

双杠杆门限随机波动率模型及其实证研究^①

吴鑫育¹, 周海林¹, 汪寿阳², 马超群³

(1. 安徽财经大学金融学院, 蚌埠 233030; 2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;
3. 湖南大学工商管理学院, 长沙 410082)

摘要: 为了捕获资产收益正向冲击(利好消息)和负向冲击(利空消息)的非对称效应,将门限效应与状态相关的杠杆效应同时引入基本的随机波动率(SV)模型中,提出双杠杆门限SV(THSV-DL)模型对资产收益的波动率进行建模.继而,基于有效重要性抽样(EIS)技巧,给出了THSV-DL模型的极大似然(ML)估计方法.为了检验EIS-ML方法的精确性以及小样本性质,构建了蒙特卡罗模拟实验.模拟结果表明,EIS-ML方法是可靠和有效的.采用上证综合指数和深证成份指数的日收益数据为样本,运用THSV-DL模型对中国股市进行了实证研究.结果表明,中国股市具有很强的波动率持续性,并且存在显著的杠杆效应.更为重要的是,中国股市的波动率持续性、波动率的波动率以及杠杆效应都具有非对称性.具体而言,与利好消息相比,利空消息造成中国股市更高的波动率持续性以及更低的波动率的波动率和杠杆效应.最后,采用上证综合指数进行的实证研究表明,THSV-DL模型相比基本的SV、杠杆SV(SV-L)、THSV和杠杆THSV(THSV-L)模型具有更加均衡及优越的风险测度能力.

关键词: 非对称效应; 门限效应; 杠杆效应; 随机波动率; 有效重要性抽样

中图分类号: F830.91 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2014)07-0063-19

0 引言

金融市场波动率在金融风险管理、投资组合配置以及期权定价中扮演着极其重要的角色.因此,对金融市场波动率进行正确建模具有非常重要的意义,准确地描述金融市场波动率的变动规律可以为投资者及监管者提供信息和决策参考.大量研究表明,金融市场波动率具有时变性,并且展现出“波动率聚集”(volatility clustering)现象.目前,用来描述波动率的这些特征的模型主要有两类:广义自回归条件异方差(GARCH)类模型和随机波动率(SV)模型.前者将波动率看作关于历史信息集的条件确定性函数,而后者认为波动率是由隐含的随机过程生成.传统上,主

要采用GARCH类模型为波动率建模.然而,研究表明,GARCH类模型并不能很好的拟合金融时间序列.与GARCH类模型相比,SV模型由于在波动过程中引入了一个新的随机过程,其对收益率的拟合能力更强,且对波动率具有更好的样本内拟合表现以及样本外预测能力^[1,2].而且,由于SV模型在连续时间方面可直接与期权定价理论、利率期限结构模型等金融学理论模型联系起来,因此SV模型在金融学文献中引起了广泛的关注并取得了大量的研究成果^[3-9].

然而,基本的SV模型对于描述金融时间序列仍有很大的局限性.研究表明,资产收益正向冲击(利好消息)和负向冲击(利空消息)对金融市场波动率的影响具有非对称性,对这种现象的

① 收稿日期: 2012-05-22; 修订日期: 2012-10-25.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71101001); 国家杰出青年科学基金资助项目(70825006); 教育部“长江学者和创新团队发展计划”资助项目(IRT0916); 国家自然科学基金创新研究群体科学基金资助项目(71221001).

作者简介: 吴鑫育(1982—),男,湖南衡山人,博士,讲师. Email: xywuchn@gmail.com

一种经典解释是“杠杆效应”(leverage effect)^[10,11]. 在金融市场中,通常认为利空消息会造成资产价格的下降,引起公司的资本负债率(金融杠杆)和风险的增加,从而造成未来期望波动率的增加,这就是“杠杆效应”. 换句话说,杠杆效应意味着资产收益与波动率之间的一种负向相关关系. Black^[10]和Christie^[11]最早发现杠杆效应存在的证据,并且Christie^[11]在Modigliani/Miller经济模式下给出了杠杆效应的一个理论解释. 研究发现,杠杆效应在股票市场中普遍存在,忽略杠杆效应会对期权定价、投资组合构造以及风险管理产生重要影响^[12]. 于是,Harvey和Shephard^[13]将杠杆效应引入SV模型中,提出具有杠杆效应的SV(SV-L)模型对资产收益波动率进行建模;Jacquier等^[9]则提出另外一种形式的SV-L模型;Yu^[14]对Harvey和Shephard^[13]和Jacquier等^[9]提出的两种SV-L模型进行了深入的比较研究,结果表明Harvey和Shephard^[13]提出的SV-L模型可以更好地解释杠杆效应. 迄今为止,国内学者对SV-L模型也进行了一些研究. 孟利锋等^[15]运用SV-L模型对我国股市进行了实证研究,发现我国沪、深两个股票市场都存在显著的杠杆效应;孟利锋和张世英^[16]运用具有杠杆效应的非线性SV模型对我国股市进行了实证研究,也发现我国沪、深两个股票市场都存在显著的杠杆效应;黄波等^[17]借鉴王春峰等^[18]提出的SV-L模型,提出了新的SV-L波动模型来拟合金融市场的收益回报,研究发现其比一般的SV模型具有更好的拟合效果.

为了捕获利好消息和利空消息的非对称效应,除了引入杠杆效应外,另外一种处理方法是引入门限效应(threshold effect). Glosten等^[19]、Li和Li^[20]和Chen和So^[21]对GARCH框架下的门限类模型进行了深入的研究. 借鉴上述思想,最近,So等^[22]将门限效应引入SV模型,提出了门限SV(THSV)模型,THSV模型能够同时捕获资产收益均值和波动率的非对称效应. 随后,众多学者对THSV模型进行了大量的研究. Diop和Guegan^[23]从理论上研究了THSV模型的尾部行为;Asai和McAleer^[24]则使用门限效应示性函数,考虑了另外一种形式的THSV模型;Chen等^[25]提出厚尾的THSV模型,并引入美国市场信

息作为门限变量,研究发现基于其提出的厚尾THSV模型可以获得更精确的风险值(Value at Risk, VaR)预测值;So和Choi^[26]提出多元的THSV(MTHSV)模型对多重金融资产收益时间序列建模,基于该模型可以更好的解释股票市场间的动态关联性;So和Choi^[27]对MTHSV模型进行进一步的改进,提出门限因子多元SV(TFMSV)模型;Elliott等^[28]基于EM算法和非线性滤波,研究了THSV模型的参数估计问题;Fan和Wang^[29]基于贝叶斯方法,对THSV模型的VaR预测能力进行了研究;Montero-Lorenzo等^[30]将THSV模型应用于空气质量异常事件的预警及监测. 但是,上述研究中,都没有考虑将门限效应与杠杆效应同时引入SV模型. Smith^[31]将门限效应与杠杆效应同时引入SV模型中,提出更一般的杠杆THSV(THSV-L)模型,并且研究发现其具有更好的拟合能力. 然而,在Smith^[31]提出的THSV-L模型中,其杠杆参数是关于状态不变的常数,而实际中可能并非如此. 基于此,为了更为有效地捕获金融市场资产收益的典型特征事实,本文对Smith^[31]提出的THSV-L模型进行扩展,设定杠杆参数是状态相关的,提出状态相关的双杠杆THSV(THSV-DL)模型来对资产收益波动率进行建模.

关于SV模型的参数估计,一直是学者们研究的热点. 由于SV模型是一种典型的非线性、非高斯状态空间模型,其似然函数是一个极为复杂的高维积分,这导致SV模型的参数估计变得非常困难. 近几十年来,许多的估计方法已经被提出来,包括广义矩方法(GMM)^[3,32]、拟极大似然(QML)方法^[4]、有效矩方法(EMM)^[6,7]和马尔可夫链蒙特卡罗(MCMC)方法^[5,33]等. Broto和Ruiz^[8]对估计SV模型的这些方法进行了详细的比较研究. 在估计SV模型的方法中,GMM、QML和EMM方法都比较简单,但研究发现其有限样本性质和估计有效性不如MCMC方法. MCMC方法对SV模型的估计比GMM、QML和EMM方法都有效,但其在计算上负担较大. 因此,寻求一种计算上较为简单、而算法相对有效的估计方法仍然是金融计量经济学界不断探索的课题,也是本文关注的一个问题. 一种有效而且计算量较小的估计方法是经典的极大似然(ML)方法. 但是,

由于 SV 模型的似然函数不存在解析解, 这使得采用 ML 方法来估计 SV 模型变得不可行. 为了克服这个问题, 本文采用 Richard 和 Zhang^[34] 提出的有效重要性抽样 (efficient importance sampling, EIS) 方法来估计 SV 模型的似然函数. EIS 方法是一个非常有效的估计高维积分的蒙特卡罗方法, 它通过最小化 EIS - 蒙特卡罗估计的方差, 可以获得高维积分似然函数非常精确的近似. 从而, 基于 EIS 方法, 可以运用 ML 方法来估计 SV 模型的参数. 本质上, EIS-ML 方法属于 ML 方法. 因此, 在适当的正则性条件下, EIS-ML 估计是一致和有效的. 而且, EIS-ML 方法非常容易实现, 只需要较小的计算量, 可以获得非常高的估计精确性^[35].

1 THSV-DL 模型

在期权定价文献中, 通常假设标的资产价格 $S(t)$ 和对应的波动率 $\sigma(t)$ 服从如下的随机微分方程

$$\begin{aligned} d \ln S(t) &= \mu dt + \sigma(t) dW_1(t) & (1) \\ d \ln \sigma^2(t) &= \alpha + \beta \ln \sigma^2(t) dt + \sigma_v dW_2(t) & (2) \end{aligned}$$

其中 $W_1(t)$ 和 $W_2(t)$ 是两个标准的布朗运动, 且相关系数为 $\text{corr}(dW_1(t), dW_2(t)) = \rho$. 如果参数 $\rho < 0$, 那么说明资产收益与波动率之间存在负向相关关系, 这代表“杠杆效应”.

在经验研究中, 为了使用离散的观测数据估计上述模型, 需要对其进行离散化. 采用 Euler-Maruyama 格式进行近似, 得到如下离散时间的 SV-L 模型

$$X_t = \mu + \sigma_X \exp(V_{t-1}/2) \varepsilon_t \quad (3)$$

$$V_t = \phi V_{t-1} + \sigma_v \eta_t \quad (4)$$

其中 $X_t = \ln S(t) - \ln S(t-1)$ 为对数收益率, $V_t = \ln \sigma^2(t) + \alpha/\beta$, $\sigma_X = \exp(-\alpha/(2\beta))$, $\phi = 1 + \beta$, 对于 $|\phi| < 1$, 一阶自回归 (AR(1)) 过程 (4) 是平稳的. $\varepsilon_t = W_1(t) - W_1(t-1)$, $\eta_t = W_2(t) - W_2(t-1)$, 显然 ε_t 和 η_t 均为独立同分布 (i. i. d.) 的标准正态分布随机变量, 即 $\varepsilon_t \sim$

i. i. d. $N(0, 1)$, $\eta_t \sim$ i. i. d. $N(0, 1)$, 且满足 $\text{corr}(\varepsilon_t, \eta_t) = \rho$. 如果 $\rho = 0$, 则 SV-L 模型 (3) — (4) 退化为基本的 SV 模型; 如果 $\rho < 0$, 则说明存在“杠杆效应”, 它体现的是一种正的和负的资产收益的非对称效应. 事实上, Harvey 和 Shephard^[13] 和 Yu^[14] 的研究表明, 股票收益与波动率之间存在着非对称关系, 即股票价格的下降会造成收益波动率的增加, 这种非对称关系是通过 ε_t 和 η_t 之间的负相关性即杠杆效应体现的. 因此, 在金融学文献中, SV-L 模型 (3) — (4) 又常被称为非对称 SV 模型.

为了允许在 SV 模型中体现正的和负的资产收益的非对称效应, 除了引入上述的杠杆效应外, 另外一种处理方法是在 SV 模型中引入门限效应. 根据 So 等^[22] 和 Smith^[31], 正的和负的资产收益对波动率过程的行为会产生不同的影响, 为了刻画这种波动率的非对称现象, 可以将门限效应引入波动率过程中, 其门限两状态由滞后收益的符号确定. 换句话说, 在 THSV 模型中, 波动率过程服从一个门限 AR 模型, 本质上, 它属于 Tong 和 Lim^[36] 提出的门限时间序列模型族. 与 So 等^[22] 和 Smith^[31] 的做法类似, 本文考虑的 THSV 模型假设资产收益仍服从随机过程 (3), 波动率过程服从如下门限 AR(1) 模型

$$V_t = \phi_{s_t} V_{t-1} + \sigma_{v_{s_t}} \eta_{s_t} \quad (5)$$

其中状态变量 s_t 为一个 Bernoulli 随机变数, 定义为

$$s_t = \begin{cases} 0, & \text{若 } X_t < 0 \\ 1, & \text{若 } X_t \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

$\eta_{s_t} \sim$ i. i. d. $N(0, 1)$, 且 $|\phi_{s_t}| < 1$, 以保证门限 AR(1) 过程 (5) 是平稳的.

在 So 等^[22] 提出的基本的 THSV 模型中, 假设资产收益与波动率之间没有相关性, 即 ε_t 与 η_{s_t} 是相互独立的^②. 显然, 这样的假设有一定的局限性. 针对这个问题, Smith^[31] 对 So 等^[22] 提出的基本的 THSV 模型进行了扩展, 提出具有杠杆效应的 THSV-L 模型. 在 THSV-L 模型中, Smith^[31] 假设 ε_t 与 η_{s_t} 是相关的, 即 $\text{corr}(\varepsilon_t,$

② 除此之外, 他们还假设波动率的波动率是状态不变的, 即 $\sigma_{v_0} = \sigma_{v_1}$.

$\eta_{s_{t,i}}) = \rho$, 从而使得 THSV-L 模型可以综合体现门限效应与杠杆效应. 然而, 可以看到, 在 Smith^[31] 提出的 THSV-L 模型中, ε_t 与 $\eta_{s_{t,i}}$ 的相关性仍与状态无关. 而实际中, ε_t 与 $\eta_{s_{t,i}}$ 的相关性很可能是与状态有关的. 针对这个问题, 本文对 THSV-L 模型进行进一步的扩展, 提出 THSV-DL 模型. 在 THSV-DL 模型中, 假设 ε_t 与 $\eta_{s_{t,i}}$ 是状态相关的, 即

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_{s_{t,i}} \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho_{s_t} \\ \rho_{s_t} & 1 \end{pmatrix} \right) \quad (7)$$

因此, 本文提出的 THSV-DL 模型定义为 (3) 及 (5) - (7)^③. 可以看到, THSV-DL 模型中待估计的参数向量为 $\theta = (\mu \ \sigma_x \ \phi_0 \ \phi_1 \ \sigma_{v_0} \ \sigma_{v_1} \ \rho_0 \ \rho_1)'$.

2 EIS-ML 估计方法

由于 ML 估计量具有一系列良好的性质, 如一致性、渐近正态性等, 所以, 本文采用 ML 方法来估计 THSV-DL 模型的参数. 但是, 由于 THSV-DL 模型包含不可观测的隐变量, 其似然函数是一个非常复杂的高维积分. 为了克服这个困难, 本文采用 Richard 和 Zhang^[34] 提出的 EIS 技巧来估计这个高维积分.

2.1 ML 方法

设有 T 个观测变量 $X = (X_1, \dots, X_T)'$, 以及 T 个不可观测变量 (隐变量) $V = (V_1, \dots, V_T)'$. 为了方便起见, 把 V_0 当作模型附加参数与 θ 同时进行估计. THSV-DL 模型的似然函数由下式给出

$$L(\theta; X) = \int p(X, V; \theta) dV \quad (8)$$

其中 $p(X, V; \theta)$ 是 X 和 V 的联合密度函数, 可以写为

$$p(X, V; \theta) = \prod_{i=1}^T p(X_i | V_{i-1}, \theta) p(V_i | X_i, V_{i-1}, \theta) \quad (9)$$

其中 $p(X_i | V_{i-1}, \theta)$ 是均值为 μ , 方差为 $\sigma_x^2 \exp(V_{i-1})$ 的正态分布密度函数 $p(V_i | X_i, V_{i-1}, \theta)$ 也是正态分布密度函数, 其均值与方差分

别为

$$\mu_t = \phi_{s_t} V_{t-1} + \rho_{s_t} \frac{\sigma_{v_{s_t}}}{\sigma_x \exp(V_{t-1}/2)} (X_t - \mu) \quad (10)$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_{v_{s_t}}^2 (1 - \rho_{s_t}^2) \quad (11)$$

由此, THSV-DL 模型的 ML 估计为

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \ln L(\theta; X)$$

在适当的正则性条件下, $\hat{\theta}$ 是一致估计量并且服从渐近正态分布^[38].

2.2 基于 EIS 的似然估计

通常情况下, 似然函数 (8) 是一个非常复杂的高维积分, 不存在解析解. 为了估计这个高维积分似然函数, 通常只能求助于数值分析的方法. 然而, 由于典型的金融时间序列有几百到上万个观测值, 传统的数值分析方法不能应用. 一个可行的解决办法是使用蒙特卡罗模拟方法. 根据式 (9), 似然函数 (8) 可以改写为

$$L(\theta; X) = \int \prod_{i=1}^T p(X_i | V_{i-1}, \theta) p(V_i | X_i, V_{i-1}, \theta) dV \quad (12)$$

则可以得到似然函数 $L(\theta; X)$ 的一个自然蒙特卡罗估计为

$$\tilde{L}(\theta; X) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left[\prod_{i=1}^T p(X_i | V_{i-1}^{(s)}, \theta) \right] \quad (13)$$

其中 $V_i^{(s)}$ 是从所谓的自然抽样密度 $p(V_i | X_i, V_{i-1}^{(s)}, \theta)$ 抽取的样本.

自然蒙特卡罗估计式 (13) 的一个主要优点是形式简单、便于计算, 然而, 它存在的一个重要缺点就是其估计的方差很大. 因此, 为了保证估计的精确性, 通常需要抽取非常大的样本, 而这势必会造成很大的计算负担. 因此, 式 (13) 的实际应用价值并不大. 为了降低蒙特卡罗估计的方差, 根据 Richard 和 Zhang^[34] 的研究, 可以使用 EIS 密度代替自然抽样密度 $p(V_i | X_i, V_{i-1}, \theta)$ 来抽取样本.

EIS 方法的原理是对自然抽样密度 $p(V_i | X_i,$

③ 值得一提的是, 在 THSV-DL 模型中, 如果 $\phi_0 = \phi_1 \ \sigma_{v_0} = \sigma_{v_1}$, 则退化模型与 Yu^[37] 提出的半参数 SV 模型相似.

V_{t-1}, θ) 进行参数化扩展, 以最小化自然蒙特卡罗估计的方差. 具体地, 设 $m_t(V_t | X_t, V_{t-1}, a_t)$ 是对自然抽样密度 $p(V_t | X_t, V_{t-1}, \theta)$ 进行参数化扩展得到的 EIS 密度, 其中 a_t 称为 EIS 辅助参数, THSV-DL 模型的似然函数 (12) 可以改写为

$$L(\theta; \mathbf{X}) = \int \prod_{t=1}^T \frac{p(X_t | V_{t-1}, \theta) p(V_t | X_t, V_{t-1}, \theta)}{m_t(V_t | X_t, V_{t-1}, a_t)} \times \prod_{t=1}^T m_t(V_t | X_t, V_{t-1}, a_t) dV = E_m \left[\prod_{t=1}^T \frac{p(X_t | V_{t-1}, \theta) p(V_t | X_t, V_{t-1}, \theta)}{m_t(V_t | X_t, V_{t-1}, a_t)} \right] \quad (14)$$

其中 $E_m(\cdot)$ 表示 $m = \prod_{t=1}^T m_t$ 测度下的期望. 由此可得到式 (14) 相应的 EIS - 蒙特卡罗估计为

$$\hat{L}(\theta; \mathbf{X}) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left[\prod_{t=1}^T \frac{p(X_t | V_{t-1}^{(s)}, \theta) p(V_t^{(s)} | X_t, V_{t-1}^{(s)}, \theta)}{m_t(V_t^{(s)} | X_t, V_{t-1}^{(s)}, a_t)} \right] \quad (15)$$

其中 $V_t^{(s)}$ 是从 EIS 密度 $m_t(V_t | X_t, V_{t-1}^{(s)}, a_t)$ 抽取的样本.

根据 Richard 和 Zhang^[34], 为了使似然函数的 EIS - 蒙特卡罗估计 (15) 的方差最小化, 需要确定 EIS 密度 $m_t(V_t | X_t, V_{t-1}, a_t)$ 的形式, 并估计辅助参数 a_t . 具体地, 令

$$m_t(V_t | X_t, V_{t-1}, a_t) = \frac{k_t(V_t | X_t, V_{t-1}, a_t)}{\chi_t(X_t, V_{t-1}; a_t)} \quad (16)$$

$$\chi_t(X_t, V_{t-1}; a_t) = \int k_t(V_t | X_t, V_{t-1}, a_t) dV_t \quad (17)$$

其中 $k_t(V_t | X_t, V_{t-1}, a_t)$ 是密度核函数. 对于 THSV-DL 模型, 选取

$$k_t(V_t | X_t, V_{t-1}, a_t) = p(V_t | X_t, V_{t-1}, \theta) \times \exp\{a_{1,t} V_t + a_{2,t} V_t^2\} \quad (18)$$

其中 $a_t = (a_{1,t}, a_{2,t})$. 这样的选择可以保证 EIS 密度 $m_t(V_t | X_t, V_{t-1}, a_t)$ 仍服从正态分布, 其均值与方差以及 χ_t 的显式表达式见附录. 从而, 根据式 (16) 和式 (18) 有

$$\begin{aligned} & \prod_{t=1}^T \frac{p(X_t | V_{t-1}, \theta) p(V_t | X_t, V_{t-1}, \theta)}{m_t(V_t | X_t, V_{t-1}, a_t)} \\ &= \prod_{t=1}^T \frac{p(X_t | V_{t-1}, \theta) p(V_t | X_t, V_{t-1}, \theta)}{k_t(V_t | X_t, V_{t-1}, a_t) \chi_t(X_t, V_{t-1}; a_t)} \\ &= \prod_{t=1}^T \frac{p(X_t | V_{t-1}, \theta) \chi_t(X_t, V_{t-1}; a_t)}{\exp\{a_{1,t} V_t + a_{2,t} V_t^2\}} \\ &= p(X_1 | V_0, \theta) \chi_1(X_1, V_0, a_1) \times \prod_{t=1}^T \frac{p(X_{t+1} | V_t, \theta) \chi_{t+1}(X_{t+1}, V_t; a_{t+1})}{\exp\{a_{1,t} V_t + a_{2,t} V_t^2\}} \quad (19) \end{aligned}$$

其中 $p(X_{t+1} | V_t, \theta) \equiv \chi_{t+1}(X_{t+1}, V_t; a_{t+1}) \equiv 1$. 从而, 根据 Richard 和 Zhang^[34], 为了最小化 THSV-DL 模型的似然函数的 EIS - 蒙特卡罗估计式 (15) 的方差, 需要求解如下的最小化问题

$$(\hat{a}_t, \hat{c}_t) = \arg \min_{(a_t, c_t)} \sum_{s=1}^S \{ \ln [p(X_{t+1} | V_t^{(s)}, \theta) \chi_{t+1}(X_{t+1}, V_t^{(s)}; \hat{a}_{t+1})] - c_t - \ln [\exp\{a_{1,t} V_t^{(s)} + a_{2,t} (V_t^{(s)})^2\}] \}^2 \quad (20)$$

可以看到, 最小化问题 (20) 等价于如下的线性回归问题

$$\ln p(X_{t+1} | V_t^{(s)}, \theta) + \ln \chi_{t+1}(X_{t+1}, V_t^{(s)}; \hat{a}_{t+1}) = c_t + a_{1,t} V_t^{(s)} + a_{2,t} (V_t^{(s)})^2, s = 1, \dots, S \quad (21)$$

因此, 综合起来, EIS 算法的具体步骤如下:

- 1) 从自然抽样密度 $\{p(V_t | X_t, V_{t-1}^{(s)}, \theta)\}_{t=1}^T$ 抽取样本 $\{V_t^{(s)}\}_{t=1}^T$;
- 2) 对式 (21) 进行逐步线性回归 ($t = T \rightarrow 1$), 得到 EIS 辅助参数估计 $\{\hat{a}_t\}_{t=1}^T$;
- 3) 从 EIS 密度 $\{m(V_t | X_t, V_{t-1}^{(s)}, \hat{a}_t)\}_{t=1}^T$ 中抽取新的样本 $\{V_t^{(s)}\}_{t=1}^T$;
- 4) 重复 2) 和 3), 直到收敛;
- 5) 将 EIS 辅助参数的估计值 $\{\hat{a}_t\}_{t=1}^T$ 及抽取的样本 $\{V_t^{(s)}\}_{t=1}^T$ 代入式 (15), 计算似然函数的 EIS - 蒙特卡罗估计

$$\begin{aligned} \hat{L}(\theta; \mathbf{X}) &= \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left[\prod_{t=1}^T \frac{p(X_t | V_{t-1}^{(s)}, \theta) p(V_t^{(s)} | X_t, V_{t-1}^{(s)}, \theta)}{m_t(V_t^{(s)} | X_t, V_{t-1}^{(s)}, \hat{a}_t)} \right] \\ &= \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left[\prod_{t=1}^T \frac{p(X_t | V_{t-1}^{(s)}, \theta) \chi_t(X_t, V_{t-1}^{(s)}; \hat{a}_t)}{\exp\{\hat{a}_{1,t} V_t^{(s)} + \hat{a}_{2,t} (V_t^{(s)})^2\}} \right] \end{aligned}$$

在 EIS 算法的实际运用中,使用同一组普通随机数(common random numbers ,CRNs) 来产生样本,从而保证 EIS 算法可以获得更快的收敛速度. 实际中一般只需 3 - 5 次迭代即可达到收敛. 关于 EIS 方法的收敛性分析可以参考 Koopman 等^[39].

3 模拟研究

构建蒙特卡罗模拟实验来研究上一节给出的 EIS-ML 估计方法的精确性以及小样本性质. 根据 THSV-DL 模型 (3) 及 (5) —(7), 模拟产生 $T = 1\,000$ 个样本长度的时间序列. 基于实证研究的结果,模型的真实参数值设定为 $\theta = (0.000\,0, 0.020\,0, 0.970\,0, 0.950\,0, 0.150\,0, 0.200\,0, -0.150\,0, -0.300\,0)$: 一般而言,均值参数 μ 接近于 0. 持续性参数 $|\phi_0| < 1, |\phi_1| < 1$, 以保证对数波动率过程的平稳性. 事实上,研究发现

ϕ_0 和 ϕ_1 均接近于 1,表明波动率的持续性一般很强,且 $\phi_0 > \phi_1$,表明波动率的持续性具有非对称性. $\sigma_{v_0} < \sigma_{v_1}$,表明波动率的波动率具有非对称性. 杠杆效应参数 ρ_0 和 ρ_1 介于 -1 和 0 之间,且 $\rho_0 > \rho_1$,表明杠杆效应也具有非对称性.

在 EIS-ML 算法中,设置 $S = 32$,EIS 迭代次数设为 5 次. 重复模拟实验 100 次来获得参数估计的均值、标准差和均方根误差 (RMSE). EIS-ML 算法采用 Matlab 7.8.0 编程,在 Windows XP 1.6 GHz 计算机上实现. 表 1 给出了数值模拟的实验结果. 可以看到,参数估计的均值均接近于相应的真实参数值,除杠杆效应参数 ρ_0 和 ρ_1 外,其估计标准误差也都比较小,表明 EIS-ML 估计方法是比较精确的^④. 此外,参数估计值 RMSE 也都接近于标准误差,表明其有限样本偏差也是小的. 综上所述,运用 EIS-ML 方法估计 THSV-DL 模型,可以获得比较可靠和有效的估计量.

表 1 数值模拟实验结果

Table 1 Experimental results for simulations

参数	真实值	均值	标准差	RMSE
μ	0.000 0	0.000 0	0.000 5	0.000 5
σ_x	0.020 0	0.019 9	0.004 6	0.004 5
ϕ_0	0.970 0	0.968 9	0.047 1	0.049 2
ϕ_1	0.950 0	0.949 1	0.049 1	0.048 9
σ_{v_0}	0.150 0	0.147 3	0.079 3	0.080 0
σ_{v_1}	0.200 0	0.195 2	0.076 1	0.075 9
ρ_0	-0.150 0	-0.157 6	0.267 6	0.289 2
ρ_1	-0.300 0	-0.308 1	0.230 9	0.233 0

注: $S = 32$; EIS 迭代 5 次; 取不同的随机数种子重复模拟实验 100 次来获得参数估计的均值、标准差和均方根误差 (RMSE).

4 实证研究

4.1 数据选取与基本统计描述

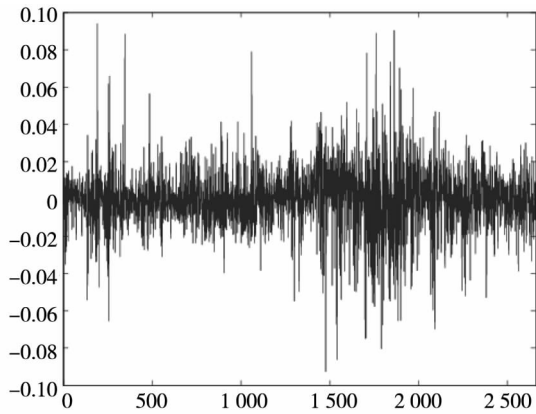
运用 THSV-DL 模型对中国股市进行实证分析. 选取上证综合指数和深证成份指数的日收盘价格为研究样本,样本区间为 2001 年 1 月 2 日至 2011 年 12 月 30 日,两个指数的样本量均

为 2 662. 所有数据均来源于国泰安 CSMAR 数据库. 将上证综合指数和深证成份指数价格转化为对数收益率: $X_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$,其中 P_t 是 t 时刻的指数收盘价格. 图 1 给出了上证综合指数和深证成份指数的日对数收益率序列图,表 2 给出了指数日对数收益率序列的描述性统计量. 从图 1 可以看到,上证综合指数和深证成份指数的日对数收益率序列展现出相似的变动特

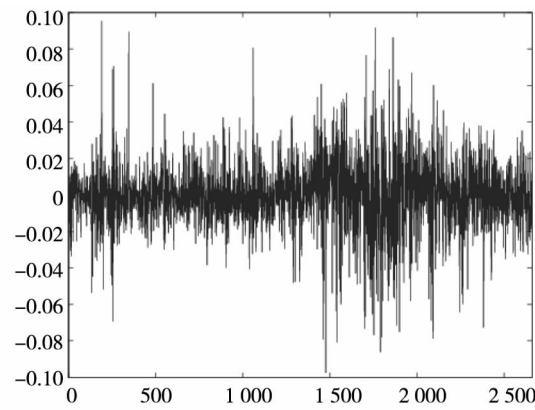
④ 事实上,杠杆效应参数的准确估计在金融学文献中仍是一个难题,包括采用目前流行的马尔可夫链蒙特卡罗 (MCMC) 方法对其估计也存在较大的估计标准误差,因此杠杆效应参数的准确估计问题值得进一步研究.

征,都在抽样阶段内表现出明显的波动率时变性和“波动率聚集”典型特征事实.为了描述这

种复杂的波动率动态性,本文运用 THSV-DL 模型.



(a) 上证综合指数收益



(b) 深证成份指数收益

图 1 上证综合指数和深证成份指数日对数收益率序列图,样本区间 1/2/2001 - 12/30/2011

Fig. 1 Time series of daily log-returns of SSE composite and SZSE component indices for sample period from 1/2/2001 to 12/30/2011

表 2 上证综合指数和深证成份指数日对数收益率序列的描述性统计量

Table 2 Descriptive statistics of daily log-returns of SSE composite and SZSE component indices

	均值	最大值	最小值	标准差	偏度	峰度	Jarque-Bera
上证综合指数	0.000 0	0.094 0	-0.092 6	0.016 9	-0.125 9	6.770 8	1 583.554 (0.000)
深证成份指数	0.000 2	0.095 3	-0.097 5	0.018 6	-0.166 0	6.045 9	1 040.837 (0.000)

注: () 中是 Jarque-Bera 统计量的 p 值.

4.2 模型参数估计

运用 EIS-ML 估计方法,得到 THSV-DL 模型 的参数估计结果见表 3 - 表 4. 为了比较起见,也 给出基本的 SV 模型、SV-L 模型、基本的 THSV 模 型以及 THSV-L 模型 的参数估计结果. 从表 3 - 表 4 可以看到,波动率持续性参数 ϕ (SV 和 SV-L 模型)、 ϕ_0 和 ϕ_1 (THSV、THSV-L 和 THSV-DL 模型) 均接近于 1,表明沪深股市都具有很强的波 动率持续性. 此外 ϕ_0 均大于 ϕ_1 ,说明波动率持 续性具有非对称性,利空消息对中国股市造成的 影响比同等程度利好消息对中国股市造成的影响 更加深远; σ_{V_0} 均小于 σ_{V_1} (THSV-L 和 THSV-DL 模型),说明与利好消息相比,利空消息会造成 更低的市场波动率的波动率; 杠杆效应参数 ρ (SV-L 和 THSV-L 模型)、 ρ_0 和 ρ_1 (THSV-DL 模

型) 均小于 0,说明沪深股市存在显著的杠杆效 应. 此外, $|\rho_0|$ 均小于 $|\rho_1|$,说明杠杆效应具有 非对称性. 具体而言,由于杠杆效应的存在,利 好消息会造成市场波动率的下降,利空消息会造 成市场波动率的增加,但其下降与增加的幅度是 非对称的,利空消息造成的市场波动率增加的幅 度要小于同等程度利好消息造成的市场波动率下 降的幅度,这表明中国股市的参与者对利好消息 的反应强度高于对利空消息的反应强度. 上述综 合解释了金融市场对于利好消息和利空消息的反 应具有非对称性. 最后,从表 3 - 表 4 还可以看 到, THSV-DL 模型具有最高的对数似然 (Log-lik) 值以及最小的 AIC 值,说明 THSV-DL 模 型在所有模型中表现最优.

表 3 参数估计结果: 上证综合指数

Table 3 Estimation results for SSE composite index

参数	SV	SV-L	参数	THSV	THSV-L	THSV-DL
μ	0.000 1(0.000 3) [< 0.000 1]	- 0.000 0(0.000 3) [< 0.000 1]	μ	0.000 1(0.000 3) [< 0.000 1]	0.000 0(0.000 3) [< 0.000 1]	0.000 0(0.000 3) [< 0.000 1]
σ_x	0.014 1(0.001 0) [< 0.000 1]	0.014 1(0.001 0) [< 0.000 1]	σ_x	0.013 4(0.001 1) [< 0.000 1]	0.017 5(0.003 5) [0.000 1]	0.018 6(0.001 2) [0.000 2]
ϕ_0	0.973 7(0.007 1) [< 0.000 1]	0.971 3(0.007 6) [< 0.000 1]	ϕ_0	0.996 3(0.022 0) [< 0.000 1]	0.992 5(0.016 6) [0.000 1]	0.980 7(0.020 0) [0.000 6]
σ_{v_0}	0.189 7(0.022 5) [0.000 2]	0.199 7(0.023 7) [0.000 2]	ϕ_1	0.953 4(0.020 0) [< 0.000 1]	0.950 3(0.020 2) [0.000 2]	0.958 9(0.020 6) [0.000 7]
ρ_0	-	- 0.223 5(0.062 9) [0.000 1]	σ_{v_0}	0.189 1(0.022 3) [0.000 2]	0.134 6(0.048 2) [0.001 9]	0.172 4(0.051 3) [0.001 9]
			σ_{v_1}	-	0.252 8(0.039 9) [0.001 0]	0.236 4(0.042 9) [0.001 2]
			ρ_0	-	- 0.289 7(0.087 2) [0.002 5]	- 0.159 1(0.118 5) [0.005 4]
			ρ_1	-	-	- 0.314 8(0.064 7) [0.003 4]
Log-lik	7 413.953 9 [0.046 7]	7 419.686 7 [0.046 7]	-	7 414.492 4 [0.048 8]	7 421.261 9 [0.164 5]	7 424.739 [0.124 9]
AIC	- 6.131 5	- 6.135 4	-	- 6.131 1	- 6.135 1	- 6.137 1

注: $S = 32$; EIS 迭代 5 次; Log-lik 是对数似然函数值; AIC 是赤池信息准则; () 中是 EIS-ML 估计的渐近标准误差 [] 中是取不同的随机数种子重复估计模型 20 次得到的参数估计的蒙特卡罗标准误差.

表 4 参数估计结果: 深证成份指数

Table 4 Estimation results for SZSE component index

参数	SV	SV-L	参数	THSV	THSV-L	THSV-DL
μ	0.000 0(0.000 3) [< 0.000 1]	- 0.000 1(0.000 3) [< 0.000 1]	μ	0.000 1(0.000 3) [< 0.000 1]	- 0.000 1(0.000 3) [< 0.000 1]	- 0.0001(0.000 3) [< 0.000 1]
σ_x	0.015 8(0.001 2) [< 0.000 1]	0.016 0(0.001 2) [< 0.000 1]	σ_x	0.015 0(0.001 3) [< 0.000 1]	0.019 6(0.005 2) [0.000 1]	0.022 5(0.001 4) [0.000 2]
ϕ_0	0.976 3(0.006 5) [< 0.000 1]	0.976 4(0.006 6) [< 0.000 1]	ϕ_0	0.999 0(0.018 4) [< 0.000 1]	0.993 8(0.017 4) [0.000 2]	0.982 7(0.016 4) [0.000 7]
σ_{v_0}	0.175 2(0.020 7) [0.000 2]	0.179 8(0.021 1) [0.000 2]	ϕ_1	0.953 0(0.018 2) [0.000 1]	0.960 1(0.023 3) [0.000 2]	0.969 3(0.018 7) [0.000 9]
ρ_0	-	- 0.201 9(0.066 6) [0.000 1]	σ_{v_0}	0.177 7(0.020 2) [0.000 2]	0.124 6(0.054 7) [0.001 7]	0.154 1(0.050 8) [0.001 8]
			σ_{v_1}	-	0.219 2(0.034 3) [0.001 2]	0.206 9(0.034 5) [0.001 3]
			ρ_0	-	- 0.264 7(0.091 7) [0.002 1]	- 0.129 7(0.120 0) [0.004 9]
			ρ_1	-	-	- 0.310 4(0.071 5) [0.003 7]
Log-lik	7 140.142 0 [0.043 1]	7 144.443 0 [0.042 7]	-	7 141.211 0 [0.045 7]	7 145.795 7 [0.160 9]	7 149.163 5 [0.121 7]
AIC	- 5.905 0	- 5.907 7	-	- 5.905 0	- 5.907 2	- 5.909 1

注: $S = 32$; EIS 迭代 5 次; Log-lik 是对数似然函数值; AIC 是赤池信息准则; () 中是 EIS-ML 估计的渐近标准误差 [] 中是取不同的随机数种子重复估计模型 20 次得到的参数估计的蒙特卡罗标准误差.

4.3 模型诊断分析

下面,为了评价模型的拟合能力,对模型的残差进行诊断分析. 首先,运用粒子滤波 (particle filter) 算法^[40], 得到滤过的波动率 ($\hat{v}_t = \hat{\sigma}_X E[\exp(V_t/2) | \mathcal{F}_t]$, 其中 $\hat{\sigma}_X$ 是 EIS-ML 估计值, \mathcal{F}_t 是 t 时刻的信息集) 见图 2 - 图 3. 可以看到,沪市和深市波动率的变化特征与指数收益的绝对值的变化特征基本吻合,表明各 SV 模型都能较好地描述上证综合指数和深证成份指数收益率变化的时变波动特征. 继而,得到模型的标准化残差序列

$$z_t = \frac{X_t - \hat{\mu}}{\hat{v}_{t-1}} \quad (22)$$

图 4 - 图 5 给出了模型的标准化残差序列图,表 5 给出了模型标准化残差序列的诊断分析结果. 从表 5 可以看到,上证综合指数和深证成份指数的残差序列的均值均接近于 0, 标准差均接近于 1, 峰度均接近于 3, Jarque-Bera 统计量表明,除了基本的 SV 模型与 THSV 模型(上证综合指数)外,在 5% 置信水平下都不能拒绝

残差序列服从正态分布的假设,表明残差序列基本上为一个 i. i. d. 的标准正态分布序列,这从图 6 - 图 7 的残差 Q-Q 图也得以验证. 进一步,从残差平方序列的 Ljung-Box 统计量可以看出,接受残差“无自相关性”的原假定,这从图 8 - 图 9 所示的残差平方序列的自相关函数图也可以看出. 综上,所拟合的具有杠杆或门限效应的 SV 模型是充分的.

4.4 VaR 估计结果及后验测试

在金融市场风险管理中最为关键的工作之一就在于对金融市场风险进行精确度量. 由于风险值(Value at Risk, VaR) 概念简单、易于计算等特点,它已经成为在风险管理中最广泛使用的金融市场风险的度量标准. 许多金融机构与风险管理者都通过计算 VaR 来防范市场风险,国际清算银行(bank for international settlements, BIS) 要求各银行成员根据 VaR 来安排资本充足率.

对于一个多头头寸, 概率为 p 的 VaR 定义为

$$P(X_t \leq VaR_t) = p \quad (23)$$

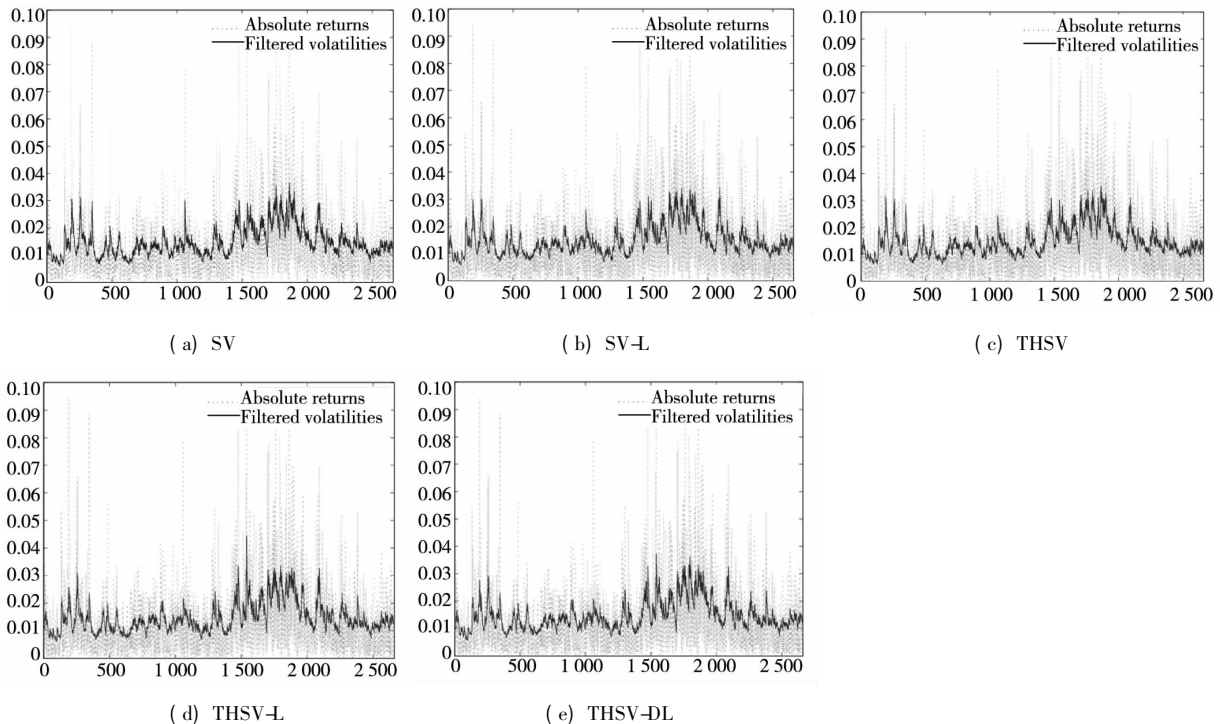


图 2 绝对收益及其滤过的波动率序列图: 上证综合指数

Fig. 2 Time series of absolute returns and of filtered volatilities for SSE composite index

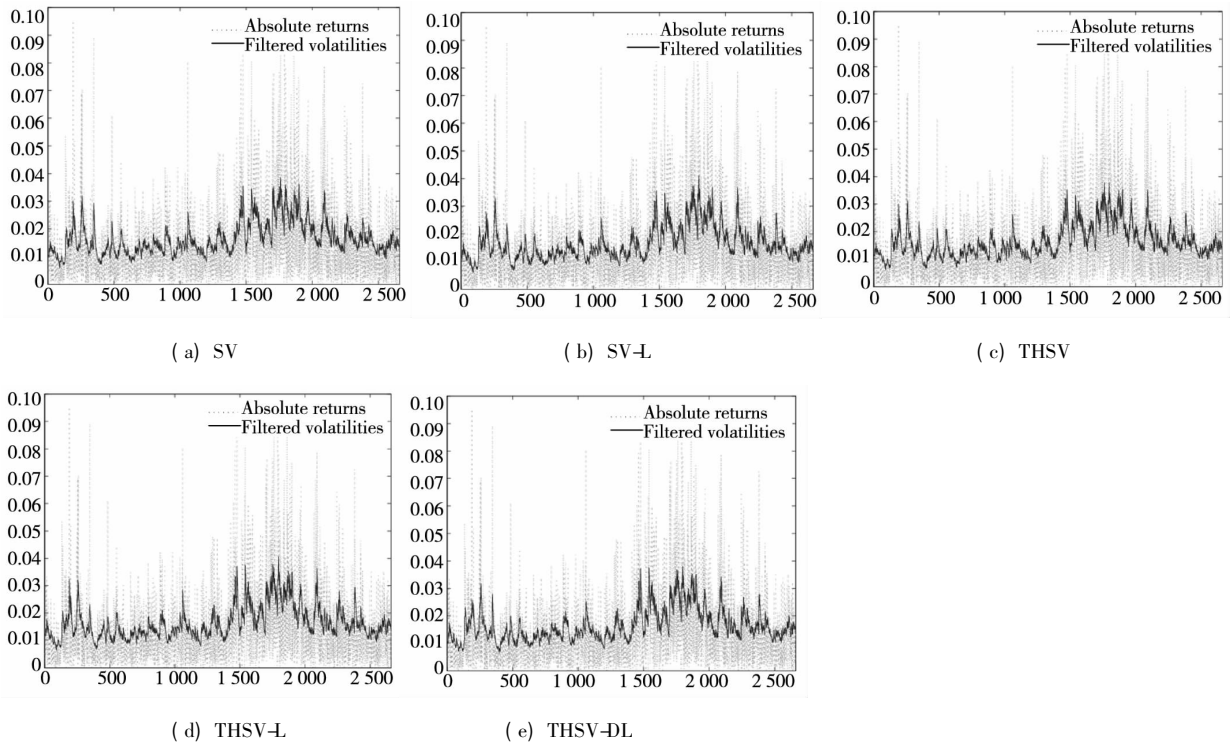


图3 绝对收益及其滤过的波动率序列图: 深证成份指数

Fig. 3 Time series of absolute returns and of filtered volatilities for SZSE component index

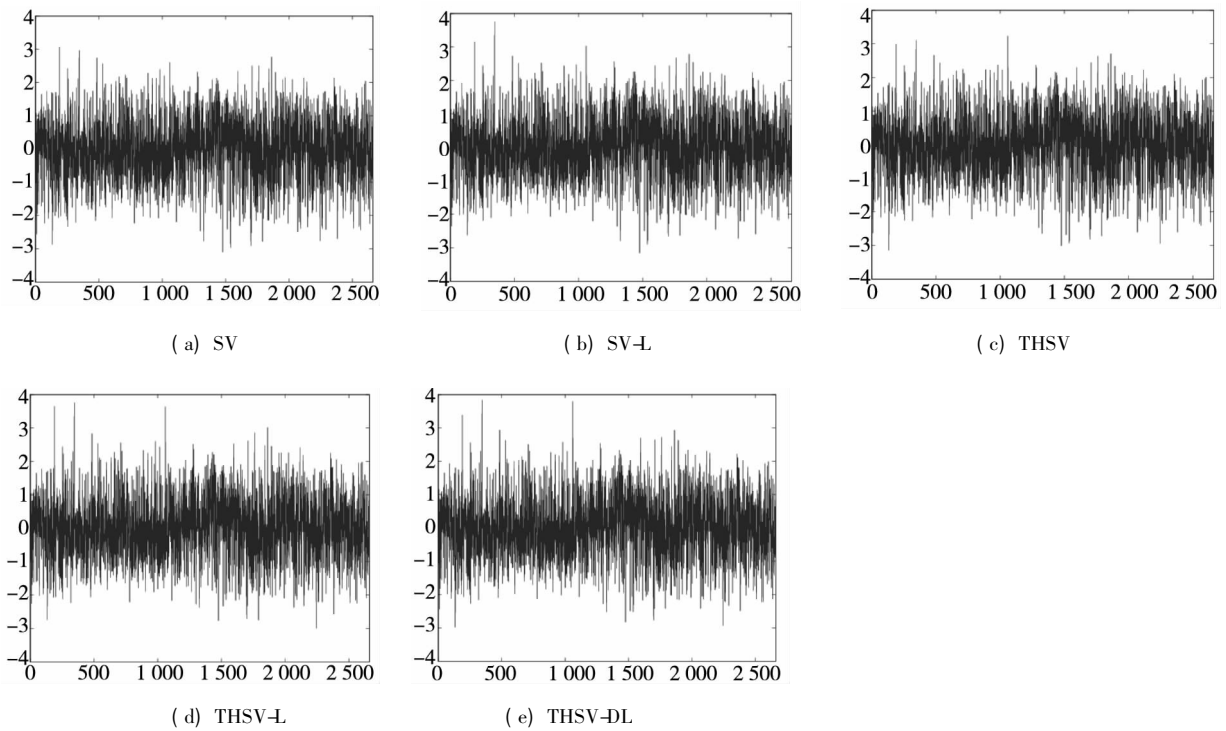


图4 标准化残差序列: 上证综合指数

Fig. 4 Standardized residuals for SSE composite index

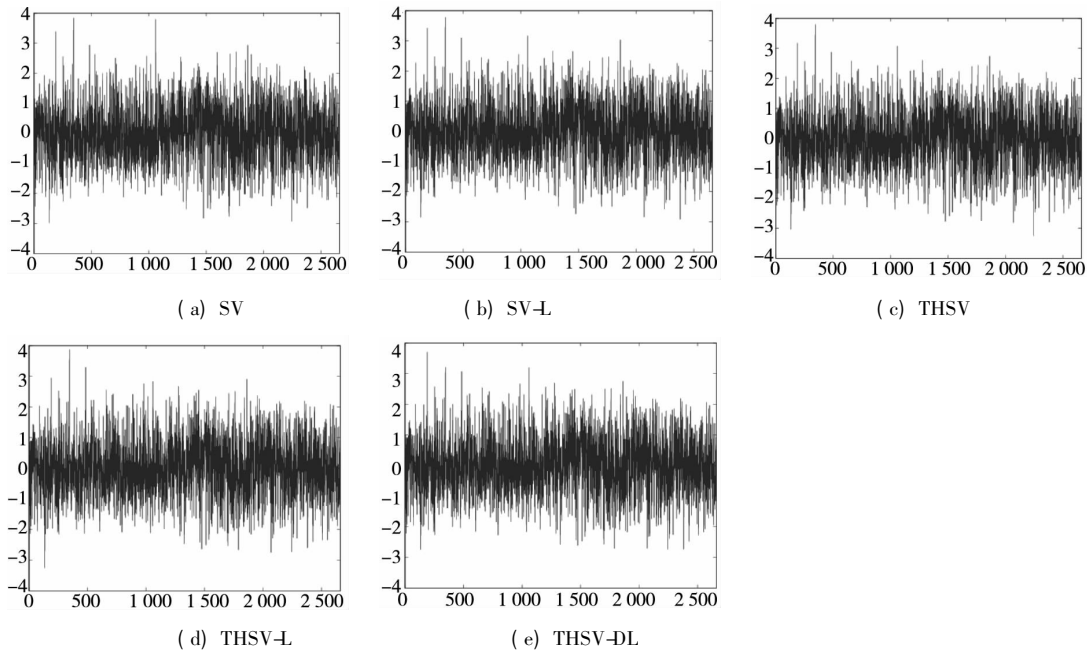


图 5 标准化残差序列: 深证成份指数

Fig. 5 Standardized residuals for SZSE component index

表 5 残差诊断分析结果

Table 5 Diagnostics for the residuals

指数	模型	均值	标准差	峰度	Jarque-Bera	Q(10)	Q(20)
上证综指	SV	-0.007 4	0.951 2	2.930 0	7.575 4 (0.022 6)	10.917 (0.364)	17.160 (0.643)
	SV-L	0.023 9	0.949 6	2.947 5	0.308 6 (0.857 0)	9.214 (0.512)	17.593 (0.614)
	THSV	-0.006 5	0.959 5	2.924 6	6.543 5 (0.037 9)	9.212 (0.512)	16.757 (0.669)
	THSV-L	0.025 9	0.958 0	2.966 7	0.987 0 (0.610 5)	7.677 (0.660)	16.555 (0.682)
	THSV-DL	0.024 0	0.961 0	2.982 0	0.316 1 (0.853 8)	8.339 (0.596)	17.755 (0.604)
深证成指	SV	0.004 7	0.953 4	2.935 0	3.454 7 (0.177 7)	12.357 (0.262)	22.534 (0.312)
	SV-L	0.035 8	0.957 1	2.949 9	0.450 2 (0.798 4)	9.771 (0.461)	21.522 (0.367)
	THSV	-0.000 0	0.966 7	2.934 5	1.853 8 (0.395 8)	10.828 (0.371)	22.004 (0.340)
	THSV-L	0.031 5	0.959 6	2.932 7	1.002 1 (0.605 9)	9.652 (0.472)	22.257 (0.327)
	THSV-DL	0.031 0	0.960 9	2.933 8	0.899 8 (0.637 7)	9.654 (0.471)	21.781 (0.353)

注: $Q(\cdot)$ 是残差平方序列的 Ljung-Box 统计量; () 中是对应统计量的 P 值.

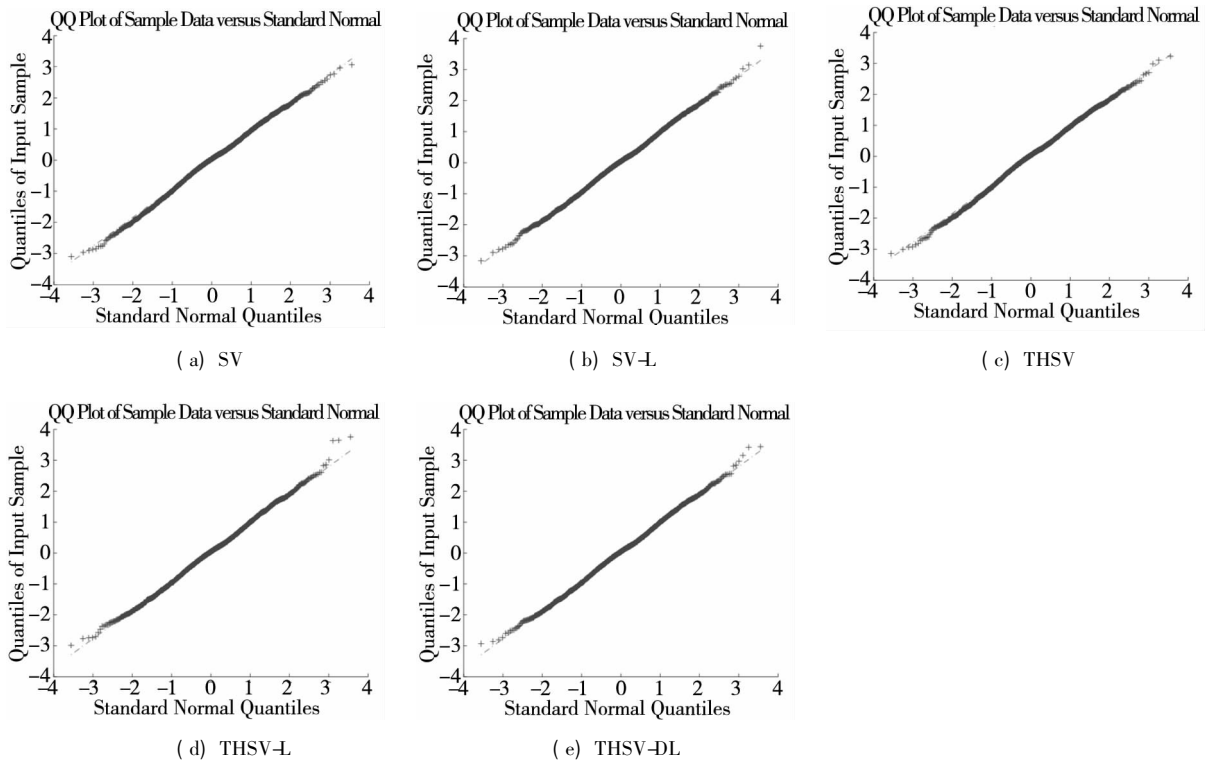


图6 标准化残差 Q-Q 图: 上证综合指数

Fig. 6 Q-Q plots for standardized residuals of SSE composite index

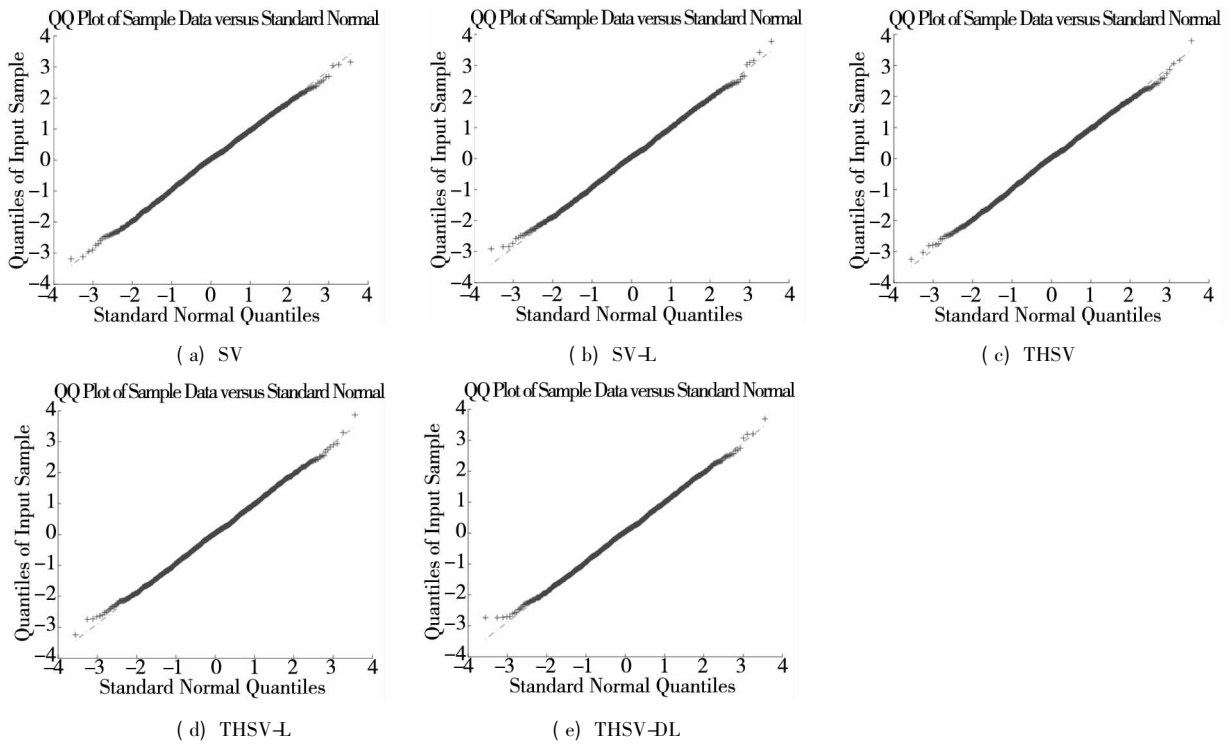


图7 标准化残差 Q-Q 图: 深证成份指数

Fig. 7 Q-Q plots for standardized residuals of SZSE component index

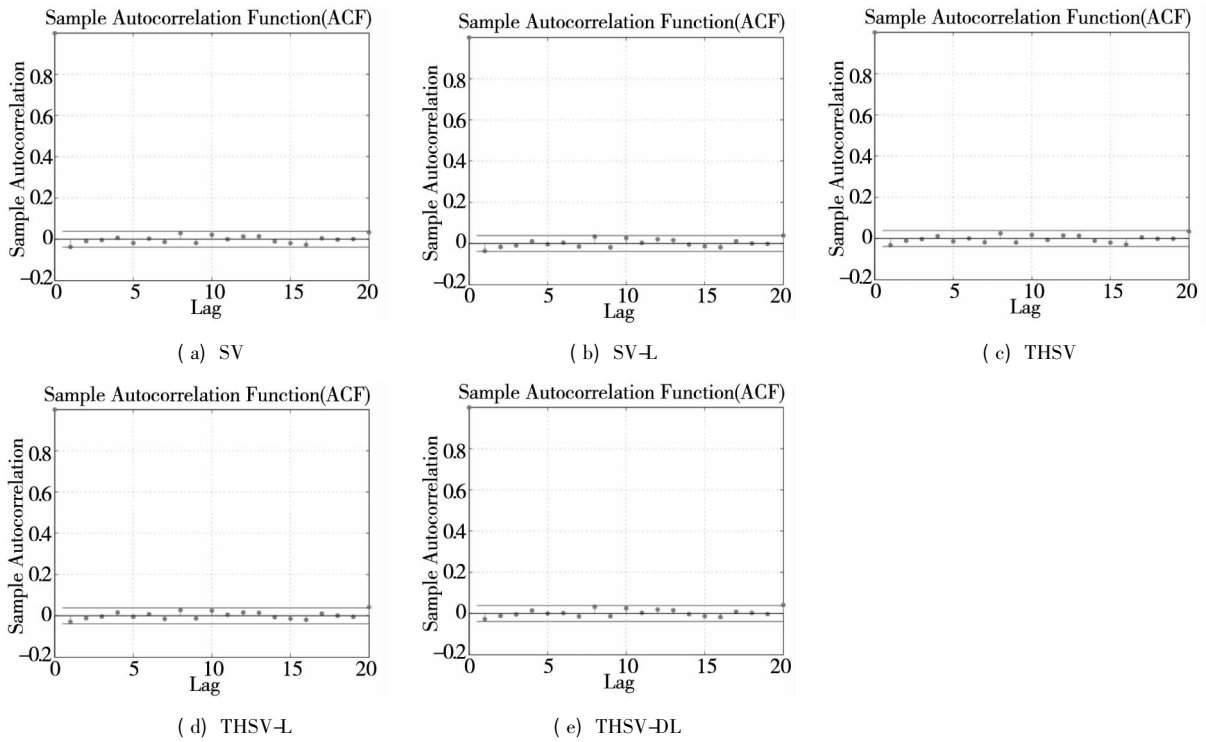


图 8 残差平方序列的自相关函数图: 上证综合指数

Fig. 8 Plots of autocorrelation function of squared residuals for SSE composite index

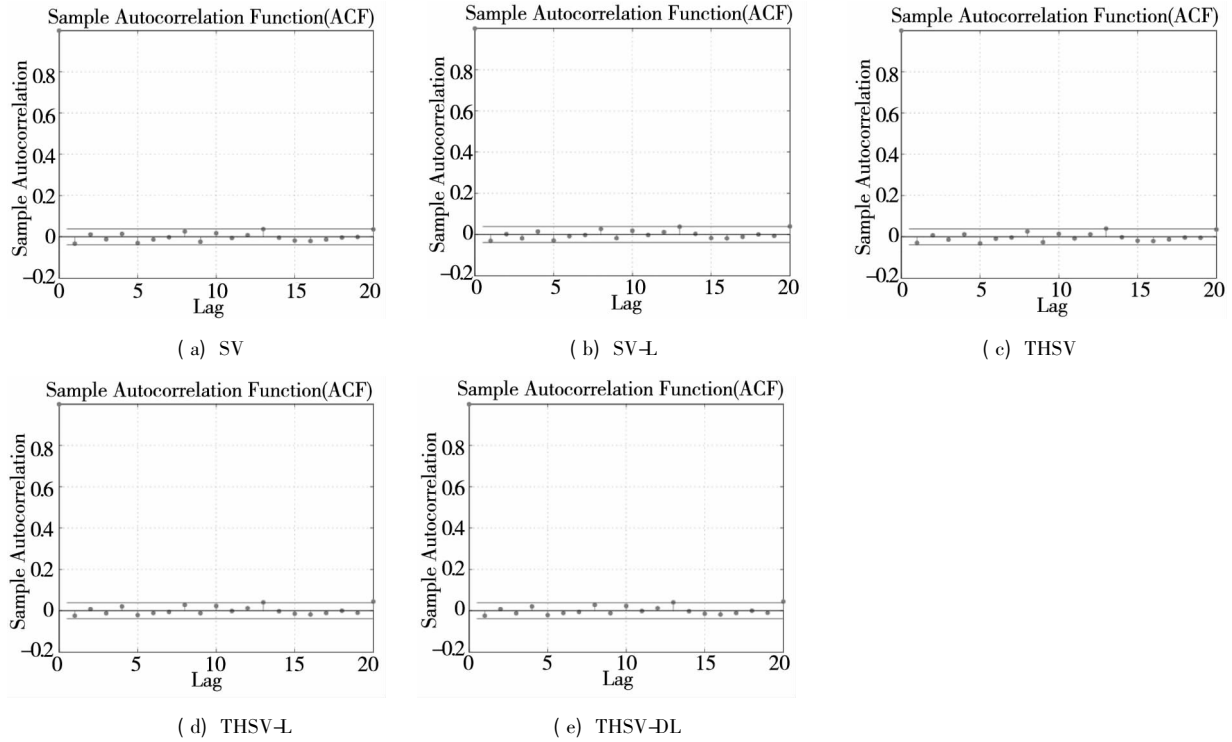


图 9 残差平方序列的自相关函数图: 深证成份指数

Fig. 9 Plots of autocorrelation function of squared residuals for SZSE component index

当资产价值下降时，一个多头金融头寸的持有者遭受损失，所以当 p 很小时，方程(23)中定义的 VaR 是一个负值，其中负号表示一个损失。

当资产价值增加时，空头头寸的持有者遭受损失，这时 VaR 定义为

$$P(X_t \geq VaR_t) = p \tag{24}$$

对于一个很小的 p ，空头头寸的 VaR 为一个正值，其中正号表示一个损失。

由此，在 THSV-DL 模型下，多头头寸的 VaR 计算公式为

$$VaR_t = \mu + z_p \sigma_X \exp(V_{t-1}/2) \tag{25}$$

空头头寸的 VaR 计算公式为

$$VaR_t = \mu + z_{1-p} \sigma_X \exp(V_{t-1}/2) \tag{26}$$

其中 z_p 和 z_{1-p} 分别是标准正态分布的左尾和右尾 p 分位数。

根据估计得到的参数以及波动率，利用公式(25)和(26)可以计算得到不同置信水平下的多头头寸(long position)和空头头寸(short position)的 VaR。在 95%、97.5%、99% 置信水平下，利用 SV, SV-L, THSV, THSV-L 和 THSV-DL 模型对上证综合指数价格风险 VaR 的估计如图 10 - 图 14^⑤。

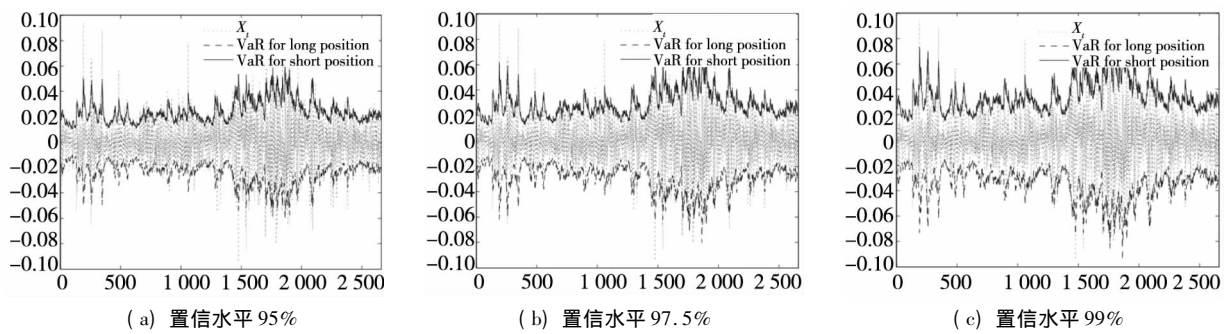


图 10 不同置信水平下基于 SV 模型的 VaR 估计图

Fig. 10 VaR estimates with different confidence levels based on SV model

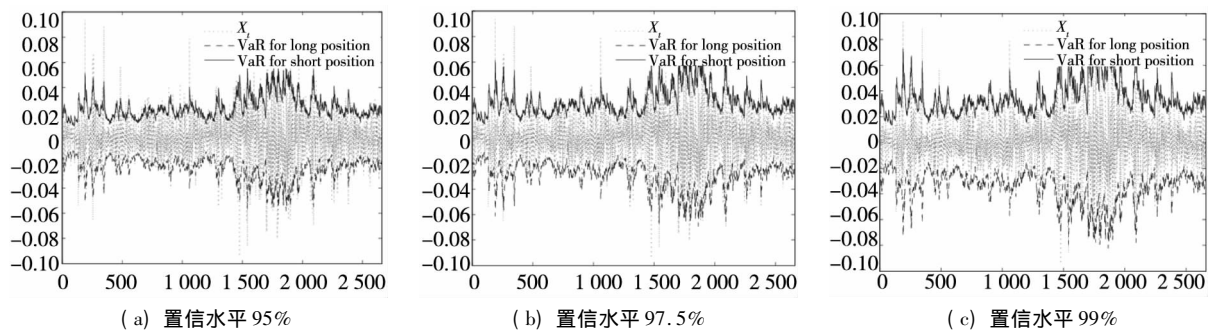


图 11 不同置信水平下基于 SV-L 模型的 VaR 估计图

Fig. 11 VaR estimates with different confidence levels based on SV-L model

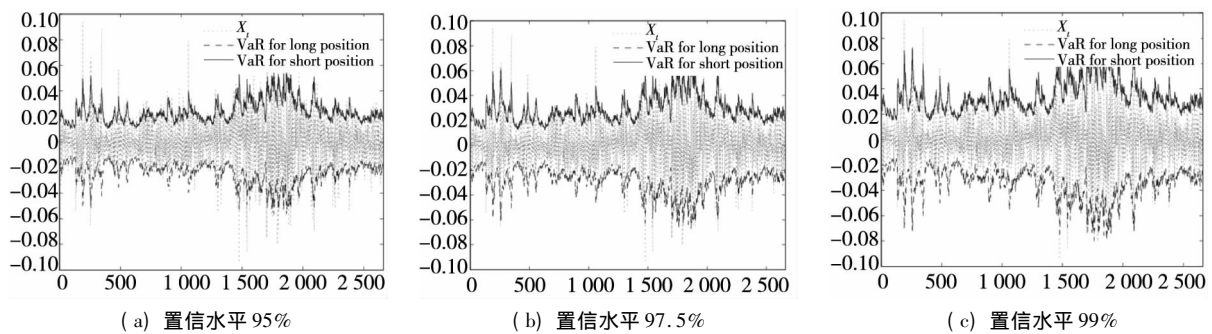


图 12 不同置信水平下基于 THSV 模型的 VaR 估计图

Fig. 12 VaR estimates with different confidence levels based on THSV model

⑤ 由于深证成份指数与上证综合指数的实证结果类似，因此这里仅给出关于上证综合指数的实证结果。关于深证成份指数的实证结果如有需要可向作者索取。

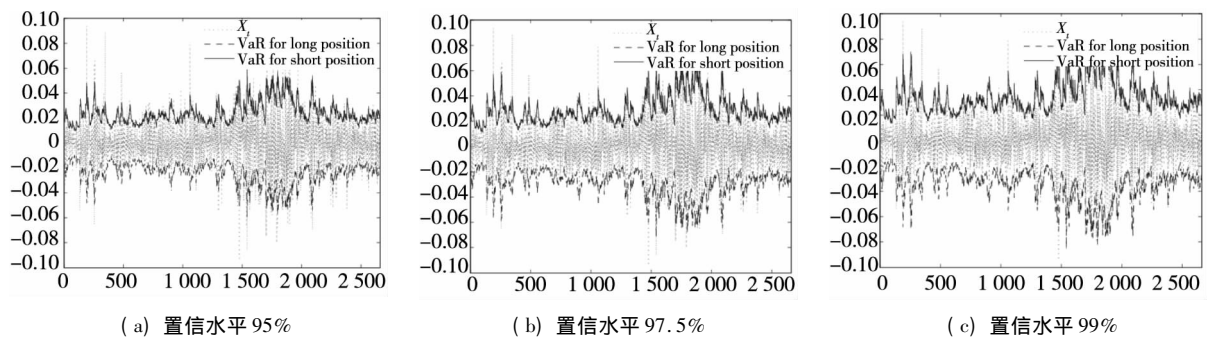


图 13 不同置信水平下基于 THSV-L 模型的 VaR 估计图

Fig. 13 VaR estimates with different confidence levels based on THSV-L model

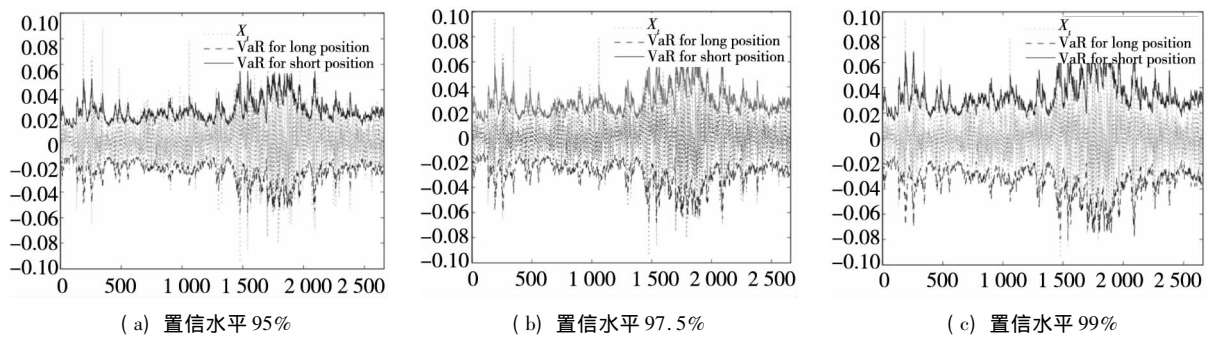


图 14 不同置信水平下基于 THSV-DL 模型的 VaR 估计图

Fig. 14 VaR estimates with different confidence levels based on THSV-DL model

下面,对 VaR 估计的准确性进行后验测试 (back-testing),即进行 Kupiec^[41] 提出的失败率检验和似然比(likelihood ratio, LR) 检验. 表 6 给出了风险测度准确性的检验结果. 从表 6 可以看到,对于多头 VaR,SV、THSV 和 THSV-DL 模型在多头 VaR 的 95%、97.5% 和 99% 置信水平下都通过了 LR 检验(1% 显著性水平下),说明这些模型都能较好的测度金融市场多头头寸的极端风险. 但是,对于空头 VaR,SV、SV-L 和 THSV

模型都没能完全通过 LR 检验,说明 SV、SV-L 和 THSV 模型均不能准确测度金融市场空头头寸的极端风险. 而 THSV-L 和 THSV-DL 模型在空头 VaR 的 95%、97.5% 和 99% 置信水平下都通过了 LR 检验,说明 THSV-L 和 THSV-DL 模型能够较好的测度金融市场空头头寸的极端风险. 综合起来,只有 THSV-DL 既能较好的测度金融市场多头头寸的极端风险,又能够较好的测度金融市场空头头寸的极端风险.

表 6 VaR 估计的失败率检验和 LR 检验: 上证综合指数

Table 6 The failure rate and LR tests of VaR estimates for SSE composite index

置信水平	检验类型	多头 VaR					空头 VaR				
		SV	SV-L	THSV	THSV-L	THSV-DL	SV	SV-L	THSV	THSV-L	THSV-DL
95%	π	0.047 7	0.040 6	0.051 1	0.040 6	0.042 8	0.038 7	0.045 8	0.042 1	0.049 6	0.048 5
	LR	0.293 8	5.291 2	0.068 4	5.291 2	3.011 1	7.720 6*	0.992 5	3.696 1	0.008 7	0.131 0
97.5%	π	0.022 5	0.016 9	0.021 8	0.017 7	0.018 8	0.013 9	0.016 9	0.015 8	0.018 8	0.019 2
	LR	0.678 4	8.045 7*	1.170 3	6.538 1	4.599 5	15.971 9*	8.045 7*	10.648 8*	4.599 5	4.036 0
99%	π	0.007 9	0.005 6	0.007 9	0.004 5	0.006 4	0.005 6	0.006 0	0.004 5	0.007 1	0.007 1
	LR	1.287 8	6.074 0	1.287 8	10.187 7*	4.020 5	6.074 0	4.984 3	10.187 7*	2.441 7	2.441 7

注: π 是 VaR 估计的失败率; * 表示在 1% 的显著性水平下显著($\chi^2(1)$ 在 1% 的显著水平临界值为 6.635), 说明模型被拒绝.

此外,从失败率 π 值可以看到,在多头 VaR 情形下,尽管 THSV-DL 模型的失败率并不比 SV 和 THSV 的失败率更接近于相应的 VaR 显著性水平(5%、2.5% 和 1%),但是它比 SV-L 和 THSV-L 却要表现得更好,说明将状态不变的杠杆效应扩展为两状态相关的杠杆效应在某种程度上增加了模型在多头 VaR 上的估计精确性.而在空头 VaR 情形下,除在 95% 置信水平下 THSV-L 模型的失败率比 THSV-DL 模型的失败率更接近于相应的 VaR 显著性水平 5% 外(即使在这种情形下,两者相差并不大: 0.049 6 vs. 0.048 5),其它情形 THSV-DL 模型均比 SV、SV-L、THSV 和 THSV-L 的失败率更接近于相应的 VaR 显著性水平(5%、2.5% 和 1%),上述综合说明 THSV-DL 模型相比 SV、SV-L、THSV 和 THSV-L 模型具有更加均衡及优越的风险测度能力.

5 结束语

本文将门限效应与状态相关的杠杆效应同时引入基本的 SV 模型中,提出一个双杠杆门限 SV(THSV-DL)模型来捕获利好消息和利空消息对股票市场的非对称效应.为了估计 THSV-DL 模型的参数,给出 EIS-ML 估计方法,模拟结果表

明该方法可靠和有效的.将 THSV-DL 模型应用于实际数据,对中国股市进行了实证分析.研究结果表明,中国股市具有很强的波动率持续性,并且存在显著的杠杆效应.更为重要的是,中国股市的波动率持续性、波动率的波动率以及杠杆效应都具有非对称性.具体而言,与利好消息相比,利空消息会造成中国股市更高的波动率持续性以及更低的波动率的波动率和杠杆效应,这揭示了:

- 1) 利空消息对中国股市造成的影响比同等程度利好消息对中国股市造成的影响更加深远;
- 2) 由于杠杆效应,利空消息造成市场波动率的增加,此时市场波动率处于一个相对稳定的高位;利好消息造成市场波动率的降低,此时市场波动率处于一个相对活跃的低位;
- 3) 中国股市的参与者对利好消息的反应强度高于对利空消息的反应强度.

上述综合解释了金融市场对于利好消息和利空消息的反应具有非对称性.

最后,本文将提出的 THSV-DL 模型应用于 VaR 的估计.基于上证综合指数的实证研究表明,THSV-DL 模型相比 SV、SV-L、THSV 和 THSV-L 模型具有更加均衡及优越的风险测度能力.

参 考 文 献:

- [1] Kim S, Shephard N, Chib S. Stochastic volatility: Likelihood inference and comparison with ARCH models[J]. *Review of Economic Studies*, 1998, 65: 361 - 393.
- [2] Yu J. Forecasting volatility in the New Zealand stock market[J]. *Applied Financial Economics*, 2002, 12: 193 - 202.
- [3] Melino A, Turnbull S M. Pricing foreign currency options with stochastic volatility[J]. *Journal of Econometrics*, 1990, 45: 239 - 265.
- [4] Harvey A C, Ruiz E, Shephard N. Multivariate stochastic variance models[J]. *Review of Economic Studies*, 1994, 61: 247 - 264.
- [5] Jacquier E, Polson N G, Rossi P E. Bayesian analysis of stochastic volatility models[J]. *Journal of Business & Economic Statistics*, 1994, 12: 371 - 389.
- [6] Gallant A R, Hsieh D, Tauchen G. Estimation of stochastic volatility models with diagnostics[J]. *Journal of Econometrics*, 1997, 81(1): 159 - 192.
- [7] Gallant A R, Tauchen G. Estimation of continuous-time models for stock returns and interest rates[J]. *Macroeconomic Dynamics*, 1997, 1: 135 - 168.
- [8] Broto C, Ruiz E. Estimation methods for stochastic volatility models: A survey[J]. *Journal of Economic Surveys*, 2004, 18

(5): 613 – 649.

- [9] Jacquier E, Polson N G, Rossi P E. Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat-tails and correlated errors [J]. *Journal of Econometrics*, 2004, 122: 185 – 212.
- [10] Black F. Studies of stock price volatility changes [C]. In *Proceedings of the 1976 Meeting of Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association*, 1976, 177 – 181.
- [11] Christie A A. The stochastic behavior of common stock variances [J]. *Journal of Financial Economics*, 1982, 10: 407 – 432.
- [12] Hull J, White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities [J]. *Journal of Finance*, 1987, 42: 281 – 300.
- [13] Harvey A C, Shephard N. The estimation of an asymmetric stochastic volatility model for asset returns [J]. *Journal of Business & Economic Statistics*, 1996, 14: 429 – 434.
- [14] Yu J. On leverage in a stochastic volatility model [J]. *Journal of Econometrics*, 2005, 127: 165 – 178.
- [15] 孟利锋, 张世英, 何 信. 具有杠杆效应 SV 模型的贝叶斯分析及其应用 [J]. *系统工程*, 2004, 22(3): 47 – 51.
Meng Lifeng, Zhang Shiyong, He Xin. Bayesian analysis of stochastic volatility model with leverage effect and its application [J]. *Systems Engineering*, 2004, 22(3): 47 – 51. (in Chinese)
- [16] 孟利锋, 张世英. 具有杠杆效应的非线性 SV 模型及其应用 [J]. *系统管理学报*, 2009, 18(1): 14 – 20.
Meng Lifeng, Zhang Shiyong. Nonlinear stochastic volatility model with leverage effect and its application [J]. *Journal of Systems & Management*, 2009, 18(1): 14 – 20. (in Chinese)
- [17] 黄 波, 顾孟迪, 李 湛. 偏正态随机波动模型及其实证检验 [J]. *管理科学学报*, 2010, 13(2): 77 – 85.
Huang Bo, Gu Mengdi, Li zhan. Stochastic volatility model with skew normal distribution and its empirical test [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2010, 13(2): 77 – 85. (in Chinese)
- [18] 王春峰, 蒋祥林, 李 刚. 基于随机波动性模型的中国股市波动估计 [J]. *管理科学学报*, 2003, 6(4): 63 – 72.
Wang Chunfeng, Jiang Xianglin, Li Gang. Estimating volatility of Chinese stock market by stochastic volatility model [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2003, 6(4): 63 – 72. (in Chinese)
- [19] Glosten L, Jagannathan R, Runkle D. On the relation between the expected value and volatility of nominal excess returns on stocks [J]. *Journal of Finance*, 1993, 46: 1779 – 1801.
- [20] Li C W, Li W K. On a double-threshold autoregressive heteroscedastic time series model [J]. *Journal of Applied Econometrics*, 1996, 11: 253 – 274.
- [21] Chen C W S, So M K P. On a threshold heteroscedastic model [J]. *International Journal of Forecasting*, 2006, 22: 73 – 89.
- [22] So M K P, Li W K, Lam K. A threshold stochastic volatility model [J]. *Journal of Forecasting*, 2002, 21: 473 – 500.
- [23] Diop A, Guegan D. Tail behavior of a threshold autoregressive stochastic volatility model [J]. *Extremes*, 2004, 7(4): 367 – 375.
- [24] Asai M, McAleer M. Dynamic leverage and threshold effects in stochastic volatility models [R]. *Faculty of Economics, Tokyo Metropolitan University*, 2004.
- [25] Chen C W S, Liu F C, So M K P. Heavy-tailed distributed threshold stochastic volatility models in financial time series [J]. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 2008, 50: 29 – 51.
- [26] So M K P, Choi C Y. A multivariate threshold stochastic volatility model [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, 79: 306 – 317.
- [27] So M K P, Choi C Y. A threshold factor multivariate stochastic volatility model [J]. *Journal of Forecasting*, 2009, 28: 712 – 735.
- [28] Elliott R J, Liew C C, Siu T K. On filtering and estimation of a threshold stochastic volatility model [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 218: 61 – 75.
- [29] Fan T H, Wang Y F. An empirical Bayesian forecast in the threshold stochastic volatility models [J]. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, iFirst, 2011, 1 – 15.

- [30]Montero-Lorenzo J M , Garcia-Centeno M C , Fernandez-Aviles G. A threshold autoregressive asymmetric stochastic volatility strategy to alert of violations of the air quality standards [J]. *International Journal of Environmental Research* , 2011 , 5(1) : 23 – 32.
- [31]Smith D R. Asymmetry in stochastic volatility models: Threshold or correlation [J]. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics* , 2009 , 13(3) : 1 – 34.
- [32]Andersen T G , Sørensen B E. GMM estimation of a stochastic volatility model: A Monte Carlo study [J]. *Journal of Business & Economics Statistics* , 1996 , 14(3) : 328 – 352.
- [33]Shephard N. Fitting nonlinear time-series models with applications to stochastic variance models [J]. *Journal of Applied Econometrics* , 1993 , 8: S135 – S152.
- [34]Richard J F , Zhang W. Efficient high-dimensional importance sampling [J]. *Journal of Econometrics* , 2007 , 127(2) : 1385 – 1411.
- [35]Liesenfeld R , Richard J F. Estimation of dynamic bivariate mixture models: Comments on Watanabe (2000) [J]. *Journal of Business & Economic Statistics* , 2003 , 21(4) : 570 – 576.
- [36]Tong H , Lim K S. Threshold autoregression , limit cycles and cyclical data [J]. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B* , 1980 , 42(3) : 245 – 292.
- [37]Yu J. A semiparametric stochastic volatility model [J]. *Journal of Econometrics* , 2012 , 167: 473 – 482.
- [38]Huber P J. The behavior of maximum likelihood estimates under nonstandard conditions [C]. In L. M. LeCam and J. Neyman (eds.) , *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematics , Statistics , and Probability* , pp. 221 – 233. Berkeley: University of California Press , 1967.
- [39]Koopman S J , Shephard N , Creal D. Testing the assumptions behind importance sampling [J]. *Journal of Econometrics* , 2009 , 149: 2 – 11.
- [40]Gordon N J , Salmond D J , Smith A F M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation [J]. *IEE Proceedings-F* , 1993 , 140: 107 – 113.
- [41]Kupiec P. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models [J]. *Journal of Derivatives* , 1995 , 3(2) : 73 – 84.

A threshold stochastic volatility model with double leverage and its empirical test

WU Xin-yu¹ , ZHOU Hai-lin¹ , WANG Shou-yang² , MA Chao-qun³

1. School of Finance , Anhui University of Finance and Economics , Bengbu 233030 , China;

2. Academy of Mathematics and Systems Science , Chinese Academy of Sciences , Beijing 100190 , China;

3. School of Business Administration , Hunan University , Changsha 410082 , China

Abstract: To capture the asymmetric effects of positive shocks (good news) and negative shocks (bad news) to asset returns , this paper incorporates both the threshold and state-dependent leverage effects into the basic stochastic volatility (SV) model , and proposes a threshold SV model with double leverage (THSV-DL) to model the volatility of asset returns. Based on the efficient importance sampling (EIS) technique , we use the maximum likelihood (ML) method to estimate the parameters of the THSV-DL model. Then , Monte Carlo simulations are presented to examine the accuracy and small sample properties of the proposed method. The experimental results show that the EIS-ML method performs very well. We apply the THSV-DL model to the daily returns of Shanghai stock exchange (SSE) composite index and Shenzhen stock exchange (SZSE) component index of China. Empirical results show that there exists a high persistence of volatility and a significant leverage effect in China's stock market. More importantly , asymmetries in the volatility persistence , volatility

of volatility and leverage effect are discovered in China's stock market. Specifically, the volatility persistence tends to be higher, and both volatility of volatility and leverage effect tend to be lower following the bad news than following the good news. Finally, an empirical study on the accuracy of value at risk (VaR) estimates based on Shanghai stock exchange composite index is presented. The empirical results demonstrate that the THSV-DL model can yield more balanced and accurate VaR estimates than the basic SV, SV with leverage effect (SV-L), THSV, and THSV with leverage effect (THSV-L) models.

Key words: asymmetric effect; threshold effect; leverage effect; stochastic volatility; efficient importance sampling

附录:

假设 $m_t(V_t | X_t, V_{t-1}, \mu_t)$ 是均值为 μ_{a_t} , 方差为 $\sigma_{a_t}^2$ 的正态分布密度函数, 则其对数为

$$-\frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma_{a_t}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{V_t - \mu_{a_t}}{\sigma_{a_t}} \right)^2 = -\frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma_{a_t}^2 - \frac{V_t^2}{2\sigma_{a_t}^2} + \frac{\mu_{a_t}}{\sigma_{a_t}^2} V_t - \frac{\mu_{a_t}^2}{2\sigma_{a_t}^2} \quad (27)$$

根据式(16)和(18), 有

$$\begin{aligned} \ln m_t(V_t | X_t, V_{t-1}, \mu_t) &= \ln k_t(V_t | X_t, V_{t-1}, \mu_t) - \ln \chi_t(X_t, V_{t-1}; a_t) \\ &= \ln [p(V_t | X_t, V_{t-1}, \theta) \exp\{a_{1,t}V_t + a_{2,t}V_t^2\}] - \ln \chi_t(X_t, V_{t-1}; a_t) \\ &= -\frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma_t^2 - \frac{(V_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2} + a_{1,t}V_t + a_{2,t}V_t^2 - \ln \chi_t(X_t, V_{t-1}; a_t) \\ &= -\frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma_t^2 + \left(a_{2,t} - \frac{1}{2\sigma_t^2}\right)V_t^2 + \left(a_{1,t} + \frac{\mu_t}{\sigma_t^2}\right)V_t - \frac{\mu_t^2}{2\sigma_t^2} - \ln \chi_t(X_t, V_{t-1}; a_t) \end{aligned} \quad (28)$$

其中 μ_t 和 σ_t^2 定义为式(10)一式(11). 比较式(27)和式(28), 得到

$$\mu_{a_t} = \sigma_{a_t}^2 \left(a_{1,t} + \frac{\mu_t}{\sigma_t^2} \right) \quad (29)$$

$$\sigma_{a_t}^2 = \frac{\sigma_t^2}{1 - 2a_{2,t}\sigma_t^2} \quad (30)$$

与

$$\begin{aligned} \ln \chi_t(X_t, V_{t-1}; a_t) &= \frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma_{a_t}^2 + \frac{\mu_{a_t}^2}{2\sigma_{a_t}^2} - \frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma_t^2 - \frac{\mu_t^2}{2\sigma_t^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma_{a_t}^2}{\sigma_t^2} + \frac{\mu_{a_t}^2}{2\sigma_{a_t}^2} - \frac{\mu_t^2}{2\sigma_t^2} \end{aligned} \quad (31)$$