第16卷第10期
2013年10月
管理科学学报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol. 16 No. 10
Oct. 2013

尖锥网络分析法①

李春好，陈维峰，苏　航，李　巍，李孟姣
（吉林大学管理学院，长春 130025）

摘要: 网络分析法（ANP）在关于元素集内部自依赖关系和元素集之间相对重要性的比较上采取的形式为“相对甲来比较甲和乙”的主观判断模式，必然会导致决策者给出明显武断随意的判断结论，其关于元素集的赋权也存在着过于武断的理论缺陷. 此外，ANP没有区别元素集内部元素在源发性、过渡性、接收性上的结构特征差异对元素权重计算的影响. 为解决ANP的上述缺陷，通过构建全新的系统分析结构即尖锥网络分析结构，经严格理论推导对现行ANP予以了理论创新与重构，提出了一种明显区别于ANP的新理论方法即尖锥网络分析法. 数值验证表明，相对于ANP，尖锥网络分析法可以显著提高评价结论的科学合理性.

关键词: 网络分析法; 层次分析法; 自依赖关系; 尖锥元素集; 尖锥网络; 极限排序权重
中图分类号: C934; N94　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1007－9807（2013）10－0011－14

0　引　言

层次分析法（analytic hierarchy process，AHP）现已成为解决复杂系统问题的常用分析方法[1-2]. 为克服AHP不能反映复杂系统内部元素之间依赖与反馈关系的缺陷，Saaty在AHP的基础上发展提出了网络分析法（analytic network process，ANP）[3-4]. 由于ANP考虑了系统元素和元素集之间的依赖和反馈关系，因此被认为是一种比AHP更有利于反映复杂系统问题实际情况的评价与决策分析工具[5-6].

然而，已有文献在应用ANP时尽管反复解释相对简单的系统关系比较（如一个元素集中的元素之间相对于另一个元素集的某个元素的外部依赖关系比较），但对于ANP区别于AHP的方法关键即关于元素集内部自依赖关系（其具体含义请详见后文）和元素集之间重要性判断的比较却避而不谈，明显缺乏含义描述清晰、较有应用指导意义的比较机理解释[7-12]. 对此问题，国内外的相关研究尚极其罕见，除Wu和Yu、Tzemg发表的两篇论文外，据作者所知迄今尚无其它相关研究成果报道[13-14]. Wu虽然认为ANP在分析元素集内部依赖关系上存在理论缺陷，决策者进行有关比较判断是非常困难的，但并没有阐明其中的具体问题及其成因[13]. Yu、Tzemg尽管类似地指出了ANP应用中存在着决策专家很难对元素（集）之间的依赖、反馈关系进行偏好判断的方法缺陷，但是也没有对此问题在ANP方向上开展相关的深入研究，只是通过引入模糊认知图技术（fuzzy cognitive map，FCM）试图来间接描述元素集之间的依赖与反馈关系[14]. 由于这种处理必会隐含遇到FCM内在的阈值函数形式难以选择问题，因此并没有从实质上解决其指出的ANP方法缺陷[15].

回顾Saaty关于ANP元素（集）依赖关系比较的研究文献可以发现：在决策者或专家进行关于系统关系的比较判断模式上，无论是关于元素集内部依赖关系的判断，还是关于元素集之间相

① 收稿日期: 2011－04－08; 修订日期: 2011－10－19.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目（70971054; 70471015）; 教育部新世纪优秀人才支持计划（NECT－09－419）; 教育部人文社会科学研究规划基金资助项目（09YJA00067）; 吉林大学杰出青年基金资助项目（2010）; 吉林大学“985工程”资助项目.
作者简介: 李春好（1966—），男，辽宁盖州人，博士，教授，博士生导师. Email: jyhlichunhao@sina.com

对重要性比较的判断，他均认为与 AHP 并没有本质差别，均可以直接采用与 AHP 一样的两两比较判断模式[3-4]. 与 Saaty 的看法不同，作者在借鉴 Wu 和 Yu、Tzemg 相关看法的基础上认为，ANP 在关于元素集内部依赖关系和元素集之间相对重要性的比较上所采取的判断模式，其实质上采用的是一种在 AHP 两两比较判断中并没有出现的、形式为“相对甲来比较甲和乙”的特殊比较逻辑; 该比较逻辑不仅从时间静态上看不成立，而且即使从时间动态上看也必然会使决策者给出的比较判断结论存在明显的主观随意性和武断性(其中原因详见第 2 部分) . 不仅如此，作者进一步通过一个数值例子验证指出，ANP 关于元素集相对重要性比较的权重赋值方法也存在着过于武断的理论缺陷.

另外，Saaty 针对 ANP 的分析结构，将评价与决策问题的元素集划分为三种类型，即源发性元素集、过渡性元素集和接收性元素集[3-4]. 其中，源发性元素集在 ANP 分析结构中仅有出自于它、没有指向它的箭线(关于箭线的含义详见后文) ; 过渡性元素集既有源自于它的箭线又有出自于它的箭线; 接收性元素集则仅有指向它的箭线、没有出自于它的箭线. 但对他们的研究，Saaty 仅停留于示意性概念的提出，他自己也承认在 ANP 的具体方法构建中并没有使用上述三个概念[3]. 因此，ANP 没有区别元素集及其内部元素在源发性、过渡性、接收性上的结构特征差异对元素权重计算的影响，关于评价与决策问题的系统结构特征尚缺乏深入刻画与描述.

针对上述明显的理论方法缺陷以及解决现实复杂系统评价与决策问题的需要，下文在简介 AHP 与 ANP 有关理论要点、深入分析 ANP 主要缺陷的基础上，提出一种明显区别于 ANP 的全新分析结构即尖锥网络分析结构，并基于该结构经严格理论推导给出明显区别于 ANP 的权重计算方法. 为突出新理论方法与 ANP 的差异，作者将它称为尖锥网络分析法(ANP based on the cone network，Cone-ANP) .

1 相关基础知识

1.1 AHP

AHP 的分析步骤依次为: 先构建系统问题的层次结构，然后相对于上层次任一元素构建下一层次与此相关的所有元素之间的两两偏好判断矩阵，得出层次单排序权重(如图 1 中相对于 H_1 的权重 w_{11}、w_{12}、w_{13}) ，最后按照权重计算原理得出下层元素(直至最底层元素) 的复合排序权重. 参见图 1，AHP 中元素权重的计算，主要依赖下述两个原理[1].

1) 权重分解原理. 当上层元素(H_1) 的权重($w^{(1)}$) 向下层元素 L_1、L_2、L_3 进行分解时，L_1、L_2、L_3 得到来自于 $w^{(1)}$ 的权重分配比例分别为 w_{11}、w_{12} 和 w_{13}，其中 w_{11}、w_{12}、w_{13} 为由 L_1、L_2、L_3 相对于 H_1 的 AHP 两两比较偏好判断矩阵计算得出的偏好权重，它们满足 $w_{11} + w_{12} + w_{13} = 1$. 因此，$L_1$、$L_2$、$L_3$ 得到来自于 $w^{(1)}$ 的权重分配($w_{11}w^{(1)}$、$w_{12}w^{(1)}$、$w_{13}w^{(1)}$) 与上层元素 H_1 的权重 $w^{(1)}$ 之间存在下述关系

$$w_{11}w^{(1)} + w_{12}w^{(1)} + w_{13}w^{(1)} = w^{(1)} \tag{1}$$

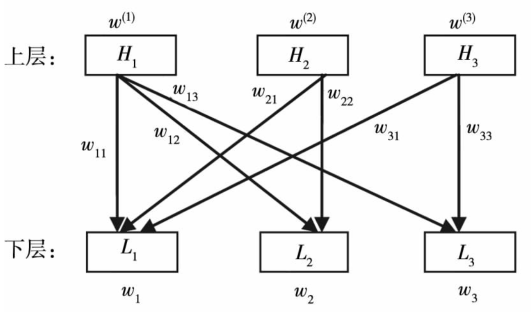

图 1 AHP 权重计算原理

Fig. 1 Computation principles of weights in AHP

2) 复合权重综合原理. 参见图 1，设上层元素的权重($w^{(1)}$、$w^{(2)}$、$w^{(3)}$) 分别按分配比例“w_{11}、w_{12}、w_{13}”、“w_{21}、w_{22}”和“w_{31}、w_{33}”向下层元素进行分解，则在 AHP 中下层元素(以 L_1 为例) 的最终排序权重即复合权重(w_1) 按如下原理进行综合

$$w_1 = w_{11}w^{(1)} + w_{21}w^{(2)} + w_{31}w^{(3)} \tag{2}$$

1.2 ANP

概言之，ANP 的主要分析步骤依次为: 对决策问题构建由元素集组成、反映元素集及其元素之间依赖关系和反馈关系的网络分析结构(如图 2) ，基于该结构邀请专家或决策者主观判断给出决策问题的超矩阵或加权超矩阵，最后对构造出的超矩阵或加权超矩阵求极限，得出系统各个元素的极限排序权重(向量) [3-4,13-14]. 其要点为

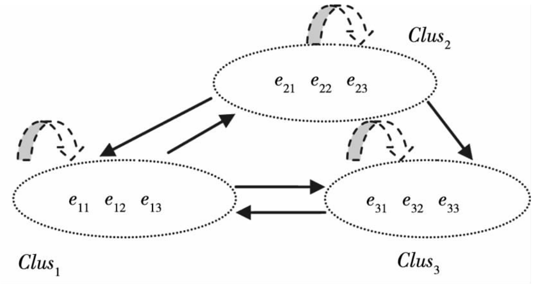

图2 ANP网络分析结构

Fig. 2 Analytic network used in ANP

1）元素集. 参见图2，元素集如$Clus_1$、$Clus_2$和$Clus_3$为影响决策选择、有共性的元素的集合，是ANP网络分析结构的基本构成单元. 其中的元素为决策问题的系统要素如准则、指标、方案等. 根据共性原则和决策分析的深度，所有准则（或指标）均可形成一个或几个元素集.

2）支配、依赖与反馈关系. 支配关系是为便于主观判断而对客观系统内在因果影响关系的反向表达. 例如，若元素（或元素集）X、X'对元素（或元素集）Y有因果关系影响，则在ANP与AHP中将它们之间的关系表达为Y支配X并用“$Y \to X$”予以表示，并通常从偏好比较视角上把它称作X对Y具有偏好依赖关系或依赖关系；在相对权重两两比较判断中，专家应相对于Y进行关于X、X'的两两比较偏好判断并采用1、3、5、7、9（或它们的倒数）来标度相对重要（次要）程度[1,3-4]. 在ANP中依赖关系进一步分为元素集中元素之间存在的内部依赖关系（在图2中表示为起点与终点均为同一个元素集的双虚箭线环）和不同元素集的元素之间存在的外部依赖关系（在图2中表示为介于不同元素集之间的箭线）. 当多个元素（集）之间的箭线成闭合回路时，这些元素（集）被称作具有反馈关系.

3）超矩阵. 以图2所示的分析结构为例，应用ANP需要构造超矩阵

$$A = \begin{array}{c|ccc} & Clus_1 & Clus_2 & Clus_3 \\ \hline Clus_1 & \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} \\ Clus_2 & \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} \\ Clus_3 & \boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{A}_{32} & \boldsymbol{A}_{33} \end{array} \tag{3}$$

其中除子矩阵A_{23}为零阵外，其余子矩阵为非零阵. 超矩阵A中处于正对角线上的各个子阵分别反映的是它们各自所在列上方元素集的自我依赖关系，因此被称作自依赖（子）矩阵；除此之外的子阵称为其所在列上方元素集的外部依赖矩阵. 非零子矩阵A_{ij}（除自依赖矩阵和A_{23}之外）即非零非自依赖子矩阵的具体结构为

$$\boldsymbol{A}_{ij} = \begin{array}{c|ccc} & e_{j1} & e_{j2} & e_{j3} \\ \hline e_{i1} & w_1^{(j1)} & w_1^{(j2)} & w_1^{(j3)} \\ e_{i2} & w_2^{(j1)} & w_2^{(j2)} & w_2^{(j3)} \\ e_{i3} & w_3^{(j1)} & w_3^{(j2)} & w_3^{(j3)} \end{array} \tag{4}$$

其中每一列为先相对于该列上方元素（如e_{j1}）对元素e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}（$i \neq j$）进行两两比较偏好判断矩阵构造、然后由该判断矩阵按AHP权重计算方法所得出的权重向量. 由此可知，A_{ij}为列和等于1的方阵，并且由于其中的元素非负因而也是列随机方阵.

迄今，Saaty关于ANP自依赖矩阵的构建给出了两种方法[3]：其一，不用专家判断，直接规定为单位矩阵；其二，类似于上述非零非自依赖子矩阵的构造方法，矩阵中的每一列为先相对于该列上方元素（如e_{i1}）对元素e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}进行两两比较偏好判断矩阵构造、然后由该判断矩阵按AHP权重计算方法所得出的权重向量. 为便于下文叙述，本文将它们分别简称为“单位矩阵法”和“两两比较权重向量法”.

4）加权超矩阵. ANP指出，当构造出的超矩阵为非列随机矩阵时，需要对其中的子矩阵进行加权，形成加权超矩阵. 以A为例，对应它的加权超矩阵$\bar{A}$具有如下结构形式

$$\bar{A} = \begin{array}{c|ccc} & Clus_1 & Clus_2 & Clus_3 \\ \hline Clus_1 & \boldsymbol{\beta}_{11}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{\beta}_{12}\boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{\beta}_{13}\boldsymbol{A}_{13} \\ Clus_2 & \boldsymbol{\beta}_{21}\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{\beta}_{22}\boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{\beta}_{23}\boldsymbol{A}_{23} \\ Clus_3 & \boldsymbol{\beta}_{31}\boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{\beta}_{32}\boldsymbol{A}_{32} & \boldsymbol{\beta}_{33}\boldsymbol{A}_{33} \end{array} \tag{5}$$

其中$\boldsymbol{\beta}_{ij}$为由决策者或专家判断给出、对A的第j列各个子矩阵的加权值，并且它们需要满足$\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\beta}_{ij} = 1, j = 1, 2, 3$. 显然，对超矩阵加权后形成的加权超矩阵$\bar{A}$为列随机矩阵. 按照ANP的方法程序，子矩阵的加权值向量$(\boldsymbol{\beta}_{1j}, \boldsymbol{\beta}_{2j}, \boldsymbol{\beta}_{3j})^{\mathrm{T}}$，为决策专家先相对于第$j$个元素集构建所有元素集（$Clus_i, i = 1, 2, 3$）的两两比较判断矩阵、然后由此矩阵按AHP权重计算方法所得出的权重向量.

5）极限超矩阵与极限排序权重向量. ANP指出，由于超矩阵$\bar{A}$为列随机矩阵，因此当$d \to +\infty$

时 $\bar{A}^{d}$ 要么收敛要么振荡收敛. 当 $\bar{A}^{+\infty}$ 存在时，超矩阵 $\bar{A}$ 的极限超矩阵为 $\bar{A}^{+\infty}$. 它为列相等矩阵，其任一列即为决策问题各元素集元素的极限排序权重向量. 当 $\bar{A}^{d}$ 振荡收敛时，超矩阵 $\bar{A}$ 的极限超矩阵及极限排序权重向量需由 Cessaro 和予以求出，关于这方面的具体方法细节请详见文献 [3 – 4].

2 ANP 的方法缺陷

1) 自依赖子矩阵的构建问题

当采用两两比较权重向量法构建自依赖矩阵时，ANP 要求决策者或专家相对于元素集内部每一个元素来判断元素集中包括它在内的所有元素之间的两两比较相对偏好(重要性) . 其中必然会使决策者遇到一种形式为“相对甲来比较甲和乙”、涉及元素甲自依赖关系的主观判断. 由于从某一个时间点上静态地看，任何系统元素都不会对自身产生影响，或者说，一个元素只能伴随着时间的推移通过它与不同元素之间存在的作用产生自己对下一时刻的自己的影响，因此只有从时间动态上分析元素的自依赖关系才有意义. 尽管如此，针对于自依赖矩阵的构建，ANP 在基于“相对甲来比较甲和乙”的比较逻辑给出两两比较权重向量法时，却未对自依赖关系的时间特征予以任何考察分析. 若从时间动态角度上审视 ANP 采用的“相对甲来比较甲和乙”的主观判断，为使之有逻辑合理性则只能将它解释为: 相对于某元素的下一时刻状况而言，人们关于该元素的现在状况与其它元素的现在状况的相对偏好比较判断. 然而，“下一时刻”仅是一个数学抽象概念，并没有具体明确该时刻距离“现在”的时间间隔. 由于时间间隔的不同必然带来“下一时刻”元素状况的不同，因此，在参照物(即下一时刻的元素状况) 仅为一个数学抽象、缺乏具体明确性的情境下，即使采用上述解释，“相对甲来比较甲和乙”的比较逻辑也必然会使决策者的比较判断结论存在明显的主观随意性和武断性.

当 ANP 采用具有直接规定、不再需要主观比较判断特点的单位矩阵法去构建自依赖矩阵时，虽然可以在形式上回避两两比较权重向量法所存在的比较逻辑问题，可是从其隐含的方法本质上看也会在比较逻辑上出现明显的武断随意性. 具体地讲，在规定为单位矩阵的自依赖矩阵中，每个列向量里数值为 1 的分量反映的是列向量对应元素存在自依赖关系，其余数值为 0 的分量反映的是列向量对应元素对元素集中其它元素不存在依赖关系. 这一方面会人为武断地在系统结构中添加进客观上并不存在的元素自依赖关系，另一方面也会错误地否定元素集内部不同元素之间可能确实存在的依赖(或支配) 关系.

综上所述易见，目前无论采用单位矩阵法还是采用两两比较权重向量法来构建自依赖矩阵，ANP 均存在着明显的方法缺陷. 此外，尽管 Saaty 在其 ANP 著作中曾指出采用单位矩阵法和两两比较权重向量法构建自依赖矩阵会导致不同的排序权重结果这一问题，但是并没有对两种方法的使用条件或使用情境做任何阐述说明[3].

2) 元素集加权问题

在 ANP 中，对元素集(或超矩阵中其对应的子矩阵) 进行加权，是保证求解极限排序权重所依赖的超矩阵为列随机矩阵的一个技术关键. 参见前文加权超矩阵 $\bar{A}$ 的结构表达式及图 2，尽管 ANP 指出对应于各个子矩阵的加权值(如 β_{11}、β_{21}、β_{31}) 由决策者或专家相对于一个共同的元素集(如 $Clus_1$) 对包含它的所有元素集(如 $Clus_1$、$Clus_2$、$Clus_3$) 进行两两比较相对重要性判断形成判断矩阵、然后利用 AHP 权重计算方法加以给出，但分析这种权重确定过程可以发现，其中采用的“相对甲元素集比较甲、乙元素集哪一个更重要”的判断模式，在比较逻辑上与前文自依赖矩阵构建所采用的“相对甲来比较甲和乙”的判断模式完全类似，因而也极易对元素集给出具有武断随意性的错误赋权.

不仅如此，ANP 对元素集采取的分块加权方法也存在着明显缺陷. 为证实该问题，下面给出一个数值例子.

参见图 3 所示的 ANP 网络分析结构(注: 元素集 $Clus_1$ 中的元素 e_{10} 及它对 e_{11}、e_{12} 的箭线在这里假定不存在即它们不属于数值例子的系统结构构成) ，并注意到系统元素 e_{11}、e_{12}、e_{21}、e_{22}、e_{23} 均不存在自依赖关系的事实，这里决策者仅需相对于每个元素分别对除该元素以外的所有其它元素进

行相对重要性两两比较判断，并在此基础上按 AHP 权重计算方法得出权重向量. 现假设这些得出的权重向量分别如矩阵 Q_0 的各列所示

$$
\boldsymbol{Q}_0 = \begin{array}{c} \\ e_{11} \\ e_{12} \\ e_{21} \\ e_{22} \\ e_{23} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_{11} & e_{12} & e_{21} & e_{22} & e_{23} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0.1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.1 & 0.3 & 0.7 \\ 0.2 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 & 0 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

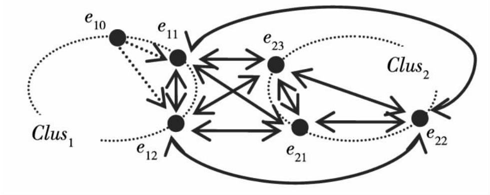

图 3　数值例子的 ANP 网络分析结构

Fig. 3 ANP analytic network of the example

若将该例的系统结构中各个元素看成为某个随机变量的状态，各个元素的排序权重看成为该变量的状态概率，矩阵 Q_0 的列向量看成为该变量从某个状态(即列向量对应的元素)向其它状态演变的一步传递概率向量，则结合图 3 可知，该随机变量具有马尔可夫性并且其一步传递概率矩阵为 Q_0 [16]. 这样从客观意义上讲，由马尔可夫随机过程理论可知，该随机变量的稳态概率向量(即各元素的极限排序权重)为

$$[0.288, 0.219, 0.117, 0.212, 0.164]^{\mathrm{T}}$$

另一方面，由于矩阵 Q_0 及图 3 的系统结构表明系统不存在元素自依赖关系，这样依据矩阵 Q_0 中的权重信息和 ANP 的超矩阵构造方法可知，相对于元素集 $Clus_1$ 而言，$Clus_1$ 的自依赖子阵和外部依赖子阵分别为

$$\boldsymbol{A}'_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0.7/0.7 \\ 0.1/0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}'_{21} = \begin{bmatrix} 0.2/0.9 & 0.1/0.3 \\ 0.4/0.9 & 0.1/0.3 \\ 0.3/0.9 & 0.1/0.3 \end{bmatrix}$$

相对于元素集 $Clus_2$ 而言，元素集 $Clus_2$ 的外部依赖子阵和自依赖子阵分别为

$$\boldsymbol{A}'_{12} = \begin{bmatrix} 0.1/0.2 & 0.5/0.8 & 0.1/0.8 \\ 0.1/0.2 & 0.3/0.8 & 0.7/0.8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}'_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1/0.2 & 0.1/0.2 \\ 0.5/0.8 & 0 & 0.1/0.2 \\ 0.3/0.8 & 0.1/0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

这样，由 $\boldsymbol{A}'_{11}$、$\boldsymbol{A}'_{21}$、$\boldsymbol{A}'_{12}$、$\boldsymbol{A}'_{22}$ 可以得出 ANP 分析的超矩阵为

$$
\boldsymbol{A}' = \begin{array}{c} \\ e_{11} \\ e_{12} \\ e_{21} \\ e_{22} \\ e_{23} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_{11} & e_{12} & e_{21} & e_{22} & e_{23} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 7/7 & 1/2 & 5/8 & 1/8 \\ 1/1 & 0 & 1/2 & 3/8 & 7/8 \\ 2/9 & 1/3 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 4/9 & 1/3 & 5/8 & 0 & 1/2 \\ 3/9 & 1/3 & 3/8 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

需要强调指出，超矩阵 A' 因系统问题客观上并不存在元素自依赖关系从而回避了前述 ANP 自依赖子矩阵构建方法中出现的形式为“相对甲来比较甲和乙”的比较逻辑以及由此带来的虚假判断信息，因此可以充分保证下文旨在揭示 ANP 对超矩阵分块加权所存在的方法缺陷的对比分析严谨性.

依据 ANP，由于超矩阵 A' 的列和不为 1，因此需对各个分块矩阵 $\boldsymbol{A}'_{11}$、$\boldsymbol{A}'_{21}$、$\boldsymbol{A}'_{12}$、$\boldsymbol{A}'_{22}$ 予以分块加权. 由于 ANP 方法指出，当系统问题的元素集仅有两个时，不需要再让决策者进行元素集两两比较判断，采用等值对各个分块矩阵赋权即可 [3]，因此对应于 $\boldsymbol{A}'_{11}$、$\boldsymbol{A}'_{21}$、$\boldsymbol{A}'_{12}$、$\boldsymbol{A}'_{22}$ 的加权值分别为 $\beta_{11} = \beta_{21} = 0.5$、$\beta_{12} = \beta_{22} = 0.5$. 利用这些加权值对超矩阵 A' 进行加权，构造出 A' 的加权超矩阵，ANP 分析最终得出的元素极限排序权重向量为

$$[0.238, 0.262, 0.156, 0.185, 0.159]^{\mathrm{T}}$$

将该权重向量与前文采用马尔可夫随机过程理论得出的客观权重向量加以对比可以看出，ANP 对超矩阵各个子阵的分块加权方法使得由它得出的权重结果，不仅在数值上相对客观结果存在着明显偏离，而且在元素重要性排序上也相对客观结果产生了逆序. 例如，在客观权重向量中，元素 e_{11} 的极限排序权重(0.288)大于元素 e_{12} 的极限排序权重(0.219)，而在 ANP 分析得出的元素极限排序权重向量中元素 e_{11} 的权重(0.238)却被评价为小于元素 e_{12} 的权重(0.262). 由此可见，ANP 采用的元素集加权方法的确不够合理，

存在着明显的理论缺陷.

3 尖锥元素集结构与尖锥网络分析结构

为科学解决 ANP 在自依赖子矩阵构建和元素集加权上存在的明显理论缺陷，下文通过引入锥顶元素概念和价值导向超平面提出明显区别于 ANP 的尖锥元素集结构和尖锥网络分析结构. 其具体构成请参见图 4 和图 5.

1) 尖锥元素集结构

尖锥元素集与 ANP 元素集在构成元素上完全相同，均由影响决策选择、有共性的元素所组成，但在结构关系的表达上则有明显差异. 参见图 4，与尖锥元素集某元素关联的双线箭线表示该元素对外部其它元素集元素支配关系的总和(对应于出自该元素的双线箭线)或它受外部其它元素集元素支配的关系总和(对应于指向该元素的双线箭线)，其余箭线表示元素集内部各元素之间的支配或依赖关系.

在尖锥元素集结构中，基于元素之间的支配关系，元素被划分为两类，一类元素如 e_0 被称为锥顶元素，另外一类元素如 e_1 被称为锥底元素或底面元素. 其中，锥顶元素与 Saaty 提出的源发性元素集类似，其结构特征是仅有出自于它的箭线、没有指向它的箭线；锥底元素与 Saaty 提出的过渡性元素集类似，其结构的特征为除锥顶元素指向该元素的支配性箭线外，既有源自于元素集内部或外部其它锥底元素、指向它的箭线，又有出自于它、指向其所在元素集内部或外部锥底元素的箭线. 事实上，更具一般性的尖锥元素集除上述两类元素外还可能有第三类“只进不出”型锥底元素，它与 Saaty 提出的接受性元素集类似，仅有其它锥底元素指向它的箭线，没有出自于它、指向其它锥底元素的箭线. 此外，一个尖锥元素集可能具有多个锥顶元素也可能没有锥顶元素. 限于篇幅，这里及下文仅讨论锥顶元素至多有一个、无“只进不出”型锥底元素的一类尖锥元素集及由该类元素集组成的尖锥网络分析结构.

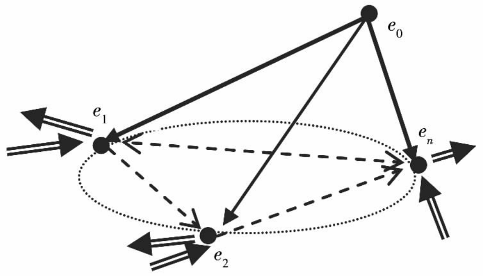

图 4 尖锥元素集结构

Fig. 4 Analytic cone network of the cluster

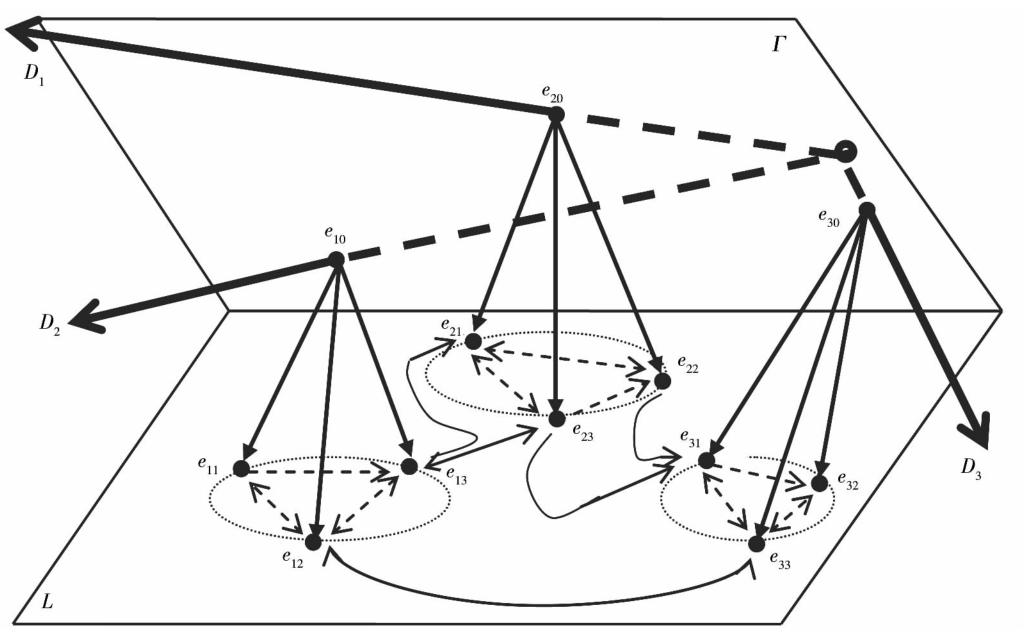

图 5 尖锥网络分析结构

Fig. 5 Analytic network of cone clusters

相对于 ANP 的元素集结构，尖锥元素集结构的本质区别在于如何认知与处理元素的自依赖关系. 如第 2 部分中所述，ANP 在元素集自依赖子矩阵构建上采用的单位矩阵法和两两比较权重向量法均假设元素存在自依赖(或反过来讲为自支配)关系，但对自依赖关系的时间特征及该特征对元素权重的影响却未予以考察分析. 与此不同，基于时间静态条件下系统元素不会对自身产生影响以及时间静态条件下主观判断更直观、更容易为决策者把握的事实，本文认为对复杂评价与决策问题应坚持“静态主观判断、动态客观建模”的分析思想[10]，因此在尖锥元素集结构中不再承认时间静态条件下系统存在元素自依赖关系，只承认系统存在时间动态意义上的元素自依赖，并在结构表达上为明确静态主观判断思想不再表达仅在时间动态下才有意义的自依赖关系. 这样，在尖锥元素集的结构表达中，不再有类似于 ANP 元素集结构中为反映含义模糊不清的元素自依赖关系而采用的箭线环.

2) 尖锥网络分析结构

除上述的系统基本构成即尖锥元素集区别于 ANP 元素集的结构特征之外，尖锥网络分析结构在全局上区别于 ANP 网络分析结构的特征主要有如下两点.

其一，引入了价值导向超平面 Γ，将 ANP 的平面网络分析结构发展为立体网络分析结构. 直观上讲，若将锥顶元素所在多维空间(如图 5 示意的维度 D_1，D_2，D_3 构成的空间 $D_1 \times D_2 \times D_3$)看成决策者的价值体系，那么明确了各个锥顶元素的位置也就在该多维空间中定义了决策问题的价值导向超平面 Γ(关于空间维度或价值体系的具体含义请参见下文第 4 部分中的相关解释). 反过来讲，决策者对一个决策问题选定了其具体的价值导向超平面 Γ 也就在多维价值空间中规定了(但决策者未必事先知道)所有尖锥元素集其锥顶元素的具体位置. 因此，价值导向超平面与所有锥顶元素存在一一对应关系. 由于每个锥顶元素在超平面 Γ 上所处的空间位置又决定了其对应的尖锥结构的棱长或棱长比例(直观上可以将棱长比例解释为元素集中各锥底元素相对于锥顶元素的相对权重)，因此，可以直接采用 AHP 的比较判断模式给出所有锥底元素相对于各自锥顶元素的权重，并利用这些权重和锥顶元素权重之间的联系(请参阅下文式(9))间接反映出决策者对一个决策问题的具体价值导向. 由此可见，引入价值导向超平面和锥顶元素的尖锥网络分析结构，不再像 ANP 那样为了从全局上得出元素集的价值衡量而需要在相对偏好比较含义极其模糊不清的情况下，武断地采用形式为“相对于甲来比较甲和乙”、必然会导致主观判断存在明显随意性和武断性的比较逻辑，进行关于元素集与元素集的相对偏好比较判断.

其二，与 ANP 对系统依赖关系分别进行内部依赖和外部依赖的局部偏好判断不同，在尖锥网络分析结构中对底面上的每一个元素都要求决策者或专家相对于它，对底面上所有出自于它的箭线的箭头元素进行全局性两两比较偏好判断. 需要指出，由于构成系统结构的每个尖锥元素集均无时间静态条件下的元素自依赖关系，因此尖锥网络分析结构所要求的全局性比较判断与 AHP 采用的比较判断在模式上是完全相同的，均是一组元素之间相对于组外一个元素的两两比较相对偏好判断，具有与 AHP 完全相同的实施可行性. 这便可以规避 ANP 为分析元素集内部偏好依赖关系所采用的形式为“相对于甲来比较甲和乙”的比较逻辑.

4　尖锥网络分析的权重计算方法

不失一般性，设尖锥网络分析结构中有 M 个尖锥元素集，分别记为 $Clus_{\text{Cone-ANP}}(m) = \{e_{m0};e_{m1},e_{m2},\cdots,e_{mn_m}\}$，$m = 1,\cdots,M$，其中 n_m 为尖锥元素集 $Clus_{\text{Cone-ANP}}(m)$ 中除锥顶元素 e_{m0} 以外的元素个数. 与图 5 类似，设这 M 个元素集的非锥顶元素在底面 L 上，所有锥顶元素在超平面 Γ 上. 当锥

顶元素 e_{m0} 存在时，根据 AHP 的两两比较判断模式，可以相对于 e_{m0} 构造关于 $Clus_{\text{Cone-ANP}}(m)$ 中元素 $e_{m1}, e_{m2}, \cdots, e_{mn_m}$ 的相对偏好判断矩阵并依据该矩阵计算出这些元素相对于 e_{m0} 的偏好权重 $\delta_{m1}, \delta_{m2}, \cdots, \delta_{mn_m}$，并且有

$$\delta_{m1} + \delta_{m2} + \cdots + \delta_{mn_m} = 1, m = 1, \cdots, M \tag{6}$$

显然，当某个尖锥元素集没有锥顶元素时，其底面元素并不存在相对于锥顶元素的相对偏好权重（$\delta\cdot$）. 设尖锥网络系统在时刻 t 时尖锥元素集 $Clus_{\text{Cone-ANP}}(m)$ 中各个底面元素的权重分别为 $w_{m1}^{(t)}, \cdots, w_{mn_m}^{(t)}, m = 1, \cdots, M, t = 0, 1, 2, \cdots$，并且记

$$W^{(t)} = (w_{11}^{(t)}, \cdots, w_{1n_1}^{(t)}, w_{21}^{(t)}, \cdots, w_{2n_2}^{(t)}, \cdots, w_{M1}^{(t)}, \cdots, w_{Mn_M}^{(t)})^{\mathrm{T}}, t = 0, 1, 2, \cdots \tag{7}$$

当尖锥元素集 $Clus_{\text{Cone-ANP}}(m)$ 存在锥顶元素 e_{m0} 时，设它在时刻 t 时的权重为 $w_{m0}^{(t)}, m = 1, \cdots, M, t = 0, 1, 2, \cdots$，则从锥顶元素对底面元素的支配关系上看可由 AHP 权重分解原理得知

$$w_{m0}^{(t)} = w_{m1}^{(t)} + \cdots + w_{mn_m}^{(t)}, t = 0, 1, 2, \cdots \tag{8}$$

$$w_{mh_m}^{(t)} = \delta_{mh_m} \times w_{m0}^{(t)}, h_m = 1, \cdots, n_m \tag{9}$$

或者

$$w_{mh_m}^{(t)} = \delta_{mh_m} w_{m1}^{(t)} + \cdots + \delta_{mh_m} w_{mn_m}^{(t)}, t = 0, 1, 2, \cdots, m = 1, \cdots, M, h_m = 1, \cdots, n_m \tag{10}$$

当尖锥元素集 $Clus_{\text{Cone-ANP}}(m)$ 不存在锥顶元素 e_{m0} 时，显然恒有

$$w_{mh_m}^{(t)} = w_{mh_m}^{(t)}, t = 0, 1, 2, \cdots, m = 1, \cdots, M, h_m = 1, \cdots, n_m \tag{11}$$

由式（10）和（11）可知

$$W^{(t-1)} = BW^{(t-1)}, t = 1, 2, \cdots \tag{12}$$

其中

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_M \end{bmatrix} \tag{13}$$

并且当锥顶元素 e_{m0} 存在时

$$\boldsymbol{B}_m = \begin{bmatrix} \delta_{m1} & \delta_{m1} & \cdots & \delta_{m1} \\ \delta_{m2} & \delta_{m2} & \cdots & \delta_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{mn_m} & \delta_{mn_m} & \cdots & \delta_{mn_m} \end{bmatrix}, m = 1, \cdots, M \tag{14}$$

当锥顶元素 e_{m0} 不存在时，$\boldsymbol{B}_m$ 退化为 n_m 阶单位矩阵，$m = 1, \cdots, M$.

考虑到 $W^{(0)}$ 的分量权重乘以同一个任意正数均不改变其中各个分量权重的排序，因此这里类似于 AHP 和 ANP 规定：$W^{(0)}$ 的各个分量权重非负，并且其和等于 1.

再从底面 L 的视角出发不失一般性设在 L 上尖锥元素集 $Clus_{\text{Cone-ANP}}(m)$ 的任意底面元素 e_{mh_m} 在形式上均对该尖锥元素集内部的其它底面元素以及其它尖锥元素集的所有底面元素形成内部或外部依赖关系，则按照 AHP 相对权重的两两比较判断模式可知，这些依赖关系可由相对权重 $\alpha(e_{m'h_{m'}}, e_{mh_m})$ 予以表达，其中 $m, m' = 1, \cdots, M$; $h_m, h_{m'} = 1, \cdots, n_m$; $h_{m'} \neq h_m$; $\alpha(e_{m'h_{m'}}, e_{mh_m})$ 为相对于 e_{mh_m} 而言元素 $e_{m'h_{m'}}$ 所分配到的两两比较偏好权重，它依据决策者相对于元素 e_{mh_m} 对不包括 e_{mh_m} 的所有底面元素进行两两比较相对重要性判断所形成的判断矩阵、由 AHP 的权重计算方法得出. 根据 AHP 方法可知

$$\sum_{m'=1}^{M} \sum_{h_{m'} \neq h_m} \alpha(e_{m'h_{m'}}, e_{mh_m}) = 1, m = 1, \cdots, M \tag{15}$$

$$\alpha(e_{m'h_{m'}}, e_{mh_m}) \geqslant 0, m, m' = 1, \cdots, M, h_m, h_{m'} = 1, \cdots, n_m, h_{m'} \neq h_m \tag{16}$$

需要指出，若 $\alpha(e_{m'h_{m'}}, e_{mh_m}) = 0$ 则实质上意味着元素 $e_{m'h_{m'}}$ 并不依赖于 e_{mh_m}. 由此并为下文数学推导中表达的方便，这里对尖锥网络分析结构中任意底面元素 e_{mh_m} 不存在的自依赖关系从数学表达上引入一个形式化补充定义，即 $\alpha(e_{mh_m}, e_{mh_m}) = 0, m = 1, \cdots, M, h_m = 1, \cdots, n_m$. 这样，便可以将式（15）和（16）改写为

$$\sum_{m'=1}^{M} \sum_{h_{m'}=1}^{n_{m'}} \alpha(e_{m'h_{m'}}, e_{mh_m}) = 1, m = 1, \cdots, M \tag{17}$$

$$\alpha(e_{m'h_{m'}}, e_{mh_m}) \geqslant 0, m, m' = 1, \cdots, M, h_m, h_{m'} = 1, \cdots, n_m \tag{18}$$

为表达的方便，这里根据 $\alpha(e_{m'h_{m'}}, e_{mh_m})$ 构造

出下述矩阵

$$A^{(\alpha)} = [A_{11}^{(\alpha)} \cdots A_{1n_1}^{(\alpha)} \cdots A_{M1}^{(\alpha)} \cdots A_{Mn_M}^{(\alpha)}] \quad (19)$$

其中

$$A_{mh_m}^{(\alpha)} = [\alpha(e_{11}, e_{mh_m}), \cdots, \alpha(e_{1n_1}, e_{mh_m}), \cdots, \alpha(e_{M1}, e_{mh_m}), \cdots, \alpha(e_{Mn_M}, e_{mh_m})]^{\mathrm{T}},$$
$$\forall m = 1, \cdots, M, \ \forall h_m = 1, \cdots, n_m \quad (20)$$

下面在假设 $t-1$ 时刻尖锥元素集 $Clus_{\text{Cone-ANP}}(m)$ 中各个底面元素的权重已知的条件下，讨论元素 $e_{m1}, e_{m2}, \cdots, e_{mn_m}(m = 1, \cdots, M)$ 在受到底面 L 上各种内部和外部支配关系后它们在 t 时刻的权重. 以 $Clus_{\text{Cone-ANP}}(m)$ 中第 $h_m(h_m = 1, \cdots, n_m)$ 个底面元素 e_{mh_m} 为分析对象，根据 AHP 的复合权重综合原理可知

$$w_{mh_m}^{(t)} = \sum_{k_1=1}^{n_1} w_{1k_1}^{(t-1)} \alpha(e_{mh_m}, e_{1k_1}) + \sum_{k_2=1}^{n_2} w_{2k_2}^{(t-1)} \alpha(e_{mh_m}, e_{2k_2}) + \cdots + \sum_{k_M=1}^{n_M} w_{Mk_m}^{(t-1)} \alpha(e_{mh_m}, e_{Mk_M}), \ t = 1, 2, \cdots \quad (21)$$

因此有

$$W^{(t)} = A^{(\alpha)} W^{(t-1)}, \ t = 1, 2, \cdots \quad (22)$$

从系统耦合视角将式(12)代入到式(22)中可得

$$W^{(t)} = A^{(\alpha)} B W^{(t-1)}, \ t = 1, 2, \cdots \quad (23)$$

若记

$$Q = (q_{ij})_{(n_1+\cdots+n_M)(n_1+\cdots+n_M)} \triangleq A^{(\alpha)} B \quad (24)$$

则有

$$W^{(t)} = Q W^{(t-1)}, \ t = 1, 2, \cdots \quad (25)$$

由 $Q = A^{(\alpha)} B$ 以及矩阵 $A^{(\alpha)}$ 和 B 的具体表达式可知，Q 中的元素

$$q_{ij} \geqslant 0, \ i, j = 1, \cdots, n_1 + \cdots + n_M \quad (26)$$

若将矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 划分成 $[Q_1, \cdots, Q_m, \cdots, Q_M]$，其中 Q_m 为 $n_1 + \cdots + n_M$ 行 n_m 列子矩阵，则对 $\forall m = 1, \cdots, M$，如果锥顶元素 e_{m0} 存在，那么 Q_m 为各列均相同的子矩阵，其具体表达式为

$$\boldsymbol{Q}_m = \begin{bmatrix} \sum_{k_m=1}^{n_m} \delta_{mk_m} \alpha(e_{11}, e_{mk_m}) & \cdots & \sum_{k_m=1}^{n_m} \delta_{mk_m} \alpha(e_{11}, e_{mk_m}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{k_m=1}^{n_m} \delta_{mk_m} \alpha(e_{1n_1}, e_{mk_m}) & \cdots & \sum_{k_m=1}^{n_m} \delta_{mk_m} \alpha(e_{1n_1}, e_{mk_m}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{k_m=1}^{n_m} \delta_{mk_m} \alpha(e_{M1}, e_{mk_m}) & \cdots & \sum_{k_m=1}^{n_m} \delta_{mk_m} \alpha(e_{M1}, e_{mk_m}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{k_m=1}^{n_m} \delta_{mk_m} \alpha(e_{Mn_M}, e_{mk_m}) & \cdots & \sum_{k_m=1}^{n_m} \delta_{mk_m} \alpha(e_{Mn_M}, e_{mk_m}) \end{bmatrix} \quad (27)$$

若锥顶元素 e_{m0} 不存在，则 Q_m 的具体表达式为

$$\boldsymbol{Q}_m = \begin{bmatrix} \alpha(e_{11}, e_{m1}) & \cdots & \alpha(e_{11}, e_{mn_m}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha(e_{1n_1}, e_{m1}) & \cdots & \alpha(e_{1n_1}, e_{mn_m}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha(e_{M1}, e_{m1}) & \cdots & \alpha(e_{M1}, e_{mn_m}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha(e_{Mn_M}, e_{m1}) & \cdots & \alpha(e_{Mn_M}, e_{mn_m}) \end{bmatrix} \quad (28)$$

结合式(17)和式(6)分析式(27)可知，其任意一列的和为

$$\delta_{m'1} \sum_{m=1}^{M} \sum_{k_m=1}^{n_m} \alpha(e_{mk_m}, e_{m'1}) + \cdots + \delta_{m'n_{m'}} \sum_{m=1}^{M} \sum_{k_m=1}^{n_m} \alpha(e_{mk_m}, e_{m'n_{m'}}) = \delta_{m'1} + \cdots + \delta_{m'n_{m'}} = 1, \boldsymbol{m}' = 1, \cdots, M$$

类似地，结合式(17)分析式(28)可知，其任意一列的和为

$$\sum_{m'=1}^{M} \sum_{h_{m'}=1}^{n_{m'}} \alpha(e_{m'h_{m'}}, e_{mh_m}) = 1, m = 1, \cdots, M$$

因此结合式(26)可知，对 $\forall m = 1, \cdots, M$，无论锥顶元素 e_{m0} 存在与否，$\boldsymbol{Q}_m$ 均为列随机子矩阵，矩阵 $\boldsymbol{Q} = [Q_1, \cdots, Q_m, \cdots, Q_M]$ 因而也为列随机矩阵.

由于 Q 为列随机矩阵，则由式(25)、(26)及前面关于 $W^{(0)}$ 的规定(即 $W^{(0)}$ 的各个分量非负并且其和为 1)可知

$$(1,\cdots,1)W^{(t)}=(1,\cdots,1)QW^{(t-1)}=(1,\cdots,1)W^{(t-1)}=\cdots=(1,\cdots,1)W^{(0)}=1,t=1,2,\cdots \tag{29}$$

$$W^{(t)}=Q^{t}W^{(0)}\geqslant 0,\ t=1,2,\cdots \tag{30}$$

即 $W^{(t)}$ 的各个分量权重非负且其和等于 1，$t=1$，2，…. 由此并结合式(30)和 Q 的列随机性可知，若 $Q^{(+\infty)}$ 存在，则 $W^{(t)}$ 必收敛并且其极限与 $W^{(0)}$ 无关. 记 $W^{(t)}$ 的极限即决策问题各个非锥顶元素的极限排序权重向量为 $W^{(+\infty)}$，则由式(30)可知

$$\boldsymbol{W}^{(+\infty)}=\boldsymbol{Q}^{(+\infty)}(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}} \tag{31}$$

当 $Q^{(+\infty)}$ 不存在时，由于 Q 为列随机矩阵，因而 $W^{(t)}$ 必振荡收敛，这样极限排序权重向量 $W^{(+\infty)}$ 可以类似于 ANP 采用 Cessaro 和予以求出，请参阅文献[3－4]，这里限于篇幅不予赘述.

若决策问题的尖锥元素集 $Clus_{\text{Cone-ANP}}(m)$ 存在锥顶元素 e_{m0}，则结合式(8)和(31)可知，锥顶元素 e_{m0} 的极限排序权重为

$$w_{m0}^{(+\infty)}=w_{m1}^{(+\infty)}+\cdots+w_{mn_m}^{(+\infty)},m=1,\cdots,M \tag{32}$$

需要指出，由于非锥顶元素的极限排序权重向量即 $W^{(+\infty)}$ 的各个分量权重的和等于 1，因此结合式(32)可知，当系统分析结构存在锥顶元素时，采用式(31)和式(32)得出的、所有元素(包括非锥顶元素和锥顶元素)的最终权重和必大于 1. 由于对所有元素的最终权重分别乘以同一个任意正常数均不会改变元素之间的偏好排序，因此既可以对所有元素的最终权重予以规一化处理，也可以不进行规一化处理，直接使用式(31)和式(32)给出的权重结果对所有元素进行偏好排序. 在不进行规一化处理的情况下，由式(32)可知，尖锥网络结构的所有锥顶元素的权重和为 $\theta=\sum_{m=1}^{M}(w_{m1}^{(+\infty)}+\cdots+w_{mn_m}^{(+\infty)})$. 由此，也可以将所有锥顶元素的权重和表达为 $w_{10}^{(+\infty)}+\cdots+w_{M0}^{(+\infty)}=\theta$. 该方程即为前文所指的价值导向超平面 Γ，其所在的空间维度即价值体系为($w_{10}^{(+\infty)}$，…，$w_{M0}^{(+\infty)}$)，例如对图 5 而言，空间维度 $D_1=w_{10}^{(+\infty)}$，$D_2=w_{20}^{(+\infty)}$，$D_3=w_{30}^{(+\infty)}$.

5 尖锥网络分析的方法步骤

基于前文第3部分和第4部分的主要结论，可以将尖锥网络分析(Cone-ANP)概括为如下7步.

步骤1 系统结构分析，构建形如图5所示的尖锥网络分析结构.

步骤2 对每一个尖锥元素集，邀请决策者或专家对各锥底元素进行相对于锥顶元素的两两比较相对重要性判断(其赋值方法与 AHP 的9级标度相同)，形成两两比较判断矩阵，并在此基础上采用 AHP 的权重计算方法得出各锥底元素相对于锥顶元素的相对权重(即前文中的 δ_{m1}，δ_{m2}，…，δ_{mn_m}).

步骤3 基于锥底元素相对于锥顶元素的相对权重 δ_{m1}，δ_{m2}，…，δ_{mn_m}，按照式(13)或单位阵构建矩阵 B. 当所有尖锥元素集均无锥顶元素时，矩阵 B 发生退化，只是一个阶数为 $n_1+\cdots+n_M$ 的单位阵.

步骤4 对底面 L 上的支配关系，邀请决策者或专家相对每一个锥底元素对所有受其支配的其它锥底元素进行两两比较相对重要性判断(其赋值方法同步骤2)，形成两两比较判断矩阵，并在此基础上采用 AHP 的权重计算方法得出相对于每个锥底元素的所有其它锥底元素的相对权重，即前文中的 $\alpha(e_{m'h_{m'}},e_{mh_m})$.

步骤5 基于 $\alpha(e_{m'h_{m'}},e_{mh_m})$，按照式(19)和式(20)构建矩阵 $A^{(\alpha)}$.

步骤6 基于矩阵 $A^{(\alpha)}$ 和 B，由 $Q=A^{(\alpha)}B$ 计算得出矩阵 Q.

步骤7 对 Q 求极限并按照式(31)和式

(32) 得出尖锥网络结构中所有元素的极限排序权重.

6 对比验证分析

如前文所述,如果像 ANP 那样承认评价与决策问题的系统结构中存在着时间特征并不明晰的元素自依赖关系,那么在采用 ANP、构建元素集的自依赖矩阵时便需要采用形式为“相对于甲来比较甲和乙”的比较逻辑,使得自依赖矩阵元素在内涵上模糊不清,进而使得人们无法将这样的 ANP 自依赖矩阵与 Cone-ANP 应用所依赖的数据输入建立起能够保证两种分析方法可比的信息联系. 基于上述考虑,下文采用系统结构不存在元素自依赖关系的数值例子来验证 Cone-ANP 相对于 ANP 的科学合理性.

6.1 系统结构不存在锥顶元素情形下的验证

从 Cone-ANP 视角上看可以发现,第 2 部分给出的数值例子的系统结构不存在任何锥顶元素,因此这里选用该数值例子. 由其基础信息可知,Cone-ANP 分析所需要的矩阵 $\boldsymbol{A}^{(\alpha)} = \boldsymbol{Q}_0$($\boldsymbol{Q}_0$ 的具体数据详见前文第 2 部分);由于系统结构中的元素集 $Clus_1$($Clus_1 = Clus_{\text{Cone-ANP}}(1)$) 和元素集 $Clus_2$($Clus_2 = Clus_{\text{Cone-ANP}}(2)$) 均不存在锥顶元素,因此 Cone-ANP 分析所需要的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这样由 Cone-ANP 分析的步骤 6 可知,矩阵 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}^{(\alpha)}\boldsymbol{B} = Q_0$. 对 $\boldsymbol{Q}$ 取极限,可以得出下述关于元素极限排序的权重向量

$$[0.288, 0.219, 0.117, 0.212, 0.164]^{\mathrm{T}}$$

将该向量与前文采用马尔可夫随机过程理论得出的客观权重向量加以对比可以看出,两者完全相同. 由此并结合前文 ANP 对该数值例子给出的明显偏离客观结果的分析结论,显然易见: 在处理不存在锥顶元素的决策选择问题上,Cone-ANP 要比 ANP 具有明显的科学合理性.

6.2 系统结构存在锥顶元素情形下的验证

参见图 3 所示的系统分析结构,从 Cone-ANP 视角上看可以发现,其元素集 $Clus_1$ 是一个以元素 e_{10} 为锥顶、以 e_{11} 和 e_{12} 为锥底元素的尖锥元素集,元素集 $Clus_2$ 是一个以 e_{21}、e_{22} 和 e_{23} 为锥底元素但没有锥顶的尖锥元素集. 因此,这里假设某评价与决策问题的系统结构如图 3 所示,Cone-ANP 分析中基于决策专家对元素 e_{11}、e_{12}、e_{21}、e_{22} 和 e_{23} 给出的两两比较判断矩阵所得出的矩阵 $\boldsymbol{A}^{(\alpha)} = \boldsymbol{Q}_0$($\boldsymbol{Q}_0$ 的具体数据详见前文第 2 部分). 此外,再假定元素 e_{11} 和 e_{12} 相对于锥顶 e_{10} 的相对权重分别为 $\delta_{11} = \gamma$, $\delta_{12} = 1 - \gamma$,(其中 $\gamma \in (0,1)$ 为验证分析所采用的控制参数),由此并按 Cone-ANP 的步骤 3 可知 Cone-ANP 分析所需要的另外一个矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 1-\gamma & 1-\gamma & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

另一方面,依据上面给出的有关信息(即矩阵 $\boldsymbol{Q}_0$ 和元素 e_{11}、e_{12} 相对于 e_{10} 的相对权重 δ_{11} 与 δ_{12}) 和 ANP 的超矩阵构造方法可知,相对于元素集 $Clus_1$ 而言,$Clus_1$ 的自依赖子阵和外部依赖子阵分别为

$$\boldsymbol{A}''_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0.7/0.7 \\ 1-\gamma & 0.1/0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}''_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2/0.9 & 0.1/0.3 \\ 0 & 0.4/0.9 & 0.1/0.3 \\ 0 & 0.3/0.9 & 0.1/0.3 \end{bmatrix}$$

相对于元素 $Clus_2$ 集而言,元素集 $Clus_2$ 的外部依赖子阵和自依赖子阵分别为

$$A''_{12}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0.1/0.2&0.5/0.8&0.1/0.8\\0.1/0.2&0.3/0.8&0.7/0.8\end{bmatrix}$$

$$A''_{22}=\begin{bmatrix}0&0.1/0.2&0.1/0.2\\0.5/0.8&0&0.1/0.2\\0.3/0.8&0.1/0.2&0\end{bmatrix}$$

这样，由 A''_{11}、A''_{21}、A''_{12}、A''_{22} 并结合 ANP 对两个元素集情形的分块矩阵等值赋权规定可知，ANP 分析的加权超矩阵为

$$A''=\begin{bmatrix}0.5A''_{11}&0.5A''_{12}\\0.5A''_{21}&0.5A''_{22}\end{bmatrix}$$

基于上述矩阵 $A^{(\alpha)}$、B 和 Cone-ANP 方法，基于上述加权超矩阵 A'' 和 ANP 方法，可以分别得出如下表 1 和表 2 所示的相对于控制参数 γ 的元素极限排序权重(经过规一化处理的排序权重).

表 1 基于 Cone-ANP 的元素极限排序权重

Table 1 Limited ranking weights derived by Cone-ANP

元素	控制参数 γ 的取值			
	0.2	0.4	0.6	0.8
e_{10}	0.377	0.354	0.333	0.315
e_{11}	0.276	0.227	0.184	0.146
e_{12}	0.101	0.127	0.149	0.169
e_{21}	0.064	0.071	0.079	0.085
e_{22}	0.100	0.123	0.144	0.162
e_{23}	0.082	0.098	0.111	0.123

表 2 基于 ANP 的元素极限排序权重

Table 2 Limited ranking weights derived by ANP

γ	元素					
$\gamma\in(0,1)$	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{21}	e_{22}	e_{23}
任意值	0	0.238	0.262	0.156	0.185	0.159

参见表1和表2，比较两种方法对同一个问题给出的元素极限排序权重可以发现，与 Cone-ANP 相比 ANP 存在如下两个难以予以合理解释的明显缺陷：其一，它没有能力像 Cone-ANP 那样反映出控制参数 γ 的变化(即元素 e_{11} 和 e_{12} 相对于 e_{10} 的相对权重变化)对元素极限排序权重的影响. 其二，没有像 Cone-ANP 那样反映出元素 e_{10} 在系统结构中的作用，对元素 e_{10} 的偏好权重予以了数值为“0”的评价，这与图 3 所示承认元素 e_{10} 作用的系统分析结构明显不符. 综合上述两方面易见，在处理含有锥顶元素的评价与决策问题时，Cone-ANP 也明显优于 ANP.

6.3 对验证分析的补充说明

1) 在前述两个验证分析中对 $A^{(\alpha)}$ 予以了相同的矩阵赋值(即 Q_0)，其目的仅在于控制论文的篇幅. 事实上，即使在两个验证分析中对 $A^{(\alpha)}$ 予以异于 Q_0 的不同赋值，只要能够保证方法验证的输入信息可比，也会得出与前文类似的验证分析结论. 2) 由于当系统问题仅有两个元素集时，ANP 规定采用等值(即均为 0.5)对各个分块矩阵予以赋权[3]，而当元素集多于两个时则需要专家采用“相对甲元素集比较甲、乙元素集”的赋权判断模式，但这种判断模式会对元素集给出具有武断随意性的错误赋权，使得关于 ANP 与 Cone-ANP 的比较验证所使用的输入信息失去可比性，进而导致两种方法的对比验证失去可比性，因此在前述两个验证分析中均假定系统问题仅有两个元素集. 3) 尽管采用数值算例验证新理论方法在国内外管理科学的研究文献中是一种广为采用的验证范式，并且在前文的两个算例分析中确实已经验证了 Cone-ANP 相对于 ANP 的明显科学合理性，但与其它新方法一样 Cone-ANP 相对于 ANP 的广泛科学合理性及其理论优势从根本上讲仍需要未来大量应用的进一步验证.

7 结束语

ANP 关于元素集内部自依赖关系和元素集之间相对重要性的比较判断，均采用了一种形式为“相对甲来比较甲和乙”的比较逻辑，使得决策者给出的主观判断存在明显的武断随意性，其关于元素集赋权所给出的方法也存在着过于武断的理论缺陷. 此外，ANP 没有区别元素集内部元素在源发性、过渡性、接收性上的结构特征差异对元

素权重计算的影响. 为发展 ANP,解决其存在的方法缺陷,本文通过构建一种全新的系统分析结构即尖锥网络分析结构和关于元素权重计算的严格理论推导,对 ANP 予以了理论重构,提出了一种明显区别于 ANP 的新理论方法即 Cone-ANP. 相对于 ANP,Cone-ANP 具有如下两方面的理论方法优势. 其一,它不再要求决策者对元素集予以主观判断加权,从而不仅规避了 ANP 在元素集权重内涵极其模糊不清情况下要求决策者进行主观判断所产生的武断随意性,而且也克服了 ANP 对元素集的分块加权方法所导致的武断赋权问题. 其二,在分析结构上,它结合系统元素的时间动态特征澄清了 ANP 所使用的、机理关系模糊不清的元素集自依赖关系,所采用的尖锥网络分析结构,不仅可以从根本上克服 ANP 在元素集自依赖矩阵构建上所采用的、形式为“相对于甲来比较甲和乙”的比较逻辑,而且也能够反映出 ANP 并没有揭示的元素源发性与过渡性的结构特征差异. 基于数值例子的对比验证分析表明,相对于 ANP,Cone-ANP 显著提高了评价结论的科学合理性.

本文限于篇幅讨论的仅是锥顶元素至多有一个、无“只进不出”型锥底元素的一类尖锥元素集及由该类元素集组成的尖锥网络分析结构. 在未来的研究中计划在此基础上开展进一步理论推广,研究含有“只进不出”型锥底元素、多个锥顶元素等更具一般性的尖锥元素集及由其组成的尖锥网络分析结构和相应的网络分析方法.

参 考 文 献:

[1] Saaty T L. The Analytic Hierarchy Process [M]. New York: McGraw-Hill, 1980.

[2] 朱建军, 王梦光, 刘士新. 一种新型不确定 AHP 的研究与应用 [J]. 管理科学学报, 2005, 8(5): 15-19.
Zhu Jianjun, Wang Mengguang, Liu Shixin. Research on and application of new uncertainty model in analytical hierarchy process [J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(5): 15-19. (in Chinese)

[3] Saaty T L. The Analytic Network Process: Decision Making with Dependence and Feedback [M]. Pittsburgh: RWS Publications, 2004.

[4] Saaty T L. Decision Making with Dependence and Feedback: The Analytic Network Process [M]. Pittsburgh: RWS publications, 2001.

[5] 李春好, 孙永河. ANP 内部循环依存递阶系统的方案排序新方法 [J]. 管理科学学报, 2008, 11(6): 25-34.
Li Chunhao, Sun Yonghe. New ranking approach to alternatives of ANP system with inner circular dependence [J]. Journal of Management Sciences in China, 2008, 11(6): 25-34. (in Chinese)

[6] Yu J, Cheng S. An integrated approach for deriving priorities in analytic network process [J]. European Journal of Operational Research, 2007, 180(3): 1427-1432.

[7] Dağdeviren M, Yüksel I. A fuzzy analytic network process (ANP) model for measurement of sectional competition level (SCI) [J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(2): 1005-1014.

[8] Wu C, Lin C, Lee C. Optimal marketing strategy: A decision-making with ANP and TOPSIS [J]. International Journal of Production Economics, 2010, 127(1): 190-196.

[9] Chung S, Lee A H, Pearn W L. Analytic network process (ANP) approach for product mix planning in semiconductor fabricator [J]. International Journal of Production Economics, 2005, 96(1): 15-36.

[10] Ivanov D, Sokolov B, Kaeschel J. A multi-structural framework for adaptive supply chain planning and operations control with structure dynamics considerations [J]. European Journal of Operational Research, 2010, 200(2): 409-420.

[11] Aragonés-Beltrán P, Aznar J, Ferrís-Oñate J, et al. Valuation of urban industrial land: An analytic network process approach [J]. European Journal of Operational Research, 2008, 185(1): 322-339.

[12] Lee H, Kim C, Cho H, et al. An ANP-based technology network for identification of core technologies: A case of telecommunication technologies [J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36(1): 894-908.

[13] Wu W. Choosing knowledge management strategies by using a combined ANP and DEMENTAL approach [J]. Expert Systems with Applications, 2008, 35(3): 828 – 835.
[14] Yu R, Tzemg G H. A soft computing method for multi-criteria decision making with dependence and feedback [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 180(1): 63 – 75.
[15] Pagageorgiou E I, Groumpos P P. A new hybrid method using evolutionary algorithms to train fuzzy cognitive maps [J]. Applied Soft Computing, 2005, 5(4): 409 – 431.
[16] Stewart W J. Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains [M]. Princeton: Princeton University Press, 1994.

Cone-ANP: A new theoretical method of analytic network process based on the cone network

LI Chun-hao, CHEN Wei-feng, SU Hang, LI Wei, LI Meng-jiao
School of Management, Jilin University, Changchun 130025, China

Abstract: Analytic network process (ANP) is considered, in this paper, to have three shortcomings. Firstly, the subjective judgment mode adopted in ANP, taking the logic of comparing object A with object B with respect to object A, does result in serious arbitrariness of decision makers in the comparisons of inner self-dependence relations within a cluster and in those of relative importance among clusters. Secondly, the weighting approach given in ANP to clusters is also arbitrary from the theoretical viewpoint. Thirdly, within ANP, no consideration of the structural difference among source cluster-elements, transient cluster-elements and sink cluster-elements is taken into account in the procedure of final ranking weighting computation. To solve these problems, a new analytic network called the cone network is presented, and a new theoretical analytic approach, i. e., Cone-ANP, which is distinguishingly different from ANP, is further innovatively built through reconstructing the ANP theory and by carrying the corresponding mathematical deduction. Illustrative examples show that evaluation conclusions can be more reasonably drawn with Cone-ANP than with ANP.

Key words: analytic network process; analytic hierarchy process; self-dependence; cone cluster; cone network; limited ranking weight