

基于非参数方法的银行操作风险度量^①

汪冬华, 徐 驰

(华东理工大学商学院, 上海 200237)

摘要: 金融业全球化竞争和金融管制放松, 导致商业银行面临的操作性风险不断增加, 操作性风险已成为金融监管的焦点. 因此, 对商业银行和其它金融机构来说, 可靠的操作性风险度量正变得越来越重要. 文章采用基于厚尾分布的非参数方法度量我国商业银行操作性风险, 给出了 VaR 的点估计方法和 3 种区间估计方法(正态近似法 NA, 经验似然法 EL, 数据倾斜法 DT). 此方法的优点在于不用假设操作性风险损失分布, 这样可以消除参数化模型设定差异而带来的估计偏差. 同时, 根据厚尾分布的特征, 提出了新的厚尾分布样本均值求法, 调整后均值更注重对尾部的描述和刻画. 实证结果表明: 调整后的厚尾分布样本均值大于简单算术平均值, 更符合右偏厚尾的分布特征; 非参数方法得到的 VaR 点估计和区间估计考虑了厚尾的因素, 解决了传统 VaR 低估风险的问题, 更接近真实情况; VaR 3 种区间估计的方法能够提升对风险衡量的准确性, 其中 DT 方法所得到的区间估计最为准确.

关键词: 操作性风险; 非参数估计; 区间估计; VaR

中图分类号: F830 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2015)03-0104-10

0 引 言

操作性风险、信用风险和市场风险是商业银行面临的 3 大风险. 根据新资本协议, 商业银行需将操作性风险管理纳入全面风险管理的范围, 并需要计提操作性风险资本. 因此, 操作性风险管理也成为当前金融和监管机构密切关注的焦点. 根据《巴塞尔协议》^[1], 现代银行的操作性风险是指因操作流程不完善、人为过失、系统故障或失误及外部事件造成的直接或间接损失的可能性. 它包括内部欺诈、外部欺诈、就业政策和工作场所安全性、业务操作、业务中断或系统失败、内部流程管理等多种银行风险. 目前, 商业银行可用来计算操作性风险资本的方法包括基本指标法、标准法(替代标准法)、高级计量法等, 这 3 种方法在复杂性和风险敏感性方面依次增强, 其中高级计量法在资本计量方

面更具风险敏感性和前瞻性.

在商业银行操作性风险度量中, 特别是针对损失强度, 多数学者采用各种含参数的量化模型去拟合操作性风险的损失数据, 据此进行风险度量. Wilson^[2] 提出采用 JPMorgan 公司开发的 VaR 技术及损失分布法测算操作性风险的资本要求. 鉴于操作性风险具有右偏厚尾的统计特征, 许多研究都运用极值理论(EVT)来度量风险, 例如 McNeil^[3] 将 EVT 运用于量化模型; King^[4] 在此基础上提出了 Delta-EVT 模型, 运用损失分布法和极值理论来测算包括高频低损和低频高损两类事件在内的全面操作性风险资本要求. Moscadelli^[5] 运用 EVT 针对巴塞尔委员会的风险管理组织于 2002 年搜集的 89 家银行的操作性风险数据进行了分析, 验证了损失分布强度具有胖尾的特征. Chavez-Demoulin 等^[6] 提出了 EVT-POT 模型, 综合考虑了损失数据

① 收稿日期: 2013-12-15; 修订日期: 2014-11-19.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71171083); 教育部人文社会科学研究基金资助项目(09YJC630075); 上海市教育委员会科研创新资助项目(14ZS058).

作者简介: 汪冬华(1973—), 男, 安徽黟县人, 博士, 教授, 博士生导师. Email: dhwang@ecust.edu.cn

的概率统计技术和极值理论的新技术来度量风险. Dutta 和 Perry^[7] 在 EVT 的基础上运用了不同参数量化模型去拟合损失数据. 研究结果表明: 模型设定的不同导致估计值具有较大的差异. 为了解决由模型设定带来估计偏差这一问题, 有学者提出了非参数估计的方法, 例如 Tursunaliyeva 和 Silvapulle^[8]. 本文也是基于非参数估计的方法, 尝试对中国商业银行操作风险进行度量.

国内关于操作风险度量的研究也有了很大的进展. 费伦苏和邓明然^[9] 基于国内商业银行操作风险损失数据, 研究了操作风险的统计特性. 樊欣和杨晓光^[10] 与刘睿等^[11] 运用蒙特卡洛模拟方法来度量操作风险的经济资本. 高丽君等^[12] 使用 POT 方法对操作风险的极端值进行估计, 并研究了阈值的选取对 GPD 分布形状参数、尺度参数和 VaR 的影响. 张宏毅和陆静^[13] 运用损失分布法 (LDA) 对操作风险进行了度量. 司马则茜等^[14] 在 POT 方法基础上提出幂律模型, 给出了阈值选择的新方法. 魏宇^[15] 分析了国内资本市场的厚尾特性, 利用极值理论模型进行了相关风险测度. 司马则茜等^[16] 提出具有厚尾特性的 4 参数模型 $g-h$ 分布度量银行的操作风险. 黄金波等^[17] 提出基于 CVaR 核估计量的风险管理方法. 杨继平等^[18] 提出基于结构转换非参数 GARCH 模型的 VaR 估计, 能够更好地拟合损失分布数据. 在宏观经济影响方面, 杨青等^[19] 研究了在宏观经济变量影响下的银行极端操作风险度量.

为了提高银行操作风险度量的可靠性, 本文给出了基于非参数估计的银行操作风险度量方法.

1 研究方法

本部分介绍尾部指数和右偏态厚尾分布总体均值的估计方法. 然后给出厚尾分布 99.9% 水平分位数 (即 VaR) 的点估计方法. 最后, 给出一定置信水平下的 VaR 置信区间 (CI) 的 3 种估计方法, 分别为: 1) 正态近似法 (normal approximation method, NA); 2) 经验似然法 (empirical likelihood method, EL); 3) 数据倾斜法 (data tilting method, DT).

1.1 Hill 指数的加权平均估计量

X_1, \dots, X_n 是满足独立同分布的 n 个随机变量. 将它们按升序排列, 表示为 $X_{n,1} \leq X_{n,2} \leq \dots \leq X_{n,n}$. 选定 $X_{n,n-k+1}$ 为阈值 (即 u_n), 则在阈值最右端有 k 个极端观测值. 根据此 k 个极端观测值, Hill 指数定义为^[20]

$$\gamma_k = \gamma(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(X_{n,n-i+1}) - \ln(X_{n,n-k}) \quad (1)$$

则尾部指数 α_k 定义为 $1/\gamma_k$, 其估计值记为 $\hat{\alpha}_k$. 该方法的主要思想是, 如果随机变量服从帕累托分布, 那么它取自然对数所得到的新的变量将会服从参数为尾部指数 α_k 的指数分布. Hausler 和 Teugels^[21] 与 Beirlant 等^[22] 假设 Hill 指数估计量服从渐近的正态分布. Hill 指数估计的准确性取决于以下两个因素, 一个是样本容量 n , 另一个是尾部长度 k .

上述传统 Hill 指数求法是先确定最佳的 k 值, 再根据式 (1) 得出 Hill 指数. 但是 k 值的确定是非常困难的. 为了改进传统 Hill 指数的估计水平, Huisman 等^[23] 提出了新的 Hill 指数估计方法. 其实是改进的 Hill 指数估计量是由不同 k 值确定的传统 Hill 指数估计量的加权平均. 首先设定以下模型

$$\gamma(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \varepsilon(k) \quad (2)$$

式中 $k = 1, 2, \dots, n/2$. 由式 (1) 可得到的不同 k 值对应的 $\gamma(k)$ 值, 将其代入式 (2) 可估计出式中的参数. 根据 $\gamma(k)$ 的性质, 当且仅当 k 趋近于 0 的时候, Hill 指数估计量 $\gamma(k)$ 是无偏的^[23]. 基于此性质, 式 (2) 中被估计得到的 $\hat{\beta}_0$ 是 Hill 指数的无偏估计. 但是由最小二乘法估计得到的 Hill 指数不具有有效性^[23], 其原因是: 1) 对于不同 k , $\gamma(k)$ 的方差并不是常量, 因此, 式 (2) 的误差项具有异方差性; 2) 由于在 $\gamma(k)$ 的构建过程中存在数据重叠的问题, 即 $\gamma(k)$ 和 $\gamma(m)$ 中共有 $1 + \min(k, m)$ 个公共数据, 两者的协方差可能不为零. 为了解决这个问题, Huisman 等^[23] 提出利用加权最小二乘法估计式 (2) 中的参数 β_0 . 将式 (2) 乘以权重 $\omega(k)$, 得到下式

$$\gamma(k) \omega(k) = \beta_0^{\text{wls}} \omega(k) + \beta_1^{\text{wls}} k \omega(k) + \mu(k) \quad (3)$$

式中的 $\omega(k)$ 为向量 $W = (\sqrt{1/n}, \sqrt{2/n}, \dots, \sqrt{k/n})$ 中的元素 其中 $\mu(k) = \varepsilon(k) \omega(k)$. β_0^{wis} 为 Hill 指数的加权平均估计量,它是无偏和有效的.

由式(3)得到 β_0^{wis} 估计值,然后寻找 k 使得 β_0^{wis} 与式(1)定义的 γ_k 值距离最小,以此获取最佳的 k 值.下文中将会采用超额均值函数法(MEF)来检验 k 的拟合优度.

1.2 超额均值函数

Davison 和 Smith^[24] 提出的超额均值函数(MEF) 用来识别分布的厚尾特征.设随机变量 X 具有有限期望且存在最大值 x_F (作为右端点), 则 MEF 定义为

$$e(u) = E(X - u | X > u) \quad 0 \leq u < x_F \quad (4)$$

其中 $e(u)$ 的值可以被看作超出阈值 u 部分的均值.

MEF 函数有以下几个性质: 如果 X 服从参数为 λ 的指数分布,对于所有正的阈值取值,都有 $e(u) = \lambda^{-1}$ 成立; 如果 X 服从正态分布,则 MEF 趋近于 0; 如果 X 服从次指数分布,则 MEF 趋近于 ∞ .

如果 X 服从广义帕累托分布 $G_{\xi, \beta}$, 则 MEF 为

$$e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi} \quad \mu \in D(\xi, \beta) \quad \xi < 1 \quad (5)$$

式中 $e(u)$ 是 u 的线性函数.这表明, 阈值 u 选择的条件是 $e(u)$ 呈线性函数,其中 $x > u$. ξ 代表 GPD 形状参数, β 代表 GPD 尺度参数.

在实证分析中,由式(6)给出与 MEF 函数对应的经验值求法

$$\hat{F}_u = \frac{\sum_{i=1}^n X_{i:n} I_{X_{i:n} > u}}{\sum_{i=1}^n I_{X_{i:n} > u}} - u \quad (6)$$

式中 u 是指阈值, I 是指示函数.在阈值 $u = x_{i:n}$ 的条件下 ($k = 1, \dots, n-1$), 作出对应经验值的图像,来检验 k 的稳健性(这里的 k 是指尾部长度的).

另一种比较常见的选择阈值 u 的方法就是 Hill 图.一般地, Hill 指数估计量通过式(1)求得.通过做出 MEF 的图像和 Hill 图来选择最优解 k , 这是较为主观和粗糙的方法,并不能求出特定的精确解 k .本文由式(3) 求出最优解 k 后运用 MEF 图像法来检验 k 的稳健性.

1.3 厚尾分布的总体均值估计

为了对总体均值进行估计,假设 X_1, \dots, X_n 是

满足独立同分布 F 的随机变量,分布函数 F 的尾部具有某种规律变化特性,并且尾部指数 $\alpha > 1$. F 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx) + F(-tx)}{1 - F(t) + F(-t)} = x^{-\alpha} \quad x > 0 \quad (7)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(t)}{1 - F(t) + F(-t)} = p \quad p \in [0, 1]$$

式中 $\alpha = 1/\gamma$ 且 γ 是由式(1)定义的.当 $1 < \alpha < 2$ 时 F 在稳定律的吸引域中; 当 $\alpha > 2$ 时 F 在正态分布的吸引域中.为了获得具有一致性的总体均值估计量,本文采用 Peng^[25] 的方法,将总体均值 $E(X)$ 拆分成两个部分,表示为

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 F^-(u) du \\ &= \int_0^{1-k/n} F^-(u) du + \int_{1-k/n}^1 F^-(u) du \\ &= \mu_n^{(1)} + \mu_n^{(2)} \end{aligned} \quad (8)$$

式中: $F^-(s) = \inf\{x: F(x) \geq s\}$ $0 < s < 1$ 表示 F 的反函数; k 表示最右尾部极端观测值的数量,由 1.1 求得.调整后的总体均值估计量为

$$\hat{\mu}_{adj} = \mu_n^{(1)} + \mu_n^{(2)} \quad (9)$$

把 $\mu_n^{(1)}$ 和 $\mu_n^{(2)}$ 分开进行估计,第 1 部分 $\mu_n^{(1)}$ 是整个分布的中间部分(除去右端尾部 k 个极端观测值)观测值的简单算术平均值,即

$$\mu_n^{(1)} = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} X_{n-i} \quad (10)$$

第 2 部分 $\mu_n^{(2)}$ 是基于极值理论(EVT) 利用 k 个极端观测值所得到的均值估计

$$\mu_n^{(2)} = \frac{k}{n} X_{n-k+1} \frac{\hat{\alpha}_k}{\hat{\alpha}_k - 1} \quad (11)$$

1.4 厚尾分布 VaR 的点估计

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的满足独立同分布 F 条件的观测值,将其按升序排列 $X_{n-1} \leq \dots \leq X_{n,n}$ 为次序统计量.分布函数 F 满足

$$1 - F(x) = cx^{-\alpha}, \quad x > X_{n,n-k} \quad (12)$$

式中 α 为尾部指数; $X_{n,n-k}$ 则是确定的阈值.最佳的 k 值由 1.1 节提出的方法估计. α 的估计值 $\hat{\alpha}$ 由 Hill 指数加权平均估计量估计得到. $\hat{\rho}$ 是通过公式 $\hat{\rho}_k = \frac{k}{n} X_{n,n-k}^{\hat{\alpha}}$ 得到.本文将 x_p 定义为 $(1-p)$ 水平上的分位数估计量.例如 $p_n = 0.001$ 则 x_p 为 99.9% 的分位数估计值(即 $\text{VaR}_{99.9\%}$).厚尾分布 VaR 的点估计为

$$\hat{x}_p = \left(\frac{P_n}{\hat{c}} \right)^{-1/\hat{\alpha}} \quad (13)$$

利用式 (13) 可得到右偏态厚尾分布的 VaR. 接下来, 本文用极大似然法对 VaR 进行区间估计.

1.5 厚尾分布 VaR 的置信区间估计

在估计右偏态厚尾分布的 VaR 时, 所利用的仅仅是阈值以上的一小部分极端观测值. 因此, 尾部长度 k 的大小决定了分位数 VaR 估计值的准确性. 而 k 值可由 1.1 部分介绍的 Hill 指数的加权平均估计量确定. 为了进一步获取 VaR 的范围, 可求出其置信区间. 关于 VaR 的置信区间估计方法, 主要有 3 种: 1) 正态近似法 (NA)、2) 经验似然法 (EL) 和 3) 数据倾斜法 (DT).

为了介绍上述 3 种置信区间构建的方法, 首先假设 $p_n \in (0, 1)$, 则 F 的 $100(1-p_n)\%$ 分位数 (VaR) 为

$$\hat{x}_p = (1 - F)^{-1}(p_n) \quad (14)$$

式中 $(\cdot)^{-1}$ 代表 (\cdot) 的反函数. 极大似然函数为

$$L(\alpha, c) = \prod_{i=1}^n (c\alpha X_i^{-\alpha-1})^{\delta_i} (1 - cX_{n-n-k}^{-\alpha})^{1-\delta_i} \quad (15)$$

式中 $\delta_i = I(X_i > X_{n-n-k})$, I 为取值为 1 或 0 的指示函数. 通过将式 (15) 所示的极大似然函数最大化获得极大似然估计值 c 和 α . 接下来的部分将会着重讨论 VaR 的置信区间构建的几种方法.

1.5.1 正态近似法

首先讨论的是构建 VaR 置信区间的正态近似方法 (NA 法). 根据 Peng 和 Qi^[26] 提出的定理一, 可以得到

$$\frac{\hat{\gamma} \sqrt{k}}{\ln\left(\frac{k}{np_n}\right)} \ln \frac{\hat{p}_n}{p_n} \rightarrow N(0, 1) \quad (16)$$

$$\bar{\alpha}(\lambda) = \frac{k}{\sum_{i=1}^k (\ln X_{n-n-i+1} - \ln X_{n-n-k}) + \lambda \ln X_{n-n-k} - \lambda \ln X_p} \quad (21)$$

$$\bar{c}(\lambda) = X_{n-n-k}^{\bar{\alpha}(\lambda)} \frac{k - \lambda}{n - \lambda} \quad (22)$$

此时 λ 满足以下两个条件

$$\bar{\alpha}(\lambda) \ln x_p + \ln\left(\frac{P_n}{\bar{c}(\lambda)}\right) = 0 \quad (23)$$

$$\bar{\alpha}(\lambda) > 0, \lambda < k \quad (24)$$

因此将似然比率乘以 -2 得到新的变量

$$l(x_p) = -2(l_2(x_p) - l_1) \quad (25)$$

因此 x_p 的 $(1 - \alpha)\%$ 置信区间是

$$I_\alpha = \left(\hat{x}_p e^{-z_\alpha \frac{\ln\left(\frac{k}{np_n}\right)}{\hat{\gamma}/k}}, \hat{x}_p e^{z_\alpha \frac{\ln\left(\frac{k}{np_n}\right)}{\hat{\gamma}/k}} \right) \quad (17)$$

其中 $P(|N(0, 1)| \leq z_\alpha) = \alpha$, 具体证明详见 Peng 和 Qi^[26]. 这样可得到 VaR 的区间估计. 根据 NA 法得到的区间估计随着 n 趋近于 ∞ 变得更加准确, 即当样本容量 n 不足够大时, NA 法得到的区间估计效果并不好.

1.5.2 经验似然法

这一节介绍建立置信区间的经验似然方法 (EL 法). 经验似然法是针对求未知分布的高分位数 (VaR) 的区间估计的较为灵活的非参数方法. 该方法主要思路是针对未知分布 F 的参数 $\theta(F)$, 建立经验似然比统计量, 近似服从自由度为 1 的卡方分布. 经验似然方法结合了似然法的有效性和对厚尾分布的偏度的估计. 下面给出对经验似然法的具体描述.

首先 $\hat{\alpha}$ 和 \hat{c} 代表的是参数 α 和 c 极大似然估计量, 这里给出相应的极大对数似然函数

$$l_1 = \max_{\alpha > 0, c > 0} \ln L(\alpha, c) = \ln L(\hat{\alpha}, \hat{c}) \quad (18)$$

其中最大化 $\ln L(\alpha, c)$ 会服从条件 $\alpha > 0, c > 0$, 并且

$$\alpha \ln x_p + \ln\left(\frac{P_n}{c}\right) = 0 \quad (19)$$

$l_2(x_p)$ 代表相对应的对数似然函数. 这里有 $p_n = 0.001$, 则相应的 x_p 代表的是厚尾分布的 99.9% 水平下的分位数 (即 $\text{VaR}_{99.9\%}$). 所以, 得出

$$l_2(x_p) = \ln L(\bar{\alpha}, \bar{c}) \quad (20)$$

式中 $\bar{\alpha}$ 和 \bar{c} 由式 (21)、式 (22) 求出

Peng 和 Qi^[26] 已证明 $l(x_p)$ 当确定的分位数 $x_{p,0}$ 时服从自由度为 1 的 χ^2 分布. 即 $l(x_p) \xrightarrow{d} \chi_{(1)}^2$, 而 95% 水平下的 x_p 的置信区间为 $I_{\alpha_{cr}}^l = \{x_p : l(x_p) \leq \mu_{\alpha_{cr}}\}$, 其中 $\mu_{\alpha_{cr}}$ 是 $\chi_{(1)}^2$ 分布 α_{cr} 显著性水平上的临界点. 由此可以求出一定置信水平下的 VaR 置信区间.

1.5.3 数据倾斜法

这一节中介绍的数据倾斜法 (data tilting

method,简称DT法)是上一节介绍的经验似然法(EL法)的加权形式.这个方法最大的优点是分配较小的权重给损失分布的非尾部部分,能够将更多的权重分配给损失分布的尾部,也就是本文重点研究的部分.将各部分权重表示为 $q = (q_1, \dots, q_n)$, 其中 q 满足两个条件($q_i \geq 0$ 和 $\sum_{i=1}^n q_i = 1$). 然后本文引入极大似然函数

$$(\hat{\alpha}(q), \hat{c}(q)) = \arg \max_{(\alpha, c)} \ln [(c\alpha X_i^{-\alpha-1})^{\delta_i} \times (1 - cX_{n-n-k}^{-\alpha})^{(1-\delta_i)}] \quad (26)$$

由式(26)的极大似然函数便可以得到函数两个参数的计算公式,如式(27)、式(28)所示

$$\hat{\alpha}(q) = \frac{\sum_{i=1}^n q_i \delta_i}{\sum_{i=1}^n q_i \delta_i (\ln X_i - \ln X_{n-n-k})} \quad (27)$$

$$q_i = q_i(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} \frac{1}{n} e^{-1-\lambda_1}, & \text{若 } \delta_i = 0 \\ \frac{1}{n} e^{-1-\lambda_1+\lambda_2} \left(\frac{\ln(\frac{x_p}{X_{n-n-k}})}{A_2(\lambda_1)} - \frac{1}{A_1(\lambda_1)} - \frac{A_1(\lambda_1) \ln(\frac{X_i}{X_{n-n-k}}) \ln(\frac{x_p}{X_{n-n-k}})}{A_2^2(\lambda_1)} \right) & \text{若 } \delta_i = 1 \end{cases} \quad (32)$$

同时 λ_1 和 λ_2 需要服从以下条件

$$\sum_{i=1}^n q_i = 1, \quad \hat{\gamma}(q) \ln \frac{x_p}{X_{n-n-k}} = \ln \frac{\sum_{i=1}^n q_i \delta_i}{P_n} \quad (33)$$

根据文献[26]所得出的定理三,有 $(\lambda_1, \lambda_2) = ((\hat{\lambda})_1(x_p), (\hat{\lambda})_2(x_p))$ 则

$$-\ln \left(1 + \frac{\sqrt{k} \sqrt{\ln\left(\frac{k}{np_n}\right)}}{n-k} \right) \leq 1 + \lambda_1 \leq -\ln \left(1 - \frac{\sqrt{k} \sqrt{\ln\sqrt{2}\left(\frac{k}{np_n}\right)}}{n-k} \right) \quad (34)$$

$$|\lambda_2| \leq k^{-1/4} \frac{n}{\ln\left(\frac{k}{np_n}\right)} \quad (35)$$

$$\hat{c}(q) = X_{n-n-k}^{\hat{\alpha}(q)} \sum_{i=1}^n q_i \delta_i \quad (28)$$

然后定义新的函数 $D_p(q)$ 用以计算 q 与统一的均值 q_i 的差值,其中 $q_i = 1/n$. 将新定义的函数 $D_p(q)$ 最小化,并且服从约束 $q_i \geq 0$ 和 $\sum_{i=1}^n q_i = 1$ 以及

$$\hat{\alpha}(q) \ln \frac{x_p}{X_{n-n-k}} = \ln \frac{\sum_{i=1}^n q_i \delta_i}{P_n} \quad (29)$$

将新定义的函数 $D_p(q)$ 最小化,即符合新的等式 $(2n)^{-1} L(x_p) = \min_q D_p(q)$ 得出

$$A_1(\lambda_1) = 1 - \frac{n-k}{n} e^{-1-\lambda_1} \quad (30)$$

$$A_2(\lambda_1) = A(\lambda_1) \frac{\ln\left(\frac{x_p}{X_{n-n-k}}\right)}{\ln\left(\frac{A_1(\lambda_1)}{P_n}\right)} \quad (31)$$

然后通过拉格朗日乘数法,有

$$\text{若 } \delta_i = 0$$

上一节定义的函数 $L(x_p, \theta)$ 服从自由度为 1 的卡方分布,即 $L(x_p, \theta) \xrightarrow{d} \chi^2_{(1)}$, 其中卡方分布的参数为 $(\lambda_1, \lambda_2) = ((\hat{\lambda})_1(x_p), (\hat{\lambda})_2(x_p))$. 因此,可得出 x_p 的置信区间 $I_\alpha^u = \{x_p : l(x_p) \leq \mu_\alpha\}$, 其中 μ_α 是 $\chi^2_{(1)}$ 分布 α 显著性水平上的临界点. 由此可以求出一定置信水平下的 VaR 置信区间.

2 实证分析

2.1 数据来源

本文所涉及到的操作风险损失数据是基于 Wang 等^[27] 中的 1994 年至 2010 年中国商业银行的操作风险损失数据,模拟产生出符合中国商业银行情景的 935 个观测值,后面实证部分所涉及到的操作风险损失金额的单位都是百万元. 其中,本文中数据并未区分业务条线和风险事件类型. 由于操作风险事件本身数量有限,所以将国内所有的商业银行作为一个整体来考虑其操作风险. 如果只考虑单个银行的操作风险,损失事件的数

目的是远远不够的,并且由于其面对客户类型较为类似,可以将这些商业银行视为同质的,因此将其作为一个整体来考虑是具有一定合理性的。

2.2 阈值的确定

商业银行操作风险损失数据的处理,应先确定损失强度的阈值,并将全样本数据以阈值为分界线分为高频低损数据(HFLS)和低频高损数据(LFHS)两类,在衡量操作风险的时候重点关注后者。本文对尾部指数进行估计的时候,也是基于低频高损数据(LFHS)来进行计算的。

首先确定阈值,即尾部长度 k 的确定。一般,尾部长度 k 选择的要求是保证有足够多的观测值的同时尽可能提高阈值。传统方法运用的是 MEF 函数图像来确定阈值,本文采用的是用 1.1 中的式(3)计算加权 Hill 指数来确定最优尾部长度 k 。基于本文的数据,得到的最佳的尾部长度为 29(即尾部具有 29 个观测值),相对应的阈值为 116.49(单位为百万元)。

确定阈值之后,运用 MEF 函数图来检验阈值的稳定性,如图 1 所示。

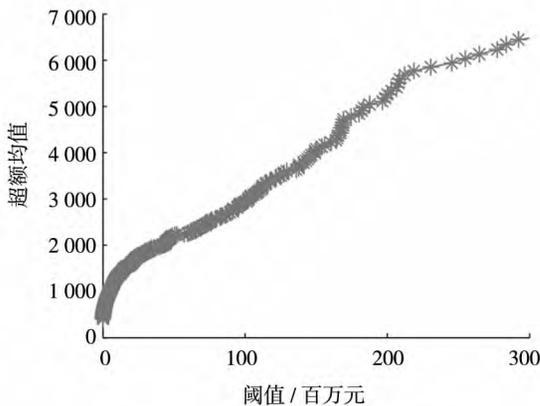


图 1 MEF 函数图

Fig.1 Mean excess function

从图 1 可以看出 MEF 函数于阈值处形状变化近似于线性函数,说明在所选阈值处 MEF 函数表现得相当稳健,即通过对选取阈值的稳健性的检验。

相应地,还可以得到阈值所对应的尾部指数 $\alpha = 1.3$,这也说明了本文涉及到的操作风险的数据具有胖尾的统计特征。

2.3 VaR 的点估计

阈值确定之后,利用阈值以上的 29 个观测值

(即尾部数据)度量操作风险。鉴于巴塞尔协议中将风险的置信度定于 99.9%,所以本文接下来所计算的 VaR 的置信度也确定为 99.9%。

计算 $VaR_{99.9\%}$ 之前,首先对总体样本的均值进行衡量。由于总体样本具有厚尾特征,并未采用简单算术平均数来衡量均值,而是将均值的计算拆分成两个部分,分别用式(10)和式(11)来求得,结果分别为 $\mu_n^{(1)} = 32.11$ 和 $\mu_n^{(2)} = 91.80$,所以厚尾分布样本均值为 $\mu = \mu_n^{(1)} + \mu_n^{(2)} = 123.91$,全样本简单算术均值为 81.89。调整后厚尾分布估计均值要比全样本简单算术均值大 51.3%。

然后利用式(13)计算 99.9% 置信水平下的分位数(即 $VaR_{99.9\%}$)得到 $VaR_{99.9\%} = 9\ 402.96$ 。同样地,可以利用式(13)计算不同置信水平下的 VaR。

由表 1 和图 2 可看出:不同置信水平下的 VaR 具有较大的差异,随着置信水平的不断增加,VaR 值逐步增加;特别是,当置信水平增加到 99% 以后,VaR 值增加幅度非常大,这很好地说明了操作风险数据本身的厚尾特性。由此,如果置信水平定得较低,那么一定程度上会低估风险,所以巴塞尔协议中将置信水平定为 99.9% 是较为合理和严格的。

表 1 不同置信水平下的 VaR

Table 1 VaR at different confidence levels

$VaR_{90\%}$	$VaR_{95\%}$	$VaR_{99\%}$	$VaR_{99.9\%}$
278.89	473.70	1 619.63	9 402.96

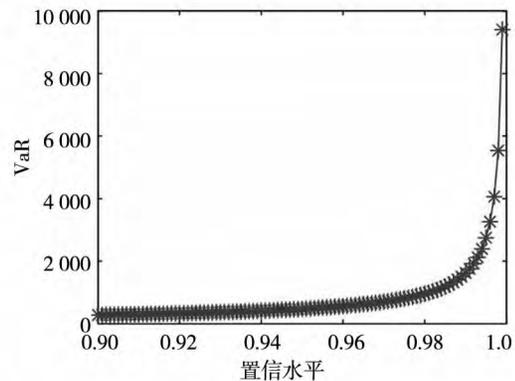


图 2 不同置信水平下的 VaR

Fig.2 VaR at different confidence levels

2.4 VaR 区间估计

由于利用 $VaR_{99.9\%}$ 点估计度量银行操作风险会存在偏差,因此本文在 $VaR_{99.9\%}$ 点估计的基础

上给出 $VaR_{99.9\%}$ 的区间估计,来进一步确保操作风险度量的准确性.下面利用 1.5 部分介绍的 NA 方法、EL 方法和 DT 方法来建立 $VaR_{99.9\%}$ 的 95% 置信区间.在利用 EL 方法和 DT 方法建立置信区间的过程中,首先确定 95% 置信水平所对应的 $\chi^2_{(1)} = 3.84146$ 然后在图 3 中分别截得 EL 方法和 DT 方法的左右端点,即分别得到 EL 区间和 DT 区间.

从图 3 可以直观看出 DT 区间被涵盖在 EL 区间中.

$VaR_{99.9\%}$ 的 95% 置信区间的的结果如表 2 所示.

表 2 $VaR_{99.9\%}$ 的 95% 置信区间
Table 2 95% confidence interval of $VaR_{99.9\%}$

$VaR_{99.9\%}$ 点估计	NA	EL	DT
9 402.96	[1 830.5 , 48 303]	[7 727.88 , 13 676.82]	[8 546.45 , 11 032.07]

从表 2 中不难发现: 1) NA 方法、EL 方法和 DT 方法所建立的置信区间均涵盖了 $VaR_{99.9\%}$ 点估计值; 2) EL 方法建立的区间被 NA 方法所建立的区间覆盖,并且 EL 区间长度要比 NA 区间长度小 87%; 3) DT 方法建立的区间被 EL 方法建立的区间覆盖,并且 DT 区间长度要比 EL 区间长度小 58%; 4) 基于上述表现,说明 DT 方法所建立的 $VaR_{99.9\%}$ 的 95% 置信区间要比其他两种方法建立的区间更为准确; 5) 相比于 EL 方法和 DT 方法, NA 方法建立的置信区间提供了相对偏离点估计的高的上界,而 EL 方法和 DT 方法建立的置信区间就较为接近 $VaR_{99.9\%}$ 点估计值.

2.5 VaR 参数估计方法

为了比较上述非参数方法和传统参数方法在度量银行操作风险方面的效果.这一节采用传统的参数估计方法来计算操作风险损失的 $VaR_{99.9\%}$.本节采用基于广义帕累托分布(GPD)的 POT 模型拟合操作风险损失的尾部数据,即

$$GPD(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \eta \frac{x-u}{\beta})^{-1/\eta} & \text{若 } \eta \neq 0, x > u \\ 1 - \exp(-\frac{x-u}{\beta}) & \text{若 } \eta = 0 \end{cases} \quad (36)$$

式中,GPD 分布考虑的是阈值以上的数据,即尾部数据 μ 为阈值 η 为形状参数 β 为尺度参数.

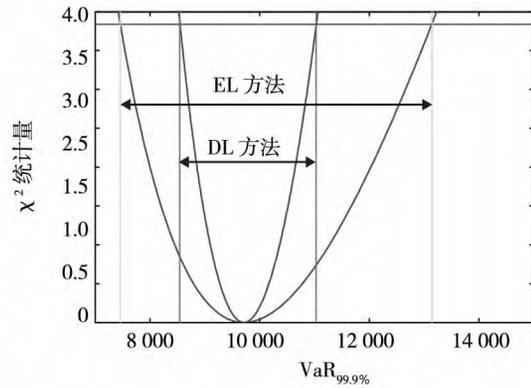


图 3 $VaR_{99.9\%}$ 的 95% 置信区间(EL 和 DT)
Fig.3 95% confidence interval of $VaR_{99.9\%}$ (EL and DT)

为了更好地与非参数估计方法作对比,本文选用 2.1 节中的操作风险损失数据.选取阈值的方法参照 1.1 节利用 Hill 指数来估计阈值的方法.然后利用极大似然方法估计形状参数 η 和尺度参数 β .估计形状参数 η 和尺度参数 β 的过程是由 MATLAB 中的 EVIM 来实现的.参数估计结果如表 3 所示.

表 3 GPD 的参数估计
Table 3 Parametric estimate of GPD

阈值 μ	形状参数 η	尺度参数 β
116.49	0.769 2	166.891 0

得出尾部数据的概率分布函数后,用 VaR 来度量操作风险的损失.通过置信水平的变化,得出不同置信水平的 VaR 值.本文选取几个有代表性的置信水平(比如 90%、95%、99% 和 99.9%),利用参数估计方法分别得到不同的 VaR 值,并与利用非参数方法得到的 VaR 值进行比较.

图 4 表示的是随着置信水平的变化,非参数方法和参数方法所得出的 VaR 值变化趋势.从图 4 上可以看出,通过不同方法求出的 VaR 随着置信水平的提高具有相似的变化,并且通过非参数方法估计得到的 VaR 值大于参数方法估计得到的 VaR 值.由表 4 可知,非参数估计 $VaR_{90\%}$ 比参数估计 $VaR_{90\%}$ 大 103.96%;非参数估计 $VaR_{95\%}$ 比参数估计 $VaR_{95\%}$ 大 55.91%;非参数估计 $VaR_{99\%}$ 比参

数估计 $VaR_{99.9\%}$ 大 25.19%; 非参数估计 $VaR_{99.9\%}$ 比参数估计 $VaR_{99.9\%}$ 大 16.28%.

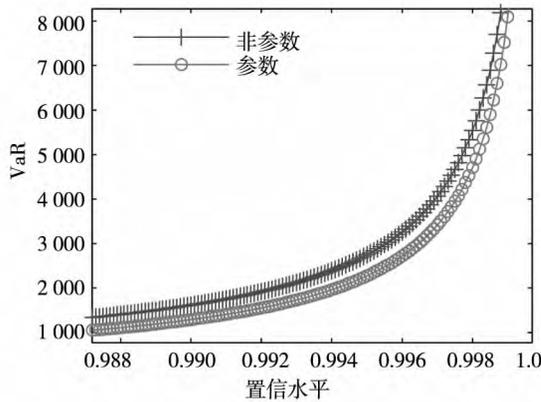


图 4 不同置信水平下的 VaR (非参数方法和参数方法)
Fig. 4 VaR at different confidence level (nonparametric and parametric method)

表 4 不同置信水平下的 VaR (非参数方法和参数方法)
Table 4 VaR at different confidence level (nonparametric and parametric method)

置信水平 (%)	90	95	99	99.9
VaR(非参数估计)	278.89	473.70	1 619.63	9 402.96
VaR(参数估计)	136.74	303.82	1 293.8	8 095.30

本文着重关注置信水平为 99.9% 的 VaR 值, 非参数方法得出的 $VaR_{99.9\%}$ 点估计为 9 402.96, 其由 DT 方法估计的 95% 置信区间为 [8 546.45, 11 032.07]; 而由参数估计方法得出的 $VaR_{99.9\%}$ 点估计为 8 095.30. 由此可见, 在 99.9% 的置信水平上, 由参数估计方法得到的 $VaR_{99.9\%}$ 点估计小于由非参数估计方法得到的 $VaR_{99.9\%}$ 点估计, 并且参数估计出 VaR 并不在 DT 区间中. 因此, 非参数方法比传统参数方法在度量银行操作风险方面的效果更好.

3 结束语

在商业银行操作风险度量中, 多数学者采用各种含参数的量化模型去拟合操作风险的损失数据, 据此进行风险度量. 但由于含参数的量化模型存在差异性, 导致所得到的风险估计值差异较大. 为了解决模型设定带来估计偏差问题, 本文引入了基于厚尾分布的非参数方法度量银行操作风险, 以此减少模型设定上的偏差而导致最终结果

的不准确性.

根据我国商业银行操作风险数据, 本文利用 Hill 指数建立线性模型确定阈值, 并且用传统 MEF 函数来检验所选取阈值的稳定性, 在此基础上获取尾部指数. 根据尾部指数, 提出了新的厚尾分布总体均值的求法. 不同于简单求样本均值, 厚尾分布样本均值求法更注重对尾部的描述, 能更好地反应尾部特征和接近真实情况. 同时, 根据右偏态厚尾分布特征, 构造了基于非参数的 VaR 点估计方法用以度量银行操作风险. 为了能够更准确地衡量风险范围, 利用 NA 方法(正态近似法)、EL 方法(经验似然法)和 DT 方法(数据倾斜法)得出了 $VaR_{99.9\%}$ 的 95% 置信区间.

研究结果表明: 1) 调整后的均值求法更强调右偏态厚尾分布特征, 得出的调整后均值要大于简单均值, 也能更真实地反映样本特征; 2) 随着置信水平提高, 尤其是到了 99% 之后, VaR 的值呈指数增加状态, 对置信水平的选取十分敏感, 所以置信水平的设置对风险估计结果十分重要. 置信水平定得过低将会一定程度上低估风险, 所以按照 Basel 协议中建议的置信水平设为 99.9%, 能够较好地涵盖风险; 3) 为了能够更准确地衡量风险范围, 利用 NA 方法、EL 方法和 DT 方法得出了 $VaR_{99.9\%}$ 的 95% 置信区间. 在建立置信区间的过程中, DT 方法是加了权重的 EL 方法, 这里 DT 方法着重关注的是分布的尾部情况. 所以, DT 方法建立的区间对于 $VaR_{99.9\%}$ 所做的区间估计是最为准确的; 4) 根据非参数估计方法与传统的参数估计方法所得结果的比较表明, 参数估计方法求的 VaR 点估计并未充分体现右偏态厚尾分布特征, 所以对操作风险的度量有一定程度的低估. 但非参数方法得到的 99.9% 分位数是考虑了尾部指数后得出的, 要大于传统参数估计方法得出的 VaR , 更加接近真实风险. 所以, 这种调整后的 VaR 能够更好地度量风险的.

本文所提出的非参数估计方法以及 3 种区间估计的方法不仅适用于操作风险的度量, 同样也适用于其它类型的风险度量, 例如市场风险和信用风险等. 非参数估计方法也为风险管理和度量提供了一个新的思路, 是具有一定实践意义的.

参考文献:

- [1] Basel II. International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards [R]. Switzerland: Basel Committee on Banking Supervision, 2004.
- [2] Wilson D. VaR in operation [J]. *Risk*, 1995, 8(2): 24-25.
- [3] McNeil A J. Extreme Value Theory for Risk Managers [M]. Internal Modeling and CAD II, Published by RISK Books, 1999: 1-23.
- [4] King J L. Operational Risk: Measurement and Modeling [M]. Chichester: John Wiley, 2001: 87-113.
- [5] Moscadelli M. The Modelling of Operational Risk: Experience with the Analysis of the Data Collected by the Basel Committee [R]. Banca d' Italia, 2004.
- [6] Chavez-Demoulin V, Embrechts P, Neslehova J. Quantitative models for operational risk: Extremes, dependence and aggregation [J]. *Journal of Banking & Finance*, 2006, 30(10): 2635-2658.
- [7] Dutta K, Perry J. A Tale of Tails: An Empirical Analysis of Loss Distribution Models for Estimating Operational Risk Capital [R]. Federal Reserve Bank of Boston, 2006.
- [8] Tursunalieva A, Silvapulle P. Estimation of operational risks using non-parametric approaches with an application to US business losses [C]// 24th Australasian Finance and Banking Conference 2011 Paper, Available at SSRN.
- [9] 费伦苏, 邓明然. 商业银行操作风险的统计特征及其资本模拟实证 [J]. *金融论坛*, 2007, 12(8): 3-9.
Fei Lunsu, Deng Mingran. An empirical study of statistical features and capital simulation of operational risk in commercial banks [J]. *Finance Forum*, 2007, 12(8): 3-9. (in Chinese)
- [10] 樊欣, 杨晓光. 我国银行业操作风险的蒙特卡洛模拟估计 [J]. *系统工程理论与实践*, 2005, 25(5): 12-19.
Fan Xin, Yang Xiaoguang. Estimating operational risk of China's commercial bank sector via Monte Carlo simulation [J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2005, 25(5): 12-19. (in Chinese)
- [11] 刘睿, 詹原瑞, 刘家鹏. 基于贝叶斯 MCMC 的 POT 模型——低频高损的操作风险度量 [J]. *管理科学*, 2007, 20(3): 76-83.
Liu Rui, Zhan Yuanrui, Liu Jiapeng. The pot model based on Bayesian MCMC method: Measuring low frequency/high severity operational risk [J]. *Journal of Management Sciences*, 2007, 20(3): 76-83. (in Chinese)
- [12] 高丽君, 李建平, 徐伟宣, 等. 基于 POT 方法的商业银行操作风险极端值估计 [J]. *运筹与管理*, 2007, 16(1): 112-117.
Gao Lijun, Li Jianping, Xu Weixuan, et al. Estimating extreme values of operational risk for commercial banks via peak over threshold method [J]. *Operations Research and Management Science*, 2007, 16(1): 112-117. (in Chinese)
- [13] 张宏毅, 陆静. 运用损失分布法的计量商业银行操作风险 [J]. *系统工程学报*, 2008, 23(4): 411-416.
Zhang Hongyi, Lu Jing. Operational risk measurement of commercial banking based on loss distribution approach [J]. *Journal of Systems Engineering*, 2008, 23(4): 411-416. (in Chinese)
- [14] 司马则茜, 蔡晨, 李建平. 度量银行操作风险的 POT 幂律模型及其应用 [J]. *中国管理科学*, 2009, 17(1): 36-41.
Sima Zeqian, Cai Chen, Li Jianping. Using the POT power law model to evaluate banking operational risk [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2009, 17(1): 36-41. (in Chinese)
- [15] 魏宇. 股票市场的极值风险测度及后验分析研究 [J]. *管理科学学报*, 2008, 11(1): 78-88.
Wei Yu. EVT risk measures and its back testing in stock markets [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2008, 11(1): 78-88. (in Chinese)
- [16] 司马则茜, 蔡晨, 李建平. 基于 g-h 分布度量银行操作风险 [J]. *系统工程理论与实践*, 2011, 31(12): 2321-2327.
Sima Zeqian, Cai Chen, Li Jianping. Bank operational risk measurement based on g-h distribution [J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2011, 31(12): 2321-2327. (in Chinese)
- [17] 黄金波, 李仲飞, 姚海祥. 基于 CVaR 核估计量的风险管理 [J]. *管理科学学报*, 2014, 17(3): 49-59.
Huang Jinbo, Li Zhongfei, Yao Haixiang. Risk management based on the CVaR kernel estimator [J]. *Journal of Management*

- Sciences in China, 2014, 17(3): 49–59. (in Chinese)
- [18]杨继平,袁璐,张春会. 基于结构转换非参数 GARCH 模型的 VaR 估计[J]. 管理科学学报, 2014, 17(2): 69–80. Yang Jiping, Yuan Lu, Zhang Chunhui. Estimation of VaR based on nonparametric GARCH models with Markov regime switching[J]. Journal of Management Sciences in China, 2014, 17(2): 69–80. (in Chinese)
- [19]杨青,张亮亮,魏立新. 宏观经济变量影响下的银行极端操作风险研究[J]. 管理科学学报, 2012, 15(6): 82–96. Yang Qing, Zhang Liangliang, Wei Lixin. Application of extreme operational risk measurement models for commercial banks based on macroeconomics factors in stock markets[J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(6): 82–96. (in Chinese)
- [20]Hill B M. A simple general approach to inference about the tail of a distribution[J]. The Annals of Statistics, 1975, 3(5): 1163–1174.
- [21]Hausler E, Teugels J L. On asymptotic normality of Hill's estimator for the exponent of regular variation[J]. The Annals of Statistics, 1985, 13(2): 743–756.
- [22]Beirlant J, Goegebeur Y, Segers J, et al. Statistics of Extremes: Theory and Applications[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 2006.
- [23]Huisman R, Koedijk K, Kool C, et al. Tail index estimates in small samples[J]. Journal of Business and Economic Statistics, 2001, 19(2): 208–216.
- [24]Davison A C, Smith R L. Models for exceedances over high threshold[J]. Journal of the Royal Statistical Society, 1990, 52(3): 393–442.
- [25]Peng L. Estimating the mean of a heavy tailed distribution[J]. Statistics & Probability Letters, 2001, 52(3): 255–264.
- [26]Peng L, Qi Y. Confidence regions for high quantiles of a heavy tailed distribution[J]. The Annals of Statistics, 2006, 34(4): 1964–1986.
- [27]Wang Zongrun, Wang Wuchao, Chen Xiaohong, et al. Using BS-PSD-LDA approach to measure operational risk of Chinese commercial banks[J]. Economic Modelling, 2012, 29(6): 2095–2103.

Operational risk measures for banks based on nonparametric methods

WANG Dong-hua, XU Chi

School of Business, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China

Abstract: With global competition of the financial sector and financial deregulation, commercial banks are facing increasing operational risk which has become the focus of attention. Therefore, reliable operational risk measurement is becoming increasingly important for commercial banks and other financial institutions. In this paper, nonparametric methods based on heavy-tailed distributions are applied to operational risk measurement. The main advantage of these nonparametric methods is that there are no assumptions made about the shape of loss distributions. It avoids estimate deviation caused by unwittingly mis-specified models. Meanwhile, according to the characteristics of heavy-tailed distributions, a new method to estimate the mean of loss distributions is put forward, and the adjusted mean focuses more on the tail part of loss distributions. The empirical results demonstrate that the adjusted mean exceeds the sample mean, which is in more conformity with the right heavy-tailed distributions' characteristics. This paper employs non-parametric approaches and constructs a consistent and unbiased point and interval estimates for VaR. It has overcome the weakness of underestimating of traditional VaR. We discuss three methods of estimating confidence intervals to improve the accuracy of risk measurement. As a consequence, DT (Data Tilting) interval estimates turned out to be the best.

Key words: operational risk; nonparametric; interval estimate; VaR