

面向双目标时刻瓶颈模型^① ——交通错峰原理

陈蒂,张宁,刘利娟

(北京航空航天大学经济管理学院,北京 100191)

摘要: 揭示了交通错峰管理的基本原理及错峰政策缓解交通拥堵的判决条件. 通过对 Vickrey 瓶颈模型进行双目标时刻的扩展, 引入了错峰黏性系数, 提出了双峰相定理和混行相定理. 双峰相定理给出了排队呈现双峰和单峰的充分必要条件, 混行相定理给出了排队呈现单峰时两类出行者出发时刻混行的条件及人数比例. 当错峰间隔固定时, 科学调整不同类别出行人数的比例, 可以降低总排队时间, 减缓交通拥堵. 当总人数固定时, 错峰间隔超过一定阈值, 错峰出行才能够降低总排队时间. 最后的数值算例对结论进行了验证.

关键词: 瓶颈模型; 错峰; 拥堵; 交通; 优化; 管理科学

中图分类号: U491 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2015)08-0052-09

0 引言

舒缓通勤高峰时间的交通拥堵, 是个世界性管理难题. 尽管各国有关政府机构不断改善交通基础设施, 致力提高道路通行能力, 但交通供给还是满足不了交通需求. 在交通需求管理方面, 20世纪60年代, 德国经济学家^[1]率先提出了弹性工作制的调控方法, 试图通过错开目标到达时刻, 达到分流和化解高峰期间车流量的效果. 因其不需改变基础设施, 且实施成本较低, 从20世纪70年代开始, 这种措施在欧美得到逐步推广, 在一定程度上缓解了拥堵. 由此, 如何通过引导人们错峰出行, 令有限的交通供给最大化满足交通出行需求, 就成为诸多学者的研究目标.

由诺贝尔经济学奖得主 Vickrey^[2]提出的著名的瓶颈模型, 是最早运用确定性排队理论建立的、并具有内生出发时间的高峰期动态交通出发时刻分配模型. 该瓶颈模型提出之后, 得到了全球有关学者的广泛关注, 并对其进行了广泛的拓展研究. Newell^[3], Arnott 等^[4], Yang 和 Huang^[5]等

许多学者运用模型深入分析了高峰期交通的拥挤现象, 启发本文确认了瓶颈交通高峰拥堵的思路. Arnott 等^[6]直观考虑对排队时间动态管理收费, 用排队收费替代排队等待时间, 从而达到出行时刻选择的系统优化. 他们给出了基于两个目标到达时刻排队时间呈现单峰及双峰的条件, 但未对错峰机制进行物理性地辨析及凝炼. 吴子啸和黄海军^[7]直接讨论了 Vickrey 模型在道路收费管理中的应用. 黄海军等^[8]扩展了 Vickrey 模型的结果, 建立了高峰期内公交车均衡乘车行为模型, 讨论了公交系统的制度安排. Lindsey^[9], Ramadurai 等^[10], Liu 和 Nie^[11]等对异质出行者高峰期的通勤问题进行了深入研究. 这些研究引发了本文对错峰调控优化的思考. 值得注意的是, 过往的研究工作主要集中于错峰出行的效果分析及评估等领域^[12-13], 对错峰出行的本质问题还缺乏“模型化”的升华及凝炼.

中国部分城市虽然通过采取错峰出行管理政策, 在缓解拥堵方面取得了一定的效果; 但整体错

^① 收稿日期: 2012-11-26; 修订日期: 2013-12-04.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70971003).

作者简介: 陈蒂(1981-), 女, 河南舞阳人, 博士生, 讲师. Email: chendi1230@163.com

峰调控尚处于粗放型的阶段,缺少能够进行精细分析的理论模型. 本文通过对 Vickrey 瓶颈模型进行双目标时刻的扩展,将一个目标到达时刻扩展为两个目标到达时刻,简洁地构建出面向交通错峰管理原理的基本模型. 并通过提出双峰相定理和混行相定理,给出了与错峰间隔、出行人数相关的两个关键的管理原理,为优化错峰调控、缓解城市交通拥堵提供了科学依据和理论支持.

1 基本模型构建

1.1 符号定义

假定有 N 个同质的出行者每天在高峰期间需要通过某条道路到达工作地,该条道路包含一个通行能力为 s 的瓶颈. 其中 N_1 个出行者目标到达时间为 t_1^* ,称为第 1 类出行者, N_2 个出行者目标到达时间为 t_2^* ,称为第 2 类出行者,不妨设 $t_1^* \leq t_2^*$,且出行者有出发时间分布的完全信息. 对 $i = 1, 2$,引入如下变量.

t : 出行者出发时刻;

$t_a^{(i)}, t_b^{(i)}$: 第 i 类出行者的最早和最晚出发时刻;

$t_0^{(i)}$: 第 i 类出行者准时到达(t_i^* 时刻到达)的出发时刻;

$T_i(t)$: t 时刻出发的第 i 类出行者在瓶颈处的排队时间;

$T(t)$: t 时刻出发的出行者在瓶颈处的排队时间;

$r_i(t)$: t 时刻第 i 类出行者的出发率;

$C_i(t)$: 每位第 i 类出行者的出行费用;

α, β, γ : 单位排队时间费用,单位早到时间费用,单位迟到时间费用($\gamma > \alpha > \beta$).

1.2 经典瓶颈模型

在 Vickrey 的瓶颈模型中,设目标到达时刻为 t^* . 出行者的出行费用由两部分构成,一部分是瓶颈前的排队时间费用,另一部分是由于早到或迟到的计划延误惩罚费用,那么每位出行者的出行费用 $C(t)$ 为

$$C(t) = \alpha T(t) + \beta \max\{0, t^* - t - T(t)\} + \gamma \max\{0, t + T(t) - t^*\} \quad (1)$$

根据该模型,在两类出行者独立出行、互不影

响的前提下,达到用户均衡时,对每一类出行者,最早出发时刻和最晚出发时刻分别为

$$t_a^{(i)} = t_i^* - \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N_i}{s}, i = 1, 2$$

和

$$t_b^{(i)} = t_i^* + \frac{\beta}{\beta + \gamma} \frac{N_i}{s}, i = 1, 2$$

因此当 t_1^*, t_2^* 距离足够大时,即 $t_2^* - t_1^* \geq \frac{\beta}{\beta + \gamma} \frac{N_1}{s} +$

$\frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N_2}{s}$, 两类出行者完全分开,互相没有影响. 故

本文主要考虑 $t_2^* - t_1^* \leq \frac{\beta}{\beta + \gamma} \frac{N_1}{s} + \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N_2}{s}$ 时,两类出行者交互影响的错峰出行问题.

令

$$t_2^* - t_1^* = \frac{\beta}{\beta + \gamma} \frac{N_1}{s} + \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N_2}{s} - \mu$$

式中 μ 称为错峰黏性系数,反映两类出行者出行行为的相互影响程度. $\mu = 0$ 意味着两类出行者之

间的出行行为不存在相互影响;而 $\mu = \frac{\beta}{\beta + \gamma} \frac{N_1}{s} +$

$\frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N_2}{s}$ 时两类出行者完全融合在一起(详见 1.4 节).

1.3 双峰相定理

均衡状态下,当出行者的出发时刻 t 满足 $t_0^{(1)} < t < t_0^{(2)}$ 时,出行者在 t_1^* 之后 t_2^* 之前到达,下面引理 1 给出此时排队时间 $T(t)$ 的性质.

引理 1 均衡状态下,若错峰黏性系数 μ 足够小,则当出发时刻 t 满足 $t_0^{(1)} < t < t_0^{(2)}$ 时,出行者的排队时间 $T(t)$ 先严格减少,再严格增加,且有唯一的局部最小点.

证明 因错峰黏性系数 μ 足够小,则 $t_2^* - t_1^*$ 足够大,此时在 t_1^*, t_2^* 之间到达的既有第 1 类出行者,也有第 2 类出行者,且第 1 类出行者的出行费用包括排队时间费用和迟到惩罚费用,即 $C_1(t) = \alpha T(t) + \gamma [t + T(t) - t_1^*]$,第 2 类出行者出行费用包括排队时间费用和早到惩罚费用,即 $C_2(t) = \alpha T(t) + \beta [t_2^* - t - T(t)]$. 因 $C_1(t), C_2(t)$ 为常数,故对第 1 类出行者, $T(t)$ 严格减少,对第 2 类出行者, $T(t)$ 严格增加. 又同一出发时间出行者排队时间是相同的,故 $t_0^{(1)} < t < t_0^{(2)}$

时, $T(t)$ 先严格减少,再严格增加,且有唯一的局部最小点. 证毕.

为简化表述,引入“交织”的概念,说明在一段时间内,在某条道路上两类出行者沿同一方向可以交叉出发且不改变均衡状态的现象.

均衡状态下,每类出行者出行费用相同,且同一出发时刻出行者排队时间相同.由引理1可知,若错峰黏性系数 μ 足够小,即两类出行者错峰间隔足够大时,当出发时刻 t 满足 $t < t_0^{(1)}$ 时,出行者排队时间严格增加,此时第2类出行者不会出发,否则早到时间增加,相应地出行费用也会增加.当出发时刻 t 满足 $t_0^{(1)} < t < t_0^{(2)}$ 时,第1类出行者的排队时间严格减少,第2类出行者的排队时间严格增加,因此两类出行者出发时刻不会交织.当出发时刻 t 满足 $t > t_0^{(2)}$ 时,出行者排队时间严格减少,此时第1类出行者不会出发,否则迟到时间增加,相应地出行费用增加.因此当错峰黏性系数 μ 足够小时,两类出行者的出发时刻不会交织.

下面就错峰黏性系数 μ 的取值,分析出行者错峰出行的规律,并用定理1表述.

定理1 均衡状态下,当且仅当 $0 \leq \mu < \min\left\{\frac{2\beta}{\beta+\gamma}\frac{N_1}{s}, \frac{2\gamma}{\beta+\gamma}\frac{N_2}{s}\right\}$ 时,出行者的排队时间有两个局部最大值,呈现双峰.

证明 根据引理1,设出行者在 t_m ($t_0^{(1)} < t_m < t_0^{(2)}$) 时刻出发排队时间 $T(t_m)$ 取得局部最小值.因此,均衡状态下,若错峰黏性系数 μ 足够小, t_m 之前出发只有第1类出行者, $t_m + T(t_m)$ 时刻第1类出行者全部到达, t_m 之后出发的只有第2类出行者.即 $t_b^{(1)} = t_m = t_a^{(2)}$,且 $t_1^* < t_m + T(t_m) < t_2^*$.

在整个出发期间,瓶颈全能力负荷运行.因此 $t_m + T(t_m) - t_a^{(1)} = \frac{N_1}{s}$, $t_b^{(2)} - [t_m + T(t_m)] = \frac{N_2}{s}$ (2)

最早出行的必为第1类出行者,最晚出行的必为第2类出行者,因其没有排队,其出行费分别为

$$C_1(t_a^{(1)}) = \beta(t_1^* - t_a^{(1)}), C_2(t_b^{(2)}) = \gamma(t_b^{(2)} - t_2^*)$$
 (3)

t_m 时刻出发对第1类出行者是晚到,对第2类出行者是早到,其出行费用分别为

$$C_1(t_m) = \alpha T(t_m) + \gamma[t_m + T(t_m) - t_1^*], C_2(t_m) = \alpha T(t_m) + \beta[t_2^* - t_m - T(t_m)]$$
 (4)

结合式(2) - 式(4) $t_0^{(1)}$ $t_0^{(2)}$ 的定义以及 $C_1(t_a^{(1)}) = C_1(t_m) = C_1, C_2(t_m) = C_2(t_b^{(2)}) = C_2$ 得出

$$\begin{cases} t_a^{(1)} = t_1^* - \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\frac{N_1}{s} - \frac{1}{2}\mu \\ t_0^{(1)} = t_1^* - \frac{\beta\gamma}{\alpha(\beta+\gamma)}\frac{N_1}{s} - \frac{\beta}{2\alpha}\mu \\ t_b^{(1)} = t_1^* + \frac{\beta}{\beta+\gamma}\frac{N_1}{s} - \frac{\alpha+\beta+\gamma\mu}{2\alpha} \\ t_a^{(2)} = t_2^* - \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\frac{N_2}{s} + \frac{\alpha-\beta-\gamma\mu}{2\alpha} \\ t_0^{(2)} = t_2^* - \frac{\beta\gamma}{\alpha(\beta+\gamma)}\frac{N_2}{s} - \frac{\gamma}{2\alpha}\mu \\ t_b^{(2)} = t_2^* + \frac{\beta}{\beta+\gamma}\frac{N_2}{s} + \frac{1}{2}\mu \\ (t_b^{(1)} = t_m = t_a^{(2)}) \end{cases}$$
 (5)

以及

$$C_1 = \frac{1}{2}\beta\mu + \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\frac{N_1}{s}, C_2 = \frac{1}{2}\gamma\mu + \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\frac{N_2}{s}$$
 (6)

得出两类出行者平衡费用式(6)之后,代入式(1)得到两类出行者的排队时间分别为

$$T_1(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha-\beta}(t - t_a^{(1)}), & t \in [t_a^{(1)}, t_0^{(1)}] \\ \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}(t_b^{(1)} - t) + \frac{\beta+\gamma\mu}{2\alpha}, & t \in [t_0^{(1)}, t_b^{(1)}] \end{cases}$$
 (7)

$$T_2(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha-\beta}(t - t_a^{(2)}) + \frac{(\beta+\gamma)\mu}{2\alpha}, & t \in [t_a^{(2)}, t_0^{(2)}] \\ \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}(t_b^{(2)} - t), & t \in [t_0^{(2)}, t_b^{(2)}] \end{cases}$$
 (8)

把式(5)代入 $t_1^* < t_m + T(t_m) < t_2^*$, 导出

$$\mu < \frac{2\beta}{\beta+\gamma}\frac{N_1}{s}, \mu < \frac{2\gamma}{\beta+\gamma}\frac{N_2}{s}$$

因此当 $0 \leq \mu < \min\left\{\frac{2\beta}{\beta+\gamma}\frac{N_1}{s}, \frac{2\gamma}{\beta+\gamma}\frac{N_2}{s}\right\}$ 时,

μ 足够小,在 $t_a^{(1)}$ 时刻第1类出行者先出发,排队时间逐渐增加,到 $t_0^{(1)}$ 时刻,排队时间达到局部最大值,之后,排队时间逐渐下降,到 $t_b^{(1)} = t_m = t_a^{(2)}$

时刻,第 1 类出行者出行完毕,排队时间达到局部最小值.此时,第 2 类出行者开始出发,排队时间增加,到 $t_0^{(2)}$ 时刻排队时间再次达到局部最大值, $t_0^{(2)}$ 时刻之后排队时间下降,直到 $t_b^{(2)}$ 时刻第 2 类出行者出发完毕,排队时间为 0.因排队时间有两个局部最大值,即呈现双峰. 证毕.

德国学者 B. S. Kerner^[14] 建立起的三相交通流理论,用交通相来定义道路交通流特征,来识别道路交通状况和研究不同交通相之间的相变关系.为形象表述,借助“相”来描述两类出行者排队时间呈现的状态.当两类出行者排队时间呈现双峰时,称为双峰相,当两类出行者排队时间呈现单峰、两类出行者按比例交织出发并混行时,称为混行相.故称定理 1 为双峰相定理.

双峰相定理给出了排队呈现双峰和单峰的充分必要条件:当第 1 类出行者与第 2 类出行者的人数比例低于 $\frac{\gamma}{\beta}$ 时,出现双峰的决定因素是 $0 \leq \mu < \frac{2\beta}{\beta + \gamma} \frac{N_1}{s}$;当第 1 类出行者与第 2 类出行者的人数比例高于 $\frac{\gamma}{\beta}$ 时,出现双峰的决定因素是 $0 \leq \mu < \frac{2\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N_2}{s}$.反之,当 $\min\left\{\frac{2\beta}{\beta + \gamma} \frac{N_1}{s}, \frac{2\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N_2}{s}\right\} \leq \mu \leq \frac{\beta}{\beta + \gamma} \frac{N_1}{s} + \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N_2}{s}$ 时,排队时间是单峰的.容易证明,这与 Arnott^[6] 等的结论是等价的.

1.4 混行相定理

下面针对排队时间呈现单峰、两类出行者按比例交织出发并混行的情况进行详细讨论.

引理 2 排队时间呈现单峰时,均衡状态下,最早出行的必有第 1 类出行者,最晚出行的必有第 2 类出行者.

证明 首先采用反证法来证明最早出行的必有第 1 类出行者.假设最早出行的只有第 2 类出行者,因排队时间呈现单峰,那么第 1 类出行者将在排队时间达到最大值之后开始出行.分两类情况讨论:1) 若在 $t_0^{(1)}$ 时刻排队时间达到最大值,此时第 2 类出行者将继续在 $t_0^{(1)} < t < t_0^{(2)}$ 时刻出行,这是因为与 $t_0^{(1)}$ 时刻之前出行的第 2 类出行者相比,此时排队时间减少,迟到时间也减少,出行费用相应减少,这与均衡状态下任一出行者不能

通过单方面改变出行时间来降低出行费用相矛盾.2) 若在 $t_0^{(2)}$ 时刻排队时间达到最大值,则第 1 类出行者此时出行费用 $C_1 = \alpha T(t_0^{(2)}) + \gamma(t_2^* - t_1^*)$.但事实上,若第 1 类出行者选择在 $t_0^{(1)} < t < t_0^{(2)}$ 的某一时刻出行,此时排队时间减少,迟到时间也减少,出行费用相应也减少,同样导致矛盾.因此最早出发的必有第 1 类出行者.

类似可证,最晚出行的必有第 2 类出行者.

证毕.

引理 2 说明均衡状态下,若 t_1^* 之前必有第 1 类出行者到达, t_2^* 之后必有第 2 类出行者到达.下面证明当 $\frac{N_1}{N_2} \leq \frac{\gamma}{\beta}, \frac{2\beta}{\beta + \gamma} \frac{N_1}{s} \leq \mu < \frac{\beta}{\beta + \gamma} \frac{N_1}{s} + \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N_2}{s}$ 时, t_2^* 之后不可能有两类出行者到达,并给出相应的混行比例.

定理 2 当 $\frac{N_1}{N_2} \leq \frac{\gamma}{\beta}, \frac{2\beta}{\beta + \gamma} \frac{N_1}{s} \leq \mu < \frac{\beta}{\beta + \gamma} \frac{N_1}{s} +$

$\frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N_2}{s}$ 时,排队时间是单峰的,且出发时刻 $t \leq t_0^{(1)}$ 时,第 2 类出行者与第 1 类出行者按人数比例 $\frac{\mu s - \frac{2\beta}{\beta + \gamma} N_1}{N_1}$ 混行,当 $t > t_0^{(1)}$ 时,只有第 2 类出行者出发.

证明 首先证明第 1 类出行者最晚在 $t_0^{(1)}$ 时刻出发完毕.假设均衡状态下,存在第 1 类出行者在 $t_0^{(1)}$ 之后某时刻 t 出发.因排队时间是单峰的,于是在 $t_0^{(1)}$ 之后排队时间单调递减,当 $t \geq t_0^{(2)}$ 时,两类出行者混行.此时两类出行者费用之差为

$$C_1(t) - C_2(t) = \gamma(t_2^* - t_1^*) \tag{9}$$

根据引理 2,在 $t_0^{(1)}$ 之前必有第 1 类出行者出发, $t_0^{(2)}$ 之后必有第 2 类出行者出行.

最早出发的第 1 类出行者的出行费用

$$C_1(t_a^{(1)}) = \beta(t_1^* - t_a^{(1)}) \tag{10}$$

最后出发的第 2 类出行者的出行费用

$$C_2(t_b^{(2)}) = \gamma(t_b^{(2)} - t_2^*) \tag{11}$$

结合式(9) - 式(11)和 $C_1(t) = C_1, C_2(t) =$

$$C_2, t_b^{(2)} - t_a^{(1)} = \frac{N}{s} \text{ 得}$$

$$t_a^{(1)} = t_1^* - \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N}{s} t_b^{(2)} = t_1^* + \frac{\beta}{\beta + \gamma} \frac{N}{s} \tag{12}$$

于是 $t_1^* - t_a^{(1)} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N}{s} \geq \frac{N_1}{s}$,即 t_1^* 之前第1类出行者可全部到达,矛盾. 因此最后出发的出行者必为第2类出行者,其出行费用为

$$C_2(t_b^{(2)}) = \gamma(t_b^{(2)} - t_2^*) \quad (13)$$

$t_0^{(1)}$ 之前两类出行者的出行费用差为

$$C_2(t) - C_1(t) = \beta(t_2^* - t_1^*) \quad (14)$$

最早出发的第1类出行者的出行费用为

$$C_1(t_a^{(1)}) = \beta(t_1^* - t_a^{(1)}) \quad (15)$$

根据式(13) - 式(15) $t_b^{(2)} - t_a^{(1)} = \frac{N}{s}$, $C_1(t) =$

$C_1, C_2(t) = C_2$ 可得

$$\begin{cases} t_a^{(1)} = t_2^* - \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N}{s} \\ t_0^{(1)} = \frac{\alpha - \beta t_1^*}{\alpha} + \frac{\beta t_2^*}{\alpha} - \frac{\beta \gamma}{\alpha(\beta + \gamma)} \frac{N}{s} \\ t_b^{(1)} = t_0^{(1)} \\ t_a^{(2)} = t_a^{(1)} \\ t_0^{(2)} = t_2^* - \frac{\beta \gamma}{\alpha(\beta + \gamma)} \frac{N}{s} \\ t_b^{(2)} = t_2^* + \frac{\beta}{\beta + \gamma} \frac{N}{s} \end{cases} \quad (16)$$

此时

$$T(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha - \beta}(t - t_a^{(1)}) & t \in [t_a^{(1)}, t_0^{(2)}] \\ \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}(-t + t_b^{(2)}) & t \in [t_0^{(2)}, t_b^{(2)}] \end{cases} \quad (17)$$

$t_0^{(1)}$ 时刻前出行的总人数为 $(t_1^* - t_a^{(1)})s = \mu s - \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} N_1$,此时第1类出行者出行完毕,第2类

出行者出行人数为 $\mu s - \frac{2\beta}{\beta + \gamma} N_1$. 因此当出发时刻 $t \leq t_0^{(1)}$ 时,第2类出行者与第1类出行者出行人

数比例为 $\frac{\mu s - \frac{2\beta}{\beta + \gamma} N_1}{N_1}$. 证毕.

同理可得定理3如下.

定理3 当 $\frac{N_1}{N_2} > \frac{\gamma}{\beta} \frac{2\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N_2}{s} \leq \mu < \frac{\beta}{\beta + \gamma} \frac{N_1}{s} +$

$\frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N_2}{s}$ 时,排队时间是单峰的,且出发时刻 $t < t_0^{(2)}$ 时,只有第1类出行者出发,当 $t \geq t_0^{(2)}$ 时,第1

类出行者与第2类出行者按人数比例

$$\frac{\mu s - \frac{2\gamma}{\beta + \gamma} N_2}{N_2} \text{ 混行.}$$

此时

$$\begin{cases} t_a^{(1)} = t_1^* - \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N}{s} \\ t_0^{(1)} = t_1^* - \frac{\beta \gamma}{\alpha(\beta + \gamma)} \frac{N}{s} \\ t_b^{(1)} = t_b^{(2)} \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} t_a^{(2)} = t_0^{(2)} \\ t_0^{(2)} = -\frac{\gamma}{\alpha} t_1^* + \frac{\alpha + \gamma}{\alpha} t_2^* - \frac{\beta \gamma}{\alpha(\beta + \gamma)} \frac{N}{s} \\ t_b^{(2)} = t_1^* + \frac{\beta}{\beta + \gamma} \frac{N}{s} \end{cases}$$

$$T(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha - \beta}(t - t_a^{(1)}) & t \in [t_a^{(1)}, t_0^{(1)}] \\ \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}(-t + t_b^{(2)}) & t \in [t_0^{(1)}, t_b^{(2)}] \end{cases} \quad (19)$$

综合定理2和定理3,混行相定理给出了排队呈现单峰时两类出行者出发时刻混行的条件及人数比例:当且仅当 $\min\left\{\frac{2\beta}{\beta + \gamma} \frac{N_1}{s}, \frac{2\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N_2}{s}\right\} \leq \mu <$

$\frac{\beta}{\beta + \gamma} \frac{N_1}{s} + \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N_2}{s}$ 时,排队时间是单峰的,两类出行者出现混行,混行比例及混行时段详见定理

2和定理3. 而当 $\mu = \frac{\beta}{\beta + \gamma} \frac{N_1}{s} + \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N_2}{s}$ 时,即 $t_1^* = t_2^*$,两类出行者完全混行,退化为经典的瓶颈模型.

2 错峰调控机理

在双峰相定理和混行相定理基础上,以总排队时间最小为目标,即可计算出错峰调控的最优出行比例和失效阈值.

2.1 错峰调控的最优出行比例

本节研究当给定错峰间隔 $\Delta t = t_2^* - t_1^*$ 时,使总排队时间为最小的两类出行者人数的比例.

根据式(5) - 式(8),式(17) - 式(20)得总排队时间为

$$TT = \begin{cases} \frac{\beta\gamma}{2\alpha(\beta+\gamma)} \frac{(N_1+N_2)^2}{s}, & \left| \frac{\beta}{\beta+\gamma} \frac{N_1}{s} - \frac{\gamma}{\beta+\gamma} \frac{N_2}{s} \right| \geq \Delta t \\ \frac{2\beta\gamma + \beta^2}{4\alpha(\beta+\gamma)} \frac{N_1^2}{s} + \frac{2\beta\gamma + \gamma^2}{4\alpha(\beta+\gamma)} \frac{N_2^2}{s} + \frac{\beta\gamma}{2\alpha(\beta+\gamma)} \frac{N_1 N_2}{s} - \frac{\beta+\gamma}{4\alpha} s (\Delta t)^2, & \left| \frac{\beta}{\beta+\gamma} \frac{N_1}{s} - \frac{\gamma}{\beta+\gamma} \frac{N_2}{s} \right| < \Delta t \leq \frac{\beta}{\beta+\gamma} \frac{N_1}{s} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} \frac{N_2}{s} \\ \frac{\beta\gamma}{2\alpha(\beta+\gamma)} \frac{N_1^2 + N_2^2}{s}, & \frac{\beta}{\beta+\gamma} \frac{N_1}{s} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} \frac{N_2}{s} < \Delta t \end{cases} \quad (20)$$

此时,对给定的 N 若 $\frac{\beta}{\beta+\gamma} \frac{N_1}{s} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} \frac{N_2}{s} < \Delta t$, 当

$\frac{N_1}{N_2} = 1$ 时, TT 取得最小值, 否则当 $\frac{N_1}{N_2} = \frac{\gamma}{\beta}$ 时, TT

取得最小值, 即错峰调控的效果最优.

2.2 错峰调控的失效阈值

本节研究当给定总出行者人数 N 时, 使总排队时间减小的错峰间隔.

根据式(5) - 式(8), 式(17) - 式(20), 可得总排队时间的另一等价表达式

$$TT = \begin{cases} -\frac{\beta+\gamma}{4\alpha} s \mu^2 + \frac{\beta N_1 + \gamma N_2}{2\alpha} \mu + \frac{\beta\gamma}{2\alpha(\beta+\gamma)} \frac{N_1^2 + N_2^2}{s}, & 0 \leq \mu < \min\left\{\frac{2\beta}{\beta+\gamma} \frac{N_1}{s}, \frac{2\gamma}{\beta+\gamma} \frac{N_2}{s}\right\} \\ \frac{\beta\gamma}{2\alpha(\beta+\gamma)} \frac{N^2}{s}, & \min\left\{\frac{2\beta}{\beta+\gamma} \frac{N_1}{s}, \frac{2\gamma}{\beta+\gamma} \frac{N_2}{s}\right\} \leq \mu \leq \frac{\beta}{\beta+\gamma} \frac{N_1}{s} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} \frac{N_2}{s} \end{cases} \quad (21)$$

根据上式, 当 $\mu = 0$ 时, 两类出行者完全独立, 互不影响, TT 最小. 随着 μ 的增大, 错峰间隔减小, TT 逐渐增大. 当 $\mu = \min\left\{\frac{2\beta}{\beta+\gamma} \frac{N_1}{s}, \frac{2\gamma}{\beta+\gamma} \frac{N_2}{s}\right\}$ 时, TT 达

到最大值 $\frac{\beta\gamma}{2\alpha(\beta+\gamma)} \frac{N^2}{s}$. 之后随着 μ 的增大, TT 不再

改变. 即当 $\mu \geq \min\left\{\frac{2\beta}{\beta+\gamma} \frac{N_1}{s}, \frac{2\gamma}{\beta+\gamma} \frac{N_2}{s}\right\}$ 时, 错峰间

隔 $t_2^* - t_1^* \leq \left| \frac{\beta}{\beta+\gamma} \frac{N_1}{s} - \frac{\gamma}{\beta+\gamma} \frac{N_2}{s} \right|$, 总排队时间连续保持最大值, 错峰调控失效.

$$\frac{\beta}{\beta+\gamma} \frac{N_1}{s} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} \frac{N_2}{s} = 50 \text{ min.}$$

图 1 给出了对不同的错峰黏性系数 μ , 出行者的排队时间随出发时刻的变化特征. 当 $0 \text{ min} \leq \mu < 40 \text{ min}$ 时, 排队时间呈现双峰, 两类出行者出发时间不会交织, 但第 1 类的最后一个出行者和第 2 类的第一个出行者的共同排队时间随着 μ 的增大而增大. 例如当 $\mu = 0 \text{ min}$ 时, 第 1 类的最后一个出行者和第 2 类的第一个出行者共同排队时间为 0 (A_1 点), 互不影响; 当 $\mu = 20 \text{ min}$ 和 30 min 时, 第 1 类的最后一个出行者和第 2 类的第一个出行者共同排队时间分别为 20 min 和 30 min (A_2, A_3 点), 此时两类出行者互相影响. 当 $50 \text{ min} \geq \mu \geq 40 \text{ min}$ 时, 排队时间呈现单峰. 且在 $\mu = 40 \text{ min}$ 时, 第 1 类的最后一个出行者和第 2 类的第一个出行者 7:20 出发, 经过排队 $T = 40 \text{ min}$ (A_4 点), 恰好于 8:00 到达. 在 $\mu = 45 \text{ min}$ 时, 两类出行者从出发时刻 6:35 到 7:18 以 $N_1/N_2 = 16$ 的比例交织出发 (A_5 点). 即当 $50 \text{ min} > \mu > 40 \text{ min}$ 时, 交织出发的时间段随着 μ 的增大而增大. 在 $\mu = 50 \text{ min}$ 时, 退化为经典的瓶颈模型, 两类出行者完全混行. 可见, 随着 μ 的增大, 两类出行者之间的影响越来越大.

3 数值算例分析

下面通过 3 个算例验证上述结论. 给定瓶颈的通行能力为 60 P/min , 参数 $\alpha = 2 \text{ 元/min}$, $\beta = 1 \text{ 元/min}$, $\gamma = 3 \text{ 元/min}$.

3.1 算例 1

算例 1 验证错峰黏性系数 μ 的内涵. 设两类出行者人数 $N_1 = 4800$, $N_2 = 2400$, 第 1 类出行者目标到达时刻 $t_1^* = 8:00$. 计算可得

$$\min\left\{\frac{2\beta}{\beta+\gamma} \frac{N_1}{s}, \frac{2\gamma}{\beta+\gamma} \frac{N_2}{s}\right\} = 40 \text{ min},$$

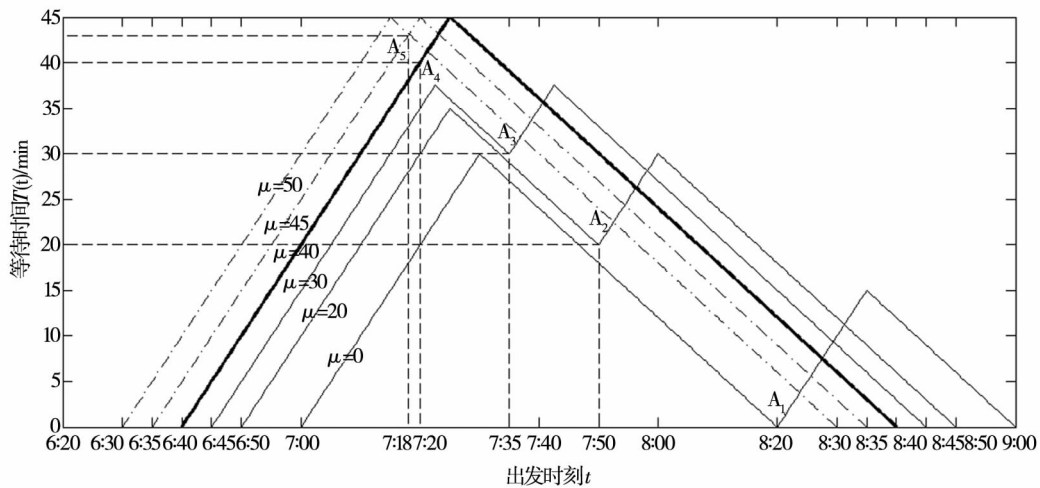


图1 出发时刻与排队时间

Fig. 1 Departure time and the queuing time

3.2 算例2

设错峰间隔 $\Delta t = t_2^* - t_1^* = 30 \text{ min}$, 算例2 (图2) 验证面向两类出行者人数的决策空间. 在区域(A)(B), 排队时间呈现双峰, 其中在区域(A)内两类出行者独立出行, 互不影响. 在区域(C)(D) 排队时间呈现单峰, 两类出行者按一定比例在某个时段内出现混行. 图2中曲线部分为总排队时间的等位线. 对固定的总人数 N , 总排队

时间最小值在区域(A)内的线段 $N_1 = N_2$ 、边界线 $O_1(1\ 800\ 1\ 800) - O_2(3\ 600\ 1\ 200)$ 和区域(B)内的射线 $\beta N_1 = \gamma N_2$ 上取得. 例如在 P 点 $N_1 = 2\ 131$, $N_2 = 6\ 392$ 总排队时间为 $2 \times 10^5 \text{ min}$, 与 $N_1 = 8\ 000$, $N_2 = 0$ 的总排队时间是一样的. 可见相同的总排队时间, 在 P 点使得更多的出行者出行. 因此对固定的错峰间隔, 科学地调整两类出行者的人数比例, 可以降低总排队时间, 减缓交通拥堵.

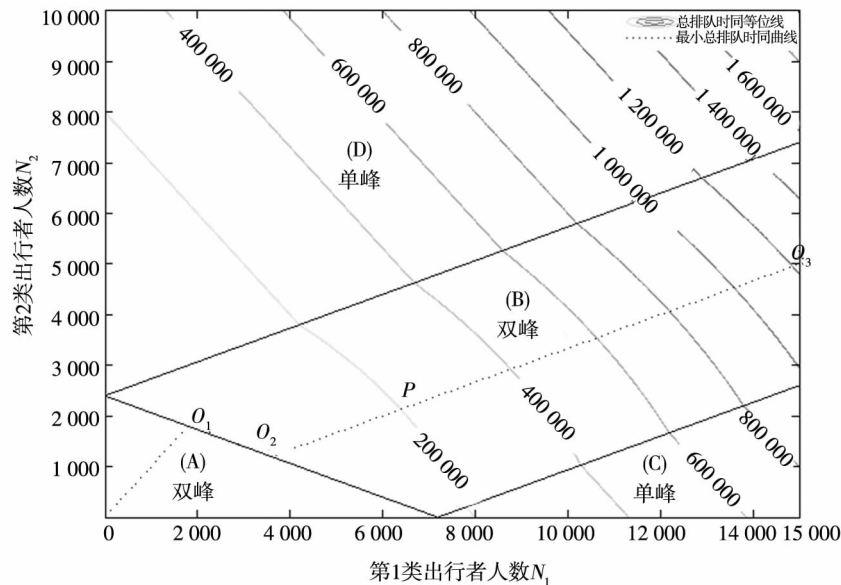


图2 面向两类出行者人数的决策空间

Fig. 2 Decision space for the volume of two class travelers

3.3 算例3

算例3 验证错峰调控存在失效范围. 设出行

总人数 $N = 7\ 200$, 图3反映了总排队时间对错峰黏性系数的敏感性. 对 N_1, N_2 不同的取值, μ 的

取值范围也不相同,但总排队时间总是在 $\mu = 0 \text{ min}$ 处取得最小值. 例如在 $N_1 = 4\ 800$, $N_2 = 2\ 400$ 时, μ 的取值范围为 $[0, 50]$, 当 $0 \text{ min} \leq \mu < 40 \text{ min}$ 之后随着 μ 的增大, 总排队时间也增大, 当 μ 达到阈值 40 min 时, 总排队时间达到最大值, 在 $40 \text{ min} \leq \mu \leq 50 \text{ min}$ 内总排队不再改变, 错峰调控失效. 而对 $N_1 = 6\ 000$, $N_2 = 1\ 200$ 时 μ 的取值范围为 $[0, 40]$, 当 μ 达到阈值 30 min 时, 错峰调控失效.

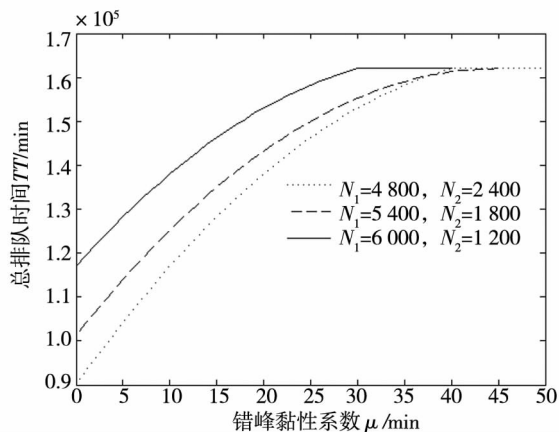


图3 错峰黏性系数对总排队时间的影响

Fig. 3 Effect of staggered viscosity coefficient on total queuing time

4 结束语

本文将 Vickrey 的瓶颈理论模型进行双目标

时刻的扩展,以两个目标到达时刻、且同质出行者的出发时间选择行为分析为基础,研究交通错峰管理的基本原理. 文中详细给出了呈现双峰及单峰的边界条件; 提出双峰相定理确定了均衡状态下两类出行者的出行规律; 详细推演了两类出行者出发时刻混行的条件及人数比例, 得到了混行相定理.

研究发现, 当错峰间隔固定时, 科学调整两类出行人数的比例, 可以降低总排队时间, 减缓交通拥堵. 当总人数固定时, 错峰间隔超过一定阈值, 错峰出行才能够降低总排队时间, 并且随着间隔距离的增大, 总排队时间会越来越小, 直到两类出行者呈现独立出行, 总排队时间才保持不变. 以上结果是通过定量分析途径凝练并总结的. 结果表明, 错峰调控不是只要“错峰”就能取得减缓交通拥堵的效果, 需要科学决策错峰间隔与错峰人群比例的数量关系, 才能使错峰调控达到减缓交通拥堵的政策目标.

本文为错峰调控的精细管理初步构建了理论模型. 但要使模型能够真正运用到交通管理实践中, 还需要进行大量的模型扩展和人群分析工作. 如何扩展此双目标到达时刻模型为多目标到达时刻模型, 或进一步考虑出行者的异质特性^[15], 或同时考虑出发时间和道路选择问题^[16], 借此研究复杂条件下错峰管理的优化原理, 是未来值得深入探讨的管理科学问题.

参考文献:

- [1] 杨晓光, 褚浩然. 错峰出行对城市交通的影响分析[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2006, 34(7): 899-903.
Yang Xiaoguang, Chu Haoran. Study on macro-travel impact analysis of staggered shifts[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2006, 34(7): 899-903. (in Chinese)
- [2] Vickrey W S. Congestion theory and transport investment[J]. The American Economic Review, 1969, 59(2): 251-260.
- [3] Newell G F. The morning commute for nonidentical travelers[J]. Transportation Science, 1987, 21(2): 74-88.
- [4] Arnott R, De Palma A, Lindsey R. Economics of a bottleneck[J]. Journal of Urban Economics, 1990, 27(1): 111-130.
- [5] Yang H, Huang H J. Analysis of the time-varying pricing of a bottleneck with elastic demand using optimal control theory[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 1997, 31(6): 425-440.
- [6] Arnott R, De Palma A, Lindsey R. The welfare effects of congestion tolls with heterogeneous commuters[J]. Journal of Transport Economics and Policy, 1994, 28(2): 139-161.
- [7] 吴子啸, 黄海军. 瓶颈道路使用收费的理论及模型[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(1): 130-133.
Wu Zixiao, Huang Haijun. The pricing theory and models in a highway with bottleneck[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2000, 20(1): 130-133. (in Chinese)
- [8] 黄海军, 田琼, 杨海, 等. 高峰期内公交车均衡乘车行为与制度安排[J]. 管理科学学报, 2005, 8(6): 1-9.

- Huang Haijun , Tian Qiong , Yang Hai , et al. Equilibrium bus riding behavior in rush hours and system configuration for providing bus services [J]. *Journal of Management Sciences in China* , 2005 , 8(6) : 1 - 9. (in Chinese)
- [9] Lindsey R. Existence , uniqueness , and trip cost function properties of user equilibrium in the bottleneck model with multiple user classes [J]. *Transportation science* , 2004 , 38(3) : 293 - 314.
- [10] Ramadurai G , Ukkusuri S , Pang S , et al. Linear complementarity formulation for single bottleneck model with heterogeneous commuters [J]. *Transportation Research Part B: Methodological* , 2010 , 44 (2) : 193 - 214.
- [11] Liu Y , Nie Y. Morning commute problem considering route choice , user heterogeneity and alternative system optima [J]. *Transportation Research Part B: Methodological* , 2011 , 45(4) : 619 - 642.
- [12] Friesz T L , Mookherjee R. Solving the dynamic network user equilibrium problem with state-dependent time shifts [J]. *Transportation Research Part B: Methodological* , 2006 , 40(3) : 207 - 229.
- [13] Li S G. Determination of optimal work start time [J]. *Transport* , 2007 , 22(1) : 45 - 49.
- [14] Kerner B S. *The Physics of Traffic: Empirical Freeway Pattern Features , Engineering Applications , and Theory* [M]. New York: Springer Verlag , 2004.
- [15] 田 琼 , 刘 鹏. 基于乘客异质性的高峰期公交出行均衡研究 [J]. *管理科学学报* , 2013 , 16(3) : 82 - 87.
Tian Qiong , Liu Peng. Equilibrium properties of peak-period commuting in mass transit system with heterogeneous passengers [J]. *Journal of Management Sciences in China* , 2013 , 16(3) : 82 - 87. (in Chinese)
- [16] Han K , Friesz T L , Yao T. Existence of simultaneous route and departure choice dynamic user equilibrium [J]. *Transportation Research Part B: Methodological* , 2013 , 53: 17 - 30.

Bottleneck model for bi-arrival time: Principle of staggered work hours

CHEN Di , ZHANG Ning , LIU Li-juan

School of Economics and Management , Beihang University , Beijing 100191 , China

Abstract: This paper presents the queuing principle for staggered work hours and the methodology of congestion reduction in view of the policy for staggered work hours. The double-peaked phase theorem and the mixed phase theorem are formulated by extending the Vickrey's bottleneck model in bi-arrival time and by introducing the concept of the staggered viscosity coefficient. The double-peaked phase theorem determines the sufficient and necessary conditions for the existence of the double-peaked or single-peaked queue. The proportion of travelers with mixed departure time for the two categories of travelers is resulted from the single-peaked queue in mixed phase theorem. Given the staggered time interval , the total queuing time or traffic congestion can be reduced by properly adjusting the ratio of the two categories of travelers. Given the volume of all travelers , the total queuing time keeps constant until the staggered time interval exceed a threshold. Three numerical examples are employed to demonstrate the principle and the related conclusions.

Key words: bottleneck model; staggered work hours; congestion; traffic; optimization; management science