{(01)}+\beta_l^{(01)}e_k^{(01)})I(c_{V,1}\geqslant 1,c_{W,1}\geqslant 1)$$

$$\geqslant 0$$
$$\geqslant \varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}, c_{W,1})$$

对于 $c_{V,1} \geqslant 2$ 且 $c_{W,1} \geqslant 2$,由定理 1,1) 可知,$\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}, c_{W,1}) \leqslant \varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1, c_{W,1})$;另外由定理 1,2) 可知,$\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1, c_{W,1}) \leqslant \varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1, c_{W,1}-1)$. 所以,$\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}, c_{W,1}) \leqslant \varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1, c_{W,1}-1)$. 再由引理 1,2) 可得

$$f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}, c_{W,1}) + l_k^{(01)} + \beta_k^{(01)} e_k^{(01)}) I(c_{V,1} \geqslant 1, c_{W,1} \geqslant 1) \geqslant$$
$$f_k^{(01)}(\varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}-1, c_{W,1}-1) + l_k^{(01)} + \beta_k^{(01)} e_k^{(01)}) I(c_{V,1} \geqslant 2, c_{W,1} \geqslant 2),$$

因此,由式(6),$\varphi_t^{(01)}(c_{V,1}, c_{W,1}) \geqslant \varphi_{t-1}^{(01)}(c_{V,1}, c_{W,1})$. 定理 1,5) 得证.

6) 由引理 1,4) 和定理 1,5),可立即推导出定理 1,6).

定理 2 的证明:

$$\begin{aligned} g_t(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W) &= \lambda_{t0} g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W) + \\ &\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ijm}} \lambda_{tk}^{(ijm)} \Big[g_{t-1}(c_V, c_W) \max\{ I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) < \boldsymbol{V}_m), I(q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W) < \boldsymbol{W}_m) \} + \\ &\quad \max_{p \in P_k^{(ijm)}} u_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W, p) I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) \geqslant \boldsymbol{V}_m, q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W) \geqslant \boldsymbol{W}_m) \Big] \\ &= g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W) + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ijm}} \lambda_{tk}^{(ijm)} \max_{p \in P_k^{(ijm)}} \theta_k^{(ijm)}(p) \Big[p - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)} - \\ &\quad (g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W) - g_{t-1}(c_V - V_{ijm}, \boldsymbol{c}_W - \boldsymbol{W}_{ijm})) \Big] I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) \geqslant \boldsymbol{V}_m, q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W) \geqslant \boldsymbol{W}_m), \\ &\forall t = 1, 2, \cdots, T \end{aligned}$$

由于

$$\max_{p \in P_k^{(ijm)}} \theta_k^{(ijm)}(p) \Big[p - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)} - (g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W) - g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V - \boldsymbol{V}_{ijm}, \boldsymbol{c}_W - \boldsymbol{W}_{ijm})) \Big] \geqslant$$
$$\theta_k^{(ijm)}(p_{k,\text{null}}^{(ijm)}) \Big[p_{k,\text{null}}^{(ijm)} - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)} - (g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W) - g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V - \boldsymbol{V}_{ijm}, \boldsymbol{c}_W - \boldsymbol{W}_{ijm})) \Big] = 0$$

且由于 $g_0(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W) = 0$,因此,$g_t(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W) \geqslant g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W)$,$\forall t = 1, 2, \cdots, T$. 定理 2 的第 1 部分得证.

用数学归纳法证明第 2 部分.

当 $t = 1$ 时,则对于任意 $c_{W,s} > 0$,

$$g_1(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ijm}} \lambda_{tk}^{(ijm)} \max_{p \in P_k^{(ijm)}} \theta_k^{(ijm)}(p)(p - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)}) I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) \geqslant \boldsymbol{V}_m, q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W) \geqslant \boldsymbol{W}_m)$$

相对于 $c_{W,s}$,上述等式右边是一个常数,所以 $g_1(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W)$ 对 $c_{W,s}$ 是非递减的.

而对于 $c_{W,s} = 0$,有

$$\begin{aligned} g_1(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W) &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ijm}} \lambda_{tk}^{(ijm)} \max_{p \in P_k^{(ijm)}} \theta_k^{(ijm)}(p)(p - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)}) I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) \geqslant \boldsymbol{V}_m, q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W) \geqslant \boldsymbol{W}_m) + \\ &\sum_{i=s}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ijm}} \lambda_{tk}^{(ijm)} \max_{p \in P_k^{(ijm)}} \theta_k^{(ijm)}(p)(p - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)}) I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) \geqslant \boldsymbol{V}_m, q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W) \geqslant \boldsymbol{W}_m) \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ijm}} \lambda_{tk}^{(ijm)} \max_{p \in P_k^{(ijm)}} \theta_k^{(ijm)}(p)(p - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)}) I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) \geqslant \boldsymbol{V}_m, q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W) \geqslant \boldsymbol{W}_m) \end{aligned}$$

因此 $g_1(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W)$ 对 $c_{W,s}$ 是非递减的.

假设 $g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W)$ 对 $c_{W,s}$ 非递减. 如果 f 和 g 是非递减函数,而且 α 是一个非负常数,那么 $\alpha \times f$ 是非递减函数,并且 $f+g$ 也是非递减函数. 由式(1) 可知,对于所有的 $p \in P_k^{(ijm)}$,$u_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W, p)$ 对 $c_{W,s}$ 非递减,即 $\max_{p \in P_k^{(ijm)}} u_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W, p) I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) \geqslant \boldsymbol{V}_m, q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W) \geqslant \boldsymbol{W}_m)$ 对 $c_{W,s}$ 非递减;同样又有 $\lambda_{t0} g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W)$ 和 $\lambda_{tk}^{(ijm)} [g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W) \max\{I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) < \boldsymbol{V}_m, I(q_W^{(ij)}(\boldsymbol{c}_W) < \boldsymbol{W}_m)\}]$ 对 $c_{W,s}$ 非递减,从而 $g_1(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W)$ 对 $c_{W,s}$ 非递减. 用同样的方法可证明第 3 部分. 定理 2 得证.

定理 3 的证明:

1) 由定理 2 可知,$g_1(\boldsymbol{c}_V, \boldsymbol{c}_W) \leqslant g_t(\boldsymbol{c}_V, \infty)$,其中 ∞ 表示所有的航段的载重量都为无穷大. 下面用数学归纳法证

明$g_t(\boldsymbol{c}_V,\infty) = G_t(\boldsymbol{c}_V)$.

当 $t = 1$ 时,有

$$\begin{aligned} g_t(\boldsymbol{c}_V,\infty) &= \sum_{i=s}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ijm}}\lambda_{tk}^{(ijm)} \max_{p\in P_k^{(ijm)}} \theta_k^{(ijm)}(p)(p - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)}) I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) \geqslant \boldsymbol{V}_m, q_W^{(ij)}(\infty) \geqslant \boldsymbol{W}_m) \\ &= \sum_{i=s}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ijm}}\lambda_{tk}^{(ijm)} \max_{p\in P_k^{(ijm)}} \theta_k^{(ijm)}(p)(p - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)}) I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) \geqslant \boldsymbol{V}_m) \\ &= G_t(\boldsymbol{c}_V) \end{aligned}$$

接着假设 $g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V,\infty) = G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V)$,那么

$$\begin{aligned} g_t(\boldsymbol{c}_V,\infty) &= \lambda_{t0} g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W) + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ijm}}\lambda_{tk}^{(ijm)} [g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W)\max\{I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) < \boldsymbol{V}_m), I(q_W^{(ij)}(\infty) < \boldsymbol{W}_m)\} + \\ &\quad \max_{p\in P_k^{(ijm)}} u_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W,p) I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) \geqslant \boldsymbol{V}_m, q_W^{(ij)}(\infty) \geqslant \boldsymbol{W}_m)] \\ &= \lambda_{t0} G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V) + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ijm}}\lambda_{tk}^{(ijm)} (G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V)\max\{I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) < \boldsymbol{V}_m), I(q_W^{(ij)}(\infty) < \boldsymbol{W}_m)\} + \\ &\quad \max_{p\in P_k^{(ijm)}} U_k^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,p) I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) \geqslant \boldsymbol{V}_m, q_W^{(ij)}(\infty) \geqslant \boldsymbol{W}_m)) \\ &= \lambda_{t0} G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V) + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{K_{ijm}}\lambda_{tk}^{(ijm)} (G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V) I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) < \boldsymbol{V}_m) + \max_{p\in P_k^{(ijm)}} U_k^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,p) I(q_V^{(ij)}(\boldsymbol{c}_V) \geqslant \boldsymbol{V}_m)) \\ &= G_t(\boldsymbol{c}_V) \end{aligned}$$

定理 3,1) 得证.

2) 同理,可证明定理 3,2).

3) 根据定理 3,1) 和 3,2),定理 3,3) 得证.

4) 根据式(1) 和定理 3,3),可推导出

$$\begin{aligned} u_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W,p) &= \theta_k^{(ijm)}(p)(p - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)} + g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V - \boldsymbol{V}_{ijm}, \boldsymbol{c}_W - W_{ijm})) + (1 - \theta_k^{(ijm)}(p)) g_{t-1}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W) \\ &\leqslant \theta_k^{(ijm)}(p)(p - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)} + \min\{G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V - \boldsymbol{V}_{ijm}), G_{t-1}(\boldsymbol{c}_W - W_{ijm})\}) + \\ &\quad (1 - \theta_k^{(ijm)}(p))\min\{G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V), G_{t-1}(\boldsymbol{c}_W)\} \\ &= \min\{G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V), G_{t-1}(\boldsymbol{c}_W)\} + \theta_k^{(ijm)}(p)(p - l_k^{(ijm)} - \beta_k^{(ijm)} e_k^{(ijm)} - (\min\{G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V), G_{t-1}(\boldsymbol{c}_W)\} - \\ &\quad \min\{G_{t-1}(\boldsymbol{c}_V - \boldsymbol{V}_{ijm}), G_{t-1}(\boldsymbol{c}_W - \boldsymbol{W}_{ijm})\})) \\ &= U_{tk}^{(ijm)}(\boldsymbol{c}_V,\boldsymbol{c}_W,p) \end{aligned}$$

定理 3 证毕.