

# 基于案例信息的多准则群决策分类方法<sup>①</sup>

蔡付龄, 廖貅武, 杨娜

(西安交通大学管理学院, 过程控制与效率工程教育部重点实验室, 西安 710049)

**摘要:** 针对多准则分类问题中决策者难以提供分类模型参数以及多人参与决策的复杂性, 给出了基于案例信息的多准则群决策分类方法. 该方法首先根据效用函数分类模型的基本性质定义了案例信息的一致性, 根据决策者的不同决策权重定义了案例信息的可信度. 然后, 建立整数规划模型从各决策者的案例信息中挑选出可信度最大的一致案例信息, 并利用该信息和一致性条件对所有待评价方案分类. 在分类过程中, 直接利用案例信息分类, 不需要设置分类边界参数. 最后, 通过一个 MBA 项目分类的实例说明了方法的可行性与合理性.

**关键词:** 多准则分类; 群决策; 案例信息; 决策权重; 一致性

**中图分类号:** C934    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1007-9807(2013)02-0022-11

## 0 引言

多准则分类决策是指决策者根据方案在多个准则下的评价价值, 将有限个方案进行分类的过程. 这类决策问题广泛存在于社会和经济生活中<sup>[1]</sup>, 例如根据财政状况、市场环境等指标划分各国的风险等级<sup>[2]</sup>, 根据现金流、固定资产等评价企业的信用等级<sup>[3]</sup>, 根据上市公司的财务指标判断上市公司是否存在财务困境<sup>[4]</sup>, 根据商品的价值、保质期等对库存商品进行分类管理<sup>[5]</sup>, 以及根据日用水量、城市人口量等对各城市的水资源分类<sup>[6]</sup>, 等等. 目前关于多准则分类问题的研究已经成为决策分析领域中的热点<sup>[7-10]</sup>. 随着经济全球化的发展和信息大爆炸的加剧, 企业和组织所面临的决策问题日趋复杂, 单个决策者很难把握问题的所有相关方面, 实际决策时往往需要多个决策者共同参与, 如设立董事会、智囊团等. 与单个决策者的分类问题相比, 群决策环境下的分类问题更加复杂: 首先, 由于经验、专业和所站角度不同, 各决策者对分类问题的看法存在很大差异, 需要按照一定规则综合决策者们的不同观点, 并

产生群体分类结果; 其次, 各决策者的社会地位、权力和责任不一样, 他们的观点对最终决策结果的影响也会不同, 需要在结果中体现各决策者的重要性<sup>[11]</sup>. 因此, 研究群决策环境下的分类问题更具挑战性和实际价值.

现有的多准则分类方法大致可以分为 3 类: 基于效用函数、基于级别优于关系和基于距离的分类方法. 基于效用函数的分类方法是通过构建决策者的效用函数来划分各方案, 例如 UTA-DIS<sup>[12]</sup>、MHDIS<sup>[13]</sup> 等; 基于级别优于关系的分类方法是计算方案与各边界方案(或特征方案)的级别优于关系指数, 然后根据该指数对方案分类, 例如 N-TOMIC<sup>[14]</sup>、ELECTRE TRI<sup>[15,16]</sup>、Flow-Sort<sup>[17]</sup>、ELECTRE TRI-C<sup>[9]</sup> 等; 基于距离的分类方法是按照各方案与理想方案的距离来确定方案的分类<sup>[5-8]</sup>. 然而, 这些方法主要是针对单个决策者, 目前仅有少量文献探讨了群决策环境下的分类问题<sup>[18-21]</sup>. 尽管如此, 群决策环境下的分类问题逐渐引起了学者们的关注, 一些文献<sup>[9,10]</sup> 强调了将现有的分类方法拓展至群决策环境的重

① 收稿日期: 2010-10-25; 修订日期: 2011-05-03.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71071124).

作者简介: 蔡付龄(1986), 女, 湖北潜江人, 博士生. Email: cai.fuling@stu.xjtu.edu.cn

要性.

在现有的针对群决策分类问题的研究中: 文献[18]研究了在 ELECTRE TRI 分类模型下, 多个决策者提供模型的参数信息的分类问题; 文献[19]研究了多个决策者分别给出部分方案的分类结果信息的分类问题, 它首先利用 IRIS 决策支持系统推导每个决策者的 ELECTRE TRI 分类模型和分类结果, 然后综合这些个体分类结果以获得群体的 ELECTRE TRI 分类模型和相应的群体分类结果; 文献[20]考虑了各决策者的决策权重, 给出了将多个决策者的偏好系统集成成群体偏好系统以及利用该系统确定方案分类的方法; 文献[21]利用稳健有序回归方法, 推导出与每位决策者的分类信息相一致的效用函数集和分类结果集, 然后综合各决策者的分类结果集以确定方案的 4 类群体分类结果集.

虽然这些文献从不同角度为群体决策提供了新思路, 但也有需要进一步完善之处: 在文献[18]和[21]中, 没有考虑决策者之间信息不一致的问题; 在文献[18]、[19]和[21]中, 没有考虑决策者的不同重要程度; 在文献[20]中, 决策者们必须将所有方案与边界方案进行比较, 因此无法解决决策者只能给出部分方案的分类信息的决策问题; 在文献[21]中, 仅仅给出了各方案的可能分类结果集合, 仍然需要设计分类机制来确定方案的确切分类. 此外, 在文献[18-20]中, 决策者们需要事先给出能够区分相邻类的边界方案在各准则下的准则值信息, 然而, 在实际决策中, 由于决策者们认知的局限性和观点的不一致, 让他们准确定义边界方案通常并不可行<sup>[22]</sup>. 例如在 ABC 库存管理问题中, 决策者们很难提供如下信息: “边界方案  $b_2$  (虚拟商品) 能区分 A 类商品和 B 类商品  $b_2$  的成本大约为 20 个单位, 保质期约为 10 个月……”. 除分类边界参数外, 分类模型还涉及其它参数, 如准则权重、否决阈值、断点效用值, 等等, 这些参数不容易被决策者所理解, 因此他们往往不愿意提供参数信息. 为了减轻决策者们的认知压力, 本文提出了新的基于案例信息的群决策分类方法, 该方法只需要决策者们根据以往的决策经验和相关知识, 给出部分方案的分类结果 (这里, 将给出了分类结果的方案统称为案例), 并不需要提供分类边界等模型参数信息. 同时, 文

中还考虑了决策者的不同决策权重, 在分类结果中最大限度地体现了主要决策者 (即决策权重大的决策者) 的观点. 本文的基本思路是首先根据决策者的决策权重计算案例信息的可信度, 然后从决策者们的案例信息中挑选出满足一致性条件的可信度最大的案例信息集, 最后利用这一最大信息集对所有的方案分类.

## 1 问题描述

在多准则分类问题中, 假设待分类方案在各准则下的评价值已知, 决策者们根据自己的判断, 给出部分方案的分类结果, 即案例信息. 本文的决策任务是充分利用各决策者的案例信息, 确定所有待评价方案的群体分类结果, 并使群体分类结果尽可能地反映各决策者的观点以及他们的决策权重. 为方便分析, 引入如下标记

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , 表示待分类的方案集;

$g = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , 为分类问题的评价准则集;

$g_j(a_i)$ , 表示方案  $a_i$  在准则  $g_j$  下的评价值;

$C = \{C^1, C^2, \dots, C^q\}$ , 为分类集合,  $C^1$  代表最差的一类,  $C^k$  代表第  $k$  类,  $k$  越大所代表的类越好;

$E = \{e_1, \dots, e_s, \dots, e_L\}$ , 为  $L$  个决策者的集合;

$\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s, \dots, \lambda_L\}$ , 是归一化的决策者权重, 满足  $\sum_{s=1}^L \lambda_s = 1, \lambda_s > 0$ ;

$A_s^* \subseteq A$ , 是决策者  $e_s$  提供了分类结果的案例集, 并且决策者  $e_s$  将  $a_i \in A_s^*$  分在第  $I_{si}$  类, 即  $C^{I_{si}}$ ;

$g_j^* = \min_{a_i \in A} \{g_j(a_i)\}$ ,  $g_j^* = \max_{a_i \in A} \{g_j(a_i)\}$ , 分别表示准则  $g_j$  的最大值和最小值.

本文将采用效用函数来刻画群体对各方案的满意程度, 即方案的群体效用值越大, 群体认为该方案越好. 已有一些文献研究了不同效用函数形式下的方案评价问题<sup>[23-25]</sup>, 为了简化讨论并聚焦于分类方法的设计上, 这里将不对效用函数的具体形式展开深入研究. 因此, 假设群体的效用函数为简单线性函数形式

$$U(a_i) = \sum_{j=1}^n w_j u_j(g_j(a_i))$$

其中当  $g_j$  为成本型准则时(即决策者希望方案在  $g_j$  下的值越小越好),关于  $g_j$  的边际效用函数为

$$u_j(g_j(a_i)) = \frac{g_j^* - g_j(a_i)}{g_j^* - g_j^*}$$

当  $g_j$  为效益型准则时(即方案在  $g_j$  下的值越大越好)  $g_j$  的边际效用函数为

$$u_j(g_j(a_i)) = \frac{g_j(a_i) - g_j^*}{g_j^* - g_j^*}$$

$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  为归一化的准则权重, 满足  $w_j \in [0, 1]$  且  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ . 权重向量  $w$  为未知参数, 需要从决策者们的案例信息中推导.

## 2 基于案例信息的群决策分类方法

### 2.1 基于效用函数的分类方法分析与一致性定义

为了直接利用案例信息对方案分类, 首先需要了解基于效用函数的分类方法的基本性质. 令  $C(a_i)$  表示方案  $a_i$  通过分类方法所获得的最终分类结果. 基于效用函数的分类方法满足如下性质: 当  $C(a) < C(b)$  时, 有  $U(a) < U(b)$ . 该性质表示方案所属类的级别越高, 方案的效用值越大. 由于效用函数是用来量化决策者的偏好, 因此这一性质是所有基于效用函数的分类方法及其分类结果应该满足的基本性质. 根据该性质, 本文给出基于效用函数的分类结果的一致性定义.

**定义 1** 已知方案集  $A$  中任意方案  $a$  的分类结果为  $C(a)$  ( $a \in A$ ). 如果存在效用函数  $U(\cdot)$  使方案集  $A$  满足  $\forall a, b \in A$ , 有  $C(a) < C(b) \Rightarrow U(a) < U(b)$ . 则称该方案集  $A$  的分类结果满足一致性.

**定理 1** 已知方案集  $A$  中任意方案  $a$  的分类结果为  $C(a)$  ( $a \in A$ ), 令  $C^k(A) = \{a_i \mid a_i \in A, C(a_i) = C^k\}$ , 方案集  $A$  的分类结果满足一致性的充要条件是  $\forall a_i \in C^p(A), a_j \in C^{p+1}(A)$  ( $p = 1, \dots, q-1$ ), 满足  $U(a_i) < U(a_j)$ .

**证明** 1) 充分性证明.  $\forall a, b \in A$ , 如果  $C(a) < C(b)$ , 令  $C(b) - C(a) = t \geq 1, C(a) = C^k$ , 则有  $C(b) = C^{k+t}$ . 根据性质  $\forall a_i \in C^p(A), a_j \in C^{p+1}(A)$  ( $p = 1, \dots, q$ ) 满足  $U(a_i) < U(a_j)$ , 可

以得到  $U(a) < \min_{a_i \in C^{k+1}(A)} U(a_i) < \dots < \min_{a_i \in C^{k+t}(A)} U(a_i) \leq U(b)$ , 即  $U(a) < U(b)$ . 因此  $\forall a, b \in A$ , 有  $C(a) < C(b) \Rightarrow C(a) < U(b)$ , 即方案集  $A$  的分类结果  $C(a)$  满足一致性. 2) 必要性证明.  $\forall a_i \in C^p(A), a_j \in C^{p+1}(A)$  ( $p = 1, \dots, q$ ), 由于  $C(a_i) = C^p < C(a_j) = C^{p+1}$ , 根据一致性定义, 有  $U(a_i) < U(a_j)$ .

**定理 1** 表示只要相邻类中方案的分类结果满足一致性, 那么整个方案集的分类结果也是一致的. 利用该定理可以简化对方案集分类结果的一致性判断.

### 2.2 基于案例信息的群决策分类方法

在群决策中, 由于各决策者的知识、经验等不同, 他们所提供的案例分类结果通常并不满足一致性要求. 在这种情况下, 无法找到能够同时反映各决策者的案例信息的群体效用函数, 那么也就无法确定待评价方案的分类结果. 为了最大限度地利用决策者们的分类信息, 将从各决策者的案例集中挑选出满足一致性要求的案例集. 此外, 考虑到决策者们在决策过程中的重要程度不同, 权重越大的决策者一般对群体最终决策的影响越大, 因此, 在挑选一致性案例集时, 将考虑提供案例的决策者的权重. 为了反映他们的不同权重, 利用决策者权重定义各案例被分在指定类的可信度, 令  $\cup A_s^*$  表示所有决策者提供的个体案例的集合;  $l_i = \min_s(I_{si}), h_i = \max_s(I_{si})$ , 分别表示案例  $a_i$  ( $a_i \in \cup A_s^*$ ) 的最差分类(即存在某个决策者将  $a_i$  放入  $C^{l_i}$ , 但是没有决策者将  $a_i$  放入更差的类)和最好分类(即存在某个决策者将  $a_i$  放入  $C^{h_i}$ , 但是没有决策者将  $a_i$  放入更好的类)的上标.

**定义 2** 令  $bel_i^k$  表示将方案  $a_i$  放入  $C^k$  类的可信度  $bel_i^k = \max\{\sum_{s: I_{si}=k} \lambda_s, \min\{\sum_{s: I_{si}=l_i} \lambda_s, \sum_{s: I_{si}=h_i} \lambda_s\}\}$ .

可信度具有如下性质:

- 1) 连续性. 如果  $bel_i^{k_1} > 0, bel_i^{k_2} > 0$  ( $k_1 < k_2$ ), 那么  $bel_i^k > 0, \forall k \in \{k_1, k_1 + 1, \dots, k_2\}$ .
- 2) 有界性.  $0 \leq bel_i^k \leq 1, \forall k \in \{1, 2, \dots, q\}$ .

可信度的连续性是指当有两个决策者  $e_{s_1}, e_{s_2}$  分别将方案  $a$  放入  $C^{k_1}, C^{k_2}$  时, 将方案  $a$  放入  $[C^{k_1}, C^{k_2}]$  之间的任意类  $C^k$  的可信度都大于 0. 这样定

义是为了协调决策者们关于同一个方案的不同分类信息,以获得一个折中的分类结果. 例如,当  $q = 5$ 、决策者 A 将方案  $a$  放入  $C^2$ 、决策者 B 将方案  $a$  放入  $C^4$  时,如果可信度满足连续性,那么将方案  $a$  放入  $C^3$  的可信度就大于 0. 此时方案  $a$  放入  $C^3$  的可信度一定大于放入  $C^1$  或  $C^5$  (可信度为零)的可信度. 因此,相对于  $C^1$ 、 $C^5$ ,更倾向于将方案  $a$  放入  $C^3$  中. 这种做法与在处理冲突时,更倾向于选择折中解(将方案  $a$  放入  $C^3$ )的行为相类似.

2.2.1 确定群体的一致案例集

根据定义 1,为了获得群体的一致案例集,需要从决策者们的案例集中挑选出满足性质  $C(a) < C(b) \Rightarrow U(a) < U(b)$  的案例集. 然而,满足一致性的案例集有很多,为了让分类结果最大程度地反映决策者们的案例信息和重要性,将挑选出可信度最大的一致案例信息集作为群体案例集. 为此,求解线性规划  $MLP 0$

$$\begin{aligned} \max \text{bel } 0 &= \rho \sum_{i: a_i \in \cup A_s^*} \sum_{k=l_i}^{h_i} \text{bel}_i^k y_i^k - \sum_{i: a_i \in \cup A_s^*} d_i \\ \text{s. t. } \left\{ \begin{aligned} &\theta \leq \sum_{i: a_i \in \cup A_s^*} y_i^k, \forall k = \{1, \dots, q\} \quad (1.1) \\ &U(a_i) - U(a_r) + \varepsilon \leq M(1 - y_i^k) + M(1 - y_r^{k+1}), \forall a_i, \\ &\quad a_r \in \cup A_s^*, l_r - 1 \leq k \leq h_r - 1, l_i \leq k \leq h_i \quad (1.2) \\ &U(a_i) - U(a_r) - d_r \leq M(1 - y_i^{l_r}) + M y_r^{l_r}, \forall a_i, \\ &\quad a_r \in \cup A_s^*, l_i \leq l_r \leq h_i \quad (1.3) \\ &U(a_r) - U(a_i) - d_r \leq M(1 - y_i^{h_r}) + M y_r^{h_r}, \forall a_i, \\ &\quad a_r \in \cup A_s^*, l_i \leq h_r \leq h_i \quad (1.4) \\ &\sum_{k=l_i}^{h_i} y_i^k \leq 1, a_i \in \cup A_s^* \quad (1.5) \\ &\sum_{j=1}^n w_j = 1, d_i \geq 0, y_i^k \in \{0, 1\}, i = \{1, \dots, m\}, \\ &\quad k = \{l_i, l_i + 1, \dots, h_i\} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

其中  $y_i^k$  为 0-1 变量,当  $y_i^k = 1$  时,表示个体案例  $a_i$  被选入群体案例集  $A_i$  的群体分类结果为  $C^k$ ; 当  $y_i^k = 0$  时,表示案例  $a_i$  的群体分类结果不是  $C^k$ ; 当  $y_i^{l_i} = y_i^{l_i+1} = \dots = y_i^{h_i} = 0$  时,表示案例  $a_i$  未被选入群体案例集.  $l_i, h_i$  分别表示决策者们所给出的案例  $a_i$  的最差分类和最好分类的上标. 让变量  $y_i^k$  的上标  $k$  能够在  $\{l_i, l_i + 1, \dots, h_i\}$  中取值,这表示

在挑选案例时,认为案例  $a_i$  可以放入  $[C^{l_i}, C^{h_i}]$  中的任意类  $C^k (l_i \leq k \leq h_i)$ . 这种处理方式有两点好处:一是能够协调决策者的分类结果,给出协调解<sup>[19]</sup>;二是可以挑选出尽可能多的群体案例,方便后续的方案分类. 目标函数  $\text{bel } 0$  反映了模型的两个目标,第 1 项目标是最大化所挑选出的案例集的可信度  $\sum_{i: a_i \in \cup A_s^*} \sum_{k=l_i}^{h_i} \text{bel}_i^k y_i^k$ ,第 2 项目标是最小化未被挑选出的案例在群体案例集下的分类结果与原分类结果的距离,系数  $\rho$  为事先给定的正数. 式 (1.1) 表示每个类中的群体案例个数不少于  $\theta$ ,  $\theta$  为根据问题规模事先给定的参数  $\theta \geq 1$ ; 式 (1.2) 表示相邻类中的群体案例满足一致性条件,根据定理 1,只要相邻类的案例满足一致性条件,那么整个案例集也满足一致性条件;  $d_r$  表示当案例  $a_r$  没有选入群体案例集时(即  $a_r$  不能被分在  $[C^{l_r}, C^{h_r}]$  中),案例  $a_r$  与  $[C^{l_r}, C^{h_r}]$  中的群体案例的效用距离. 式 (1.3) 考虑了案例  $a_r$  在模型  $MLP 0$  下将被分在  $C^{l_r}$  类左侧( $C(a_r) < C^{l_r}$ )的情况,  $d_r$  表示案例  $a_r$  与  $C^{l_r}$  中的群体案例的最大距离;同理,式 (1.4) 考虑了案例  $a_r$  的分类结果  $C(a_r) > C^{h_r}$  的情况,  $d_r$  表示案例  $a_r$  与  $C^{h_r}$  中的群体案例的最大距离. 式 (1.3) 和 (1.4) 一起定义了案例  $a_r$  在群体案例集下的分类结果与决策者们的分类结果  $[C^{l_r}, C^{h_r}]$  之间的差异; 式 (1.5) 表示群体案例有唯一的分类结果. 由于  $0 < U(a) \leq 1 (\forall a \in A)$ , 有  $-1 < U(a_i) - U(a_r) < 1$ , 因此  $M$  只需满足  $M > 1/\varepsilon_1$ .  $\varepsilon_1$  为决策者权重向量的精确度,比如当决策者权重保留两位小数时,有  $\varepsilon_1 = 0.01$ . 当  $\rho \geq |\cup A_s^*| / \varepsilon_1$  时,可以保证第 1 项目标是主要目标,第 2 项目标是次要目标,当  $\varepsilon_1$  非常小时,第 2 项目标可以忽略.

**定理 2** 当  $\rho \geq |\cup A_s^*| / \varepsilon_1$  时,如果模型  $MLP 0$  上的可行解  $y^*$  使目标函数  $\text{bel } 0$  最大,那么该可行解一定使  $\sum_{i: a_i \in \cup A_s^*} \sum_{k=l_i}^{h_i} \text{bel}_i^k y_i^k$  最大化.

**证明** 假设  $y^*$  是  $MLP 0$  上的一个最优解,但它不是  $\sum_{i: a_i \in \cup A_s^*} \sum_{k=l_i}^{h_i} \text{bel}_i^k y_i^k$  的最优解. 那么存在可

行解  $y'$  满足

$$\sum_{a_i \in \cup A_s^*} \sum_{k=l_i}^{h_i} bel_i^k y_i^k |_{y^*} <$$

$$\sum_{a_i \in \cup A_s^*} \sum_{k=l_i}^{h_i} bel_i^k y_i^k |_{y'}$$

其中  $\sum_{a_i \in \cup A_s^*} \sum_{k=l_i}^{h_i} bel_i^k y_i^k |_{y^*}$  表示令  $y = y^*$  时

$\sum_{a_i \in \cup A_s^*} \sum_{k=l_i}^{h_i} bel_i^k y_i^k$  的取值. 由于

$$\sum_{i: a_i \in \cup A_s^*} \sum_{k=l_i}^{h_i} bel_i^k y_i^k |_{y'} - \sum_{i: a_i \in \cup A_s^*} \sum_{k=l_i}^{h_i} bel_i^k y_i^k |_{y^*} =$$

$$\rho \sum_{a_i \in \cup A_s^*} \sum_{k=l_i}^{h_i} bel_i^k (y_i^k |_{y'} - y_i^k |_{y^*}) > | \cup A_s^* |$$

并且

$$\sum_{a_i \in \cup A_s^*} d_i \leq \sum_{a_i \in \cup A_s^*} (1 - U(a_i)) < | \cup A_s^* |$$

因此, 必然有  $bel 0 |_{y'} - bel 0 |_{y^*} > 0$ , 这与  $\{y^*\}$  是  $MLP 0$  上的最优解矛盾, 因此假设不成立.

根据定理 2 可知, 模型  $MLP 0$  的一级目标是最大化群体案例集的可信度, 二级目标是 minimized 未被选入的个体案例的群体分类结果与其原始分类结果的距离. 因此, 通过模型  $MLP 0$  获得的最优群体案例集一定是可信度最大的一致案例集. 采用两级目标是为了进一步优化一级目标下的最优解, 使所选择的群体案例集更好地反应各决策者的原始案例信息.

在确定了群体的一致案例集后, 下一步工作就是以该案例集作为群体分类依据, 利用定理 1, 对所有方案分类, 并使整个方案集  $A$  的群体分类结果满足一致性.

### 2.2.2 计算待分类方案的分类

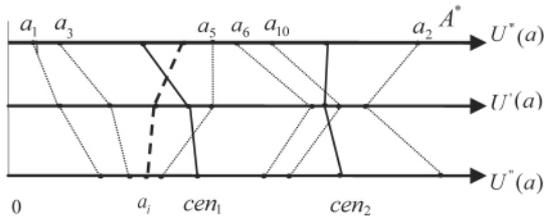
令  $A^*$  表示通过  $MLP 0$  模型挑选出的群体案例集  $\mathcal{C}^k(A^*)$  ( $k = 1, 2, \dots, q$ ) 表示群体案例集中分入  $C^k$  类的案例集合,  $\mathcal{C}(a_i)$  表示方案  $a_i$  对应的群体分类结果. 为了获得每个方案的分类, 求解模型  $MLP 1$

$$\min d = \sum_{i: a_i \in A-A^*} \sum_{k=1}^{q-1} (d_{ik}^+ + d_{ik}^-)$$

$$s.t. \begin{cases} U(a_i) - U(a_r) + \varepsilon \leq 0, \forall a_i, a_r \in A^*, \mathcal{C}(a_i) = C^k \\ \text{且 } \mathcal{C}(a_r) = C^{k+1}, k = 1; \dots; q-1 \quad (2.1) \\ U(a_i) - U(a_r) + \varepsilon \leq M(1 - y_r^k), \forall a_i \in A^*, \\ \mathcal{C}(a_i) = C^{k-1}, a_r \in A - A^*, k=2; \dots; q \quad (2.2) \\ U(a_r) - U(a_i) + \varepsilon \leq M(1 - y_r^k), \forall a_i \in A^*, \\ \mathcal{C}(a_i) = C^{k+1}, a_r \in A - A^*, k=1; \dots; q-1 \quad (2.3) \\ cen_k = \frac{1}{2} \left( \frac{\sum_{a_i \in C^k(A^*)} U(a_i)}{|C^k(A^*)|} + \frac{\sum_{a_i \in C^{k+1}(A^*)} U(a_i)}{|C^{k+1}(A^*)|} \right), \\ k = 1; \dots; q-1 \quad (2.4) \\ U(a_r) - cen_k - d_{rk}^+ + \varepsilon \leq M(1 - y_r^k), a_r \in A - A^*, \\ k = 1; \dots; q-1 \quad (2.5) \\ cen_{k-1} - U(a_r) - d_{rk}^- \leq M(1 - y_r^k), a_r \in A - A^*, \\ k = 2; \dots; q \quad (2.6) \\ \sum_{j=1}^n w_j = 1 \\ d_{ik}^+, d_{ik}^- \geq 0, y_i^k \in \{0, 1\}, \sum_{k=l_i}^{h_i} y_i^k = 1, a_i \in A - A^* \end{cases}$$

$MLP 1$  的目标函数是最小化各方案与所属分类中群体案例的距离.  $y_i^k$  为 0-1 变量, 当  $y_i^k = 1$  时, 表示待分类方案  $a_i$  的群体分类结果为  $C^k$ ; 当  $y_i^k = 0$  时, 表示  $a_i$  的群体分类结果不是  $C^k$ . 式 (2.1) 表示所挑选出的群体案例集满足一致性; 式 (2.2) 和 (2.3) 表示每个待分类方案的群体分类结果与群体案例集的分类结果满足一致性; 式 (2.4) 计算了相邻类的效用中心,  $cen_{k-1}$  是  $C^{k-1}$  与  $C^k$  的效用中心; 当  $a_i$  的群体分类结果为  $C^k$  时, 式 (2.5) 表示  $a_i$  的效用应该尽量不小于  $C^{k-1}$  与  $C^k$  的效用中心, 其中  $d_{ik}^-$  表示  $a_i$  的效用小于  $cen_{k-1}$  的程度, 当  $a_i$  的效用大于等于  $cen_{k-1}$  时  $d_{ik}^- = 0$ , 式 (2.6) 表示  $a_i$  的效用应该尽量不大于  $C^k$  与  $C^{k+1}$  的效用中心,  $d_{ik}^+$  表示  $a_i$  的效用大于  $cen_k$  的程度, 当  $a_i$  的效用小于等于  $cen_k$  时  $d_{ik}^+ = 0$ . 式 (2.5) 和 (2.6) 一起表明  $a_i$  的效用要尽量靠近所属分类中的群体案例. 如果仅仅利用一致性条件对所有方案分类, 那么方案的分类结果可能不唯一. 例如, 当  $a_i$  的效用大于  $C^1$  中所有案例的效用, 小于  $C^2$  中所有案例的效用时, 根据一致性条件,  $a_i$  放入  $C^1$  或  $C^2$ . 模型  $MLP 1$  让各方案尽量靠近所属分类中的案例, 即  $d_{ik}^-, d_{ik}^+$  最小化, 因此能够给出方案  $a_i$

的精确分类(如图 1 所示).



注:  $U^*(a)$  为通过 MLP 1 获得的最佳效用函数

图 1 分类结果示意图

Fig. 1 The demonstration of the sorting results

假设使群体案例集满足一致性条件的准则权重集为  $W^*$ , 即

$$W^* = w \mid U(a_i) - U(a_r) + \varepsilon \leq 0, a_i \in C^k(A^*),$$

$$a_r \in C^{k+1}(A^*), k = 1; \dots; q - 1, \sum_{j=1}^n w_j = 1$$

定义 3 已知方案  $a_i$  与方案  $a_r$ , 如果对于  $\forall w \in W^*$ , 有  $U(a_i) \geq U(a_r)$ , 则称方案  $a_i$  在群体案例集  $A^*$  下一致优于方案  $a_r$ .

定理 3 如果方案  $a_i$  在群体案例集  $A^*$  下一致优于方案  $a_r$ , 那么利用模型 MLP 1 求得的分类结果满足  $C(a_i) \geq C(a_r)$ .

证明 假设模型 MLP 1 的最优解为  $\{w^*, d^*\}$ , 方案  $a_r$  的分类结果  $C(a_r) = C^k$ . 根据模型 MLP 1, 对  $\forall a_i \in C^{k-1}(A^*)$ , 有  $U^*(a_r) > U^*(a_i)$ , 因此  $U^*(a_i) > U^*(a_r)$ . 那么  $a_i$  至少被分在  $C^{k-1}$ . 令  $d'_{rk} = cen_{k-1}^* - U^*(a_r)$ ,  $d'_{ik-1} = U^*(a_i) - cen_{k-1}^* + \varepsilon$ . 当  $d'_{rk} > 0$  时, 由于  $\{w^*, d^*\}$  为最优解, 则存在  $a_v \in C^k$ , 满足  $U^*(a_v) \leq U^*(a_r) \leq cen_{k-1}^* - d'_{rk}$ , 那么  $U^*(a_v) \leq U^*(a_i)$ , 因此  $a_i$  至少被分在  $C^k$ ; 当  $d'_{rk} \leq 0$  时, 有  $d'_{rk-1} \geq -d'_{rk} + \varepsilon > 0$ , 因此  $a_i$  一定不会分在  $C^{k-1}$  (如果分在  $C^{k-1}$  必有  $d'_{ik-1} > 0$  通过将  $a_i$  放入  $C^k$ , 可以优化目标函数, 那么会与  $\{w^*, d^*\}$  为最优解矛盾). 综合可得  $a_i$  至少被分在  $C^k$ , 即  $C(a_i) \geq C(a_r)$ .

推论 1 利用模型 MLP 1 求得的分类结果满足一致性.

根据定理 3 的证明过程, 不难看出模型 MLP 1 的最优分类结果一定满足一致性, 否则会与最优解的定义矛盾.

### 2.3 基于案例的群决策分类方法基本步骤

通过上述分析, 基于案例的群决策分类方法

的一般步骤如下(如图 2).

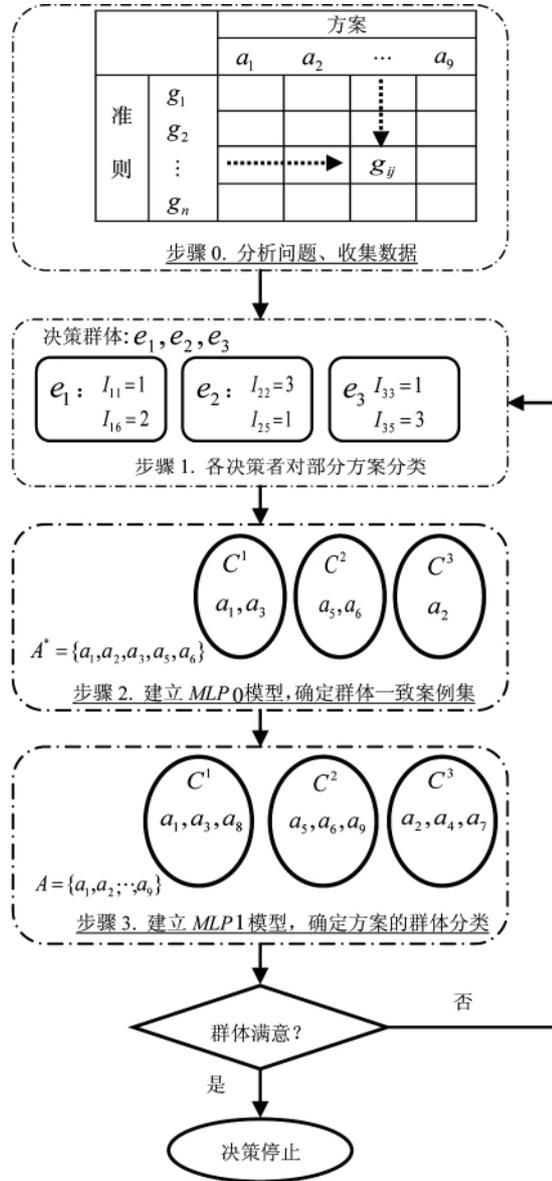


图 2 群决策环境下的多准则分类步骤

Fig. 2 Sorting process for group decision-making

步骤 0 分析问题, 确定问题的待分类方案集  $A$ 、决策准则集  $g = \{(g_1, g_2, \dots, g_n)\}$ 、方案的评价值  $g_j(a_i)$  和各决策者的权重  $\lambda_s$ , 并对分类集合  $C = \{C^1, C^2, \dots, C^q\}$  进行定义.

步骤 1 初步分类. 各决策者  $e_s$  根据自己的经验和知识, 给出部分方案  $A_s^*$  的精确分类.

步骤 2 根据各决策者的个体案例集  $\cup A_s^*$ , 计算各案例的分类结果的可信度, 利用模型 MLP 0 确定群体的一致案例集  $A^*$ .

步骤 3 根据群体案例集  $A^*$ , 利用模型 MLP

1 对方案集  $A - A^*$  分类, 确定各方案的群体分类结果.

步骤 4 如果决策者们对分类结果满意, 则决策终止, 否则重新回到步骤 1 进行新一轮决策.

### 3 实 例

#### 3.1 MBA 项目分类实例

沿用文献 [10] 中的实例, 将根据 2005 年 MBA 项目的评价数据 (如表 1), 将 30 个高校的 MBA 项目分为 5 类, 那么有  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{30}\}$ ,  $C^1 =$  “差”、 $C^2 =$  “一般”、 $C^3 =$  “较好”、 $C^4 =$  “好”、 $C^5 =$  “很好”. 在该评价数据中, 考虑了 MBA 项目的 3 个准则:  $g_1 =$  “职业前景”、 $g_2 =$  “多元化”、 $g_3 =$  “创新性”. 现假设有 3 名决策者  $e_1, e_2, e_3$  参与决策, 他们的决策权重为 (0.2, 0.35, 0.45), 因此决策权重的精确度为  $\varepsilon_1 = 0.01$ .

利用本文所提出的方法, 该 MBA 分类问题的群体决策步骤如下.

步骤 1 各决策者参考评价矩阵, 根据自己

以往的决策经验给出了部分方案的分类信息, 如表 2, 例如有  $I_{11} = 5, I_{12} = 4, I_{1,12} = 3, I_{1,14} = 5$ , 因此  $\cup A_s^* = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_{12}, a_{14}, a_{29}\}$

步骤 2 建立 MLP 0 模型求解群体案例集.

首先, 根据定义 2 计算出各案例分类结果的可信度为  $bel_1^5 = bel_2^4 = bel_{14}^5 = 0.2, bel_3^4 = bel_4^3 = bel_5^3 = 0.35, bel_6^2 = bel_7^2 = bel_8^1 = 0.4, bel_{12}^3 = 0.2, bel_{12}^4 = 0.4, bel_{29}^1 = 0.4, bel_{29}^2 = bel_{29}^3 = bel_{29}^4 = 0.35$ .

其次, 确定方案在各准则下的边界效用值. 各准则  $g_1, g_2$  和  $g_3$  均为收益型准则 (准则值越大, 决策者越满意), 则边际效用函数分别为

$$u_1(g_1(a_i)) = \frac{g_1(a_i) - 50.4}{33.4},$$

$$u_2(g_2(a_i)) = \frac{g_2(a_i) - 18.69}{52.05},$$

$$u_3(g_3(a_i)) = \frac{g_3(a_i) - 14.45}{79.46}$$

将各方案的准则值代入边际效用函数, 计算出各方案在各准则下的边际效用值.

表 1 MBA 项目的评价矩阵

Table 1 The evaluation scores of the MBA programs

No.	项目名称	$g_1$	$g_2$	$g_3$	No.	项目名称	$g_1$	$g_2$	$g_3$
1	LBS	68.78	62.03	59.87	16	Insead	56.59	70.74	65.45
2	MIT: Sloan	60.01	24.1	85.81	17	NYU: Stern	68.24	26.74	80.5
3	YSM	79.01	25.98	51.84	18	NUK	68.68	24.52	72.43
4	UNC: KFlagler	67.8	22.45	62.4	19	RSM	51.2	52.91	42.98
5	UT: Rotman	59.34	36.68	60.79	20	SU GSB	76.77	28.52	81.8
6	UCLA: Anderson	55.46	21.52	74.54	21	UCB: Haas	61.26	31.04	73.69
7	UO: Said	57.04	43.49	47.12	22	UC GSB	75.64	25.37	77.73
8	UM: Smith	55.33	25.28	64.13	23	UI: Tippie	58.25	26.74	80.5
9	CM: Tepper	54.02	18.69	71.93	24	UM: Ross	63.23	28.36	69.61
10	CBS	83.44	32.94	71.63	25	UP: Wharton	77.11	32.51	91.59
11	CU: Johnson	60.54	30.31	55.99	26	UR: Simon	60.25	29.6	49.25
12	DU: Fuqua	64.05	27.25	64.68	27	UV: Darden	76.49	19.05	37.68
13	EBS	54.61	60.15	14.45	28	UWO: Ivey	50.04	40.55	53.55
14	HBS	77.84	29.05	93.91	29	VU: Owen	64.67	26.33	35.14
15	IBS	61.99	54.61	49.04	30	YU: Schulich	57.03	50.73	47.55

注: 数据来源于文献 [10].

表 2 各决策者的分类信息

Table 2 The assignment examples given by the DMs

决策者	$e_1$				$e_2$				$e_3$				
方案	$a_1$	$a_2$	$a_{12}$	$a_{14}$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_{29}$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_{12}$	$a_{29}$
分类	$C^5$	$C^4$	$C^3$	$C^5$	$C^4$	$C^3$	$C^3$	$C^4$	$C^2$	$C^2$	$C^1$	$C^4$	$C^1$

取  $\theta = 1, \varepsilon = 0.01, M = 2$  故  $\rho = \frac{|\cup A_k^*|}{\varepsilon_1} =$

500. 将参数代入 MLP 0 模型, 利用 Lingo 9.0 求解, 最优解  $y_1^5 = y_2^4 = y_3^4 = y_5^3 = y_6^2 = y_7^2 = y_8^1 = y_{12}^4 = y_{14}^5 = y_{29}^1 = 1, y_4^3 = y_{12}^3 = y_{29}^2 = y_{29}^3 = y_{29}^4 = 0$  因此, 最佳群体一致案例集为  $A^* = \{a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7, a_8, a_{12}, a_{14}, a_{29}\}$  对应的分类结果为  $C(a_1) = C(a_{14}) = C^5, C(a_2) = C(a_3) = C(a_{12}) = C^4, C(a_5) = C^3, C(a_6) = C(a_7) = C^2, C(a_8) = C(a_{29}) = C^1$ .

通过群体案例集可以发现, 决策者们在方案

$a_4, a_{12}$  和  $a_{29}$  上存在分歧, 方案  $a_4$  没有选入群体案例集, 方案  $a_{12}$  和  $a_{29}$  的群体分类结果与决策者  $e_3$  的分类结果一致, 因此群体案例集最大程度地反映了决策者  $e_3$  的分类信息(决策者  $e_3$  的权重最大).

步骤 3 利用群体案例集  $A^*$  及其分类结果建立 MLP 1 模型, 获得各方案的精确分类, 如图 3, 方案  $a_8, a_9, a_{13}, a_{19}, a_{23}, a_{28}, a_{29}$  放入  $C^1$ , 方案  $a_6, a_7, a_{11}, a_{26}$  放入  $C^2$ , 方案  $a_5, a_{27}, a_{30}$  放入  $C^3$ , 方案  $a_2, a_3, a_4, a_{12}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{18}, a_{21}, a_{24}$  放入  $C^4$ , 方案  $a_1, a_{10}, a_{14}, a_{20}, a_{22}, a_{25}$  放入  $C^5$ .

	$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^4$	$C^5$		$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^4$	$C^5$
$a_1$					√	$a_{16}$				√	
$a_2$				√		$a_{17}$				√	
$a_3$				√		$a_{18}$				√	
$a_4$				√		$a_{19}$	√				
$a_5$			√			$a_{20}$					√
$a_6$		√				$a_{21}$				√	
$a_7$		√				$a_{22}$					√
$a_8$	√					$a_{23}$	√				
$a_9$	√					$a_{24}$				√	
$a_{10}$					√	$a_{25}$					√
$a_{11}$		√				$a_{26}$		√			
$a_{12}$				√		$a_{27}$			√		
$a_{13}$	√					$a_{28}$	√				
$a_{14}$					√	$a_{29}$	√				
$a_{15}$				√		$a_{30}$			√		

注: 打勾方格表示本文给出的最佳分类结果.

图 3 各项目的群体分类结果

Fig. 3 The group assignment results of the alternatives

步骤 4 决策者们对群体分类结果比较满意, 决策中止.

### 3.2 方法分析与比较

为了说明方法的合理性与优点, 首先通过实例比较本文方法与文献 [10] 中的方法, 然后从理论上比较本文方法与现有群决策分类方法的异同.

1) 文献 [10] 中的分类方法与本文的思路一致, 即利用案例分类, 不需要设置分类边界. 所不同的是文献 [10] 针对单个决策者, 采用级别优于关系建立分类规则, 此外需要决策者给出无差异

阈值和偏好阈值. 为保持一致, 本文假设在 3.1 节的实例中只有 1 个决策者, 决策者提供的案例信息如表 3. 按照 3.1 节的分类步骤 2 和步骤 3, 获得群体分类结果如图 4.

表 3 各决策者的分类信息

Table 3 The assignment examples given by the DM

决策者	$e_1$							
方案	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$
分类	$C^5$	$C^4$	$C^4$	$C^3$	$C^3$	$C^2$	$C^2$	$C^1$

注: 数据来源于文献 [10].

	$C^1$	$C^2$	$C^3$	$C^4$	$C^5$
$a_1$					√ ☆
$a_2$				√ ☆	
$a_3$				√ ☆	
$a_4$			√ ☆		
$a_5$			√ ☆		
$a_6$		√ ☆			
$a_7$		√ ☆			
$a_8$	√ ☆				
$a_9$	√ ☆				
$a_{10}$					√ ☆
$a_{11}$		√ ☆			
$a_{12}$			√	☆	
$a_{13}$	√ ☆				
$a_{14}$					√ ☆
$a_{15}$			☆	√	
$a_{16}$				☆	√
$a_{17}$				√	☆
$a_{18}$				√	☆
$a_{19}$	√ ☆				
$a_{20}$					√ ☆
$a_{21}$				√ ☆	
$a_{22}$					☆√
$a_{23}$	√	☆			
$a_{24}$				√ ☆	
$a_{25}$					√ ☆
$a_{26}$	√	☆			
$a_{27}$	√ ☆				
$a_{28}$	√ ☆				
$a_{29}$	√	☆			
$a_{30}$		☆	√		

注: 灰底方格表示文献[10]中计算出的每个方案的可行分类结果; 打勾方格表示本文给出的最佳分类结果; 打星号方格表示文献[10]给出的最佳分类结果

图 4 分类结果比较

Fig. 4 Comparison of sorting results

从图 4 中可以看出, 本文所给出的分类结果在文献[10]的可行分类区间中(由灰底方格表示), 因此分类结果与文献[10]的结果是一致的, 这从一定程度上反应了本文方法的合理性.

2) 从分类规则、决策者的偏好信息类型、决策者权重、信息不一致和分类边界参数这 5 个方面比较本文方法与已有群决策方法(文献[18 - 21])的异同, 比较结果如表 4.

从分类规则来看, 文献[18]、[19]和[20]采用基于级别优于关系的分类规则, 文献[21]和本文采用基于效用的分类规则; 从决策者提供的偏好信息类型来看, 文献[18]要求决策者提供模型的全部参数信息, 文献[19]要求提供案例信息和部分参数信息(即无差异阈值、偏好阈值、否决阈值和分类边界方案), 文献[20]要求提供方案与边界的比较信息, 文献[21]和本文方法需要决策者提供案例信息. 从是否考虑决策者权重来看, 文献[18]、[19]和[21]均不考虑决策者的决策权重, 文献[20]和本文方法考虑了决策者权重; 从是否考虑决策者之间信息不一致来看, 文献[18]和[21]中未考虑决策者信息不一致问题, 文献[19]、[20]和本文方法考虑了决策者之间的不一致性; 从是否需要分类边界参数来看, 文献[18]、[19]、[20]和[21]中均需要设置分类边界参数, 本文方法不需要分类边界参数.

表 4 多准则群决策分类方法比较

Table 4 Comparisons between multi-criteria group sorting methods

方法	分类规则	偏好信息	决策者权重	信息不一致	分类边界参数
文献[18]	级别优于关系	全部参数信息	不考虑	不考虑	需要
文献[19]	级别优于关系	案例信息、部分参数信息	不考虑	考虑	需要
文献[20]	级别优于关系	方案与边界比较信息	考虑	考虑	需要
文献[21]	效用函数	案例信息	不考虑	不考虑	需要
本文方法	效用函数	案例信息	考虑	考虑	不需要

## 4 结束语

多准则分类在政治、经济和社会生活中有着广泛的应用,是一类重要的决策分析问题.在企业和组织中,由于单个决策者知识的有限性、认识的局限性、对问题理解的不完整性,决策过程常常需要多个决策者共同参与.然而,现有的多准则分类方法主要集中在单一决策者,对群决策环境下的分类问题研究不深.因此,本文针对多准则群决策分类问题开展了一些研究,提出了案例信息下基于效用函数的群决策分类方法.与已有的群决策分类方法相比,本文方法最大的特点是直接利用各决策者的案例信息和一致性条件分类,不需要设置分类边界参数(如基于级别优于关系方法中的分类边界方案,UTADIS中的边界阈值等等).另外,该方法在分类过程中最大限度地考虑了各

决策者的案例信息和决策权重,这主要体现在:1)利用决策者的权重定义案例信息的可信度;2)在挑选群体案例集时,考虑了两级目标,一级目标是最大化群体案例集的可信度,二级目标是使未挑选出来的个体案例的群体分类结果与其原分类结果的距离最小.同时,文中最后证明了,通过该方法获得的方案分类结果依然满足一致性条件.尽管本文的研究采用了简单线性效用函数,其基本思路和建模方法也可以用于其它形式的效用函数.在本文的研究中,决策者所提供的案例信息是关于部分方案的精确分类,没有考虑到决策者提供不确定性分类信息的情况,这一内容将在后续的研究中不断拓展.此外,在基于级别优于关系的分类方法中,由于分类结果不满足传递性,在定义一致性的时候会存在很多困难,因此如何将本文的思路用于基于级别优于关系的分类方法中也是一个有趣的研究方向.

## 参考文献:

- [1] Zopounidis C, Doumpos M. Multicriteria classification and sorting methods: A literature review [J]. *European Journal of Operational Research*, 2002, 138(2): 229–246.
- [2] Zopounidis C, Doumpos M. A multi-criteria decision aid methodology for the assessment of country risk [J]. *European Research on Management and Business Economics*, 1997, 3(3): 13–33.
- [3] Zopounidis C, Doumpos M. A preference disaggregation decision support system for financial classification problems [J]. *European Journal of Operational Research*, 2001, 130(2): 402–413.
- [4] 杨海军, 太雷. 基于模糊支持向量机的上市公司财务困境预测 [J]. *管理科学学报*, 2009, 12(3): 102–110.  
Yang Haijun, Tai Lei. Predicting financial distress of listed corporations based on fuzzy support vector machine [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2009, 12(3): 102–110. (in Chinese)
- [5] Chen Y, Li K W, Kilgour D M, et al. A case-based distance model for multiple criteria ABC analysis [J]. *Computers and Operations Research*, 2008, 35(3): 776–796.
- [6] Chen Y, Hipel K W, Kilgour D M. Multiple criteria sorting using case-based distance models with an application in water resources management [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2007, 37(5): 680–691.
- [7] Vetschera R, Chen Y, Keith W, et al. Robustness and information levels in case-based multiple criteria sorting [J]. *European journal of Operational research*, 2010, 202(3): 841–852.
- [8] 蔡付龄, 廖貅武. 案例信息不确定下的多属性分类方法 [J]. *系统工程理论与实践*, 2010, 30(3): 513–519.  
Cai Fuling, Liao Xiuwu. Multi-criteria sorting method with uncertainty in assignment examples [J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2010, 30(3): 513–519. (in Chinese)
- [9] Almeida-Dias J, Figueira J R, Roy B. ELECTRE TRI-C: A multiple criteria sorting method based on characteristic reference actions [J]. *European Journal of Operational Research*, 2010, 204(3): 565–580.
- [10] Köksalan M, Mousseau V, Özpeynirci Ö, et al. A new outranking-based approach for assigning alternatives to ordered classes [J]. *Naval Research Logistics*, 2009, 56(1): 74–85.
- [11] 廖貅武, 李垣, 雷宏振. 确定多属性群决策协调权的模型和方法 [J]. *管理科学学报*, 2006, 9(4): 33–39.  
Liao Xiuwu, Li Yuan, Lei Hongzhen. Model and approach for determining the compromise weight of multi-attribute group decision-making problem [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2006, 9(4): 33–39. (in Chinese)
- [12] Zopounidis C, Doumpos M. A multicriteria decision aid methodology for sorting decision problems: The case of financial

- distress [J]. *Computational Economics*, 1999, 14(3): 197–218.
- [13] Doumpos M, Zanakis S, Zopounidis C. Multicriteria preference disaggregation for classification problems with an application to global investing risk [J]. *Decision Sciences*, 2001, 32(2): 333–386.
- [14] Massaglia R, Ostanello A. N-tomic: A support system for multicriteria segmentation problems [M] // *Multiple Criteria Decision Support*. Berlin: Springer Verlag, 1991: 167–174.
- [15] Mousseau V, Slowinski R. Inferring an ELECTRE TRI model from assignment examples [J]. *Journal of Global Optimization*, 1998, 12(2): 157–174.
- [16] Dias L, Mousseau V, Figueira J, et al. An aggregation/disaggregation approach to obtain robust conclusion with ELECTRE TRI [J]. *European Journal of Operational Research*, 2002, 138(2): 332–348.
- [17] Nemery P, Lamboray C. FlowSort: A flow-based sorting method with limiting or central profiles [J]. *TOP*, 2008, 16(1): 90–113.
- [18] Dias L C, Climaco J N. ELECTRE TRI for groups with imprecise information on parameter values [J]. *Group Decision and Negotiation*, 2000, 9(5): 355–377.
- [19] Damart S, Dias L C, Mousseau V. Supporting groups in sorting decisions: Methodology and use of a multi-criteria aggregation/disaggregation DSS [J]. *Decision Support Systems*, 2007, 43(1): 1464–1475.
- [20] Jabeur K, Martel J M. An ordinal sorting method for group decision-making [J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 180(2): 1272–1289.
- [21] Greco S, Mousseau V, Slowinski R. The possible and the necessary for multiple criteria group decision [J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 2009, 5783: 203–214.
- [22] Rocha C, Dias L. An algorithm for ordinal sorting based on ELECTRE with categories defined by examples [J]. *Journal of Global Optimization*, 2008, 42(2): 255–277.
- [23] Bous G, Fortemps P, Glineur F, et al. ACUTA: A novel method for eliciting additive value functions on the basis of holistic preference statements [J]. *European Journal of Operational Research*, 2010, 206(2): 435–444.
- [24] Angilella S, Greco S, Matarazzo B. Non-additive robust ordinal regression: A multiple criteria decision model based on the Choquet integral [J]. *European Journal of Operational Research*, 2010, 201(1): 277–288.
- [25] 章 玲, 周德群. 基于  $k$ -可加模糊测度的多属性决策分析 [J]. *管理科学学报*, 2008, 11(6): 18–24.  
Zhang Ling, Zhou Dequn. Multiple attributes decision making based on  $k$ -additive fuzzy measures [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2008, 11(6): 18–24. (in Chinese)

## Multi-criteria sorting method based on assignment examples in the group decision context

CAI Fu-ling, LIAO Xiu-wu, YANG Na

School of Management, The Key Lab of Education for Process Control & Efficiency, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China

**Abstract:** In the multi-criteria group sorting decision-making problems, the decision makers are often reluctant to provide parameter values of the group sorting model, and the decision complexity increases as multiple decision makers are involved. In this paper, a group sorting method based on assignment examples is proposed. Firstly, the definition of consistency among assignment examples is given according to the property of the utility-function-based sorting methods, and the definition of belief degree on assignment examples is given to reflect the different decision priorities of the decision makers. Then, a mixed integer linear programming model is built to find the consistent assignment example set with the biggest belief degree. Based on the chosen example set and the definition of consistency, all alternatives are assorted through solving another mixed integer linear programming model. During the sorting process, the assignment examples are directly utilized for sorting, so sorting boundaries are no longer needed. At last, a sorting example on MBA program is provided to demonstrate the feasibility and rationality of the proposed method.

**Key words:** multi-criteria sorting; group decision-making; assignment examples; decision priority; consistency