

# 多任务业务外包的激励契约<sup>①</sup>

代建生

(昆明理工大学管理与经济学院, 昆明 650093)

**摘要:** 多任务业务外包有助于发包企业充分利用外部资源. 通过设计面向多任务的激励契约, 平衡接包企业在各项任务之间的投入, 能够改善外包效率. 运用均方效用函数方法, 构建了多任务委托代理模型, 通过敏感性分析讨论了外生参数的变化对激励契约的影响, 并在任务无关、互补和替代三种情形下考察了模型的应用. 研究发现对特定任务的激励, 不仅受到接包企业风险偏好和与此任务有关的参数变化的影响, 还受到与其它任务有关的参数变化的影响, 其中影响的方向和强度分别依赖于任务之间的关联属性和关联程度. 研究结论为发包企业利用各种属性指标, 尤其是任务关联性质, 加强对多任务外包的激励管理具有借鉴意义.

**关键词:** 多任务业务外包; 激励契约; 均方分析; 替代效应; 互补效应

**中图分类号:** F272   **文献标识码:** A   **文章编号:** 1007-9807(2016)07-0024-13

## 0 引 言

业务外包是指企业把次要的、辅助性的业务或功能交由其他高效率的专业企业经营, 以达到降低成本、提高效率、增强快速反应能力的目的. 通过业务外包, 企业能对既有资源进行有效整合并强化核心竞争能力. 目前全世界年收入在 500 万元以上的公司, 都普遍开展了业务外包<sup>[1]</sup>, 其中成功的典范如 Boeing 和 Nike.

对业务外包已进行了大量富有成效的研究<sup>[2-4]</sup>, 其中一簇重要文献关注于业务外包的道德风险问题. 这簇文献首先针对单任务业务外包问题, 在风险中性下并假定接包企业的努力难以被证实, 运用经典委托代理模型, 考察发包企业如何设计激励契约以缓解接包企业的道德风险问题对外包绩效的不利影响<sup>[5-8]</sup>.

后续文献从不同方向对上述研究进行了拓展. 一是从单边道德风险拓展到双边道德风险, 这

一簇文献不仅关注接包企业的道德风险, 也关注参与外包生产的发包企业的道德风险问题<sup>[9-12]</sup>.

二是从风险中性拓展到风险规避, 这簇文献探讨了决策企业的风险偏好对激励契约设计的重要影响. 杨治和张俊<sup>[13]</sup>在对研发外包激励契约的研究中揭示了代理方的利润分享比例与代理方的风险规避程度负相关的结论. 代建生等<sup>[14]</sup>在讨论服务外包的线性分成契约时也表明接包企业的最优线性分成比例随其风险厌恶程度的上升而减小.

三是从单任务外包扩展到多任务外包, 这簇文献关注的是多任务外包下的激励契约设计问题以及任务之间的关联属性(替代或互补)对激励契约的影响. 唐国锋等<sup>[15]</sup>针对如何平衡服务提供商在硬件及软件建设的多任务投入问题, 考察了多任务外包的激励契约, 并分析了贴现率与成本替代强度对激励效果的影响. Fitoussi 等<sup>[16]</sup>针对多任务 IT 业务外包的道德风险问题, 指出通过设

① 收稿日期: 2013-12-18; 修订日期: 2015-07-24.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71462023; 71362025; 71162019); 云南省应用基础研究计划资助项目(2016FB114); 昆明理工大学人才培养基金资助项目(KKSY201408067).

作者简介: 代建生(1978—), 男, 四川华蓥人, 博士, 副教授. Email: jiansheng.dai@163.com

立多重激励指标体系能缓解服务商的机会主义行为。任怀飞和张旭梅<sup>[17]</sup>研究了当ASP提供商面临执行系统运营服务和业务咨询服务两项任务下的激励机制,并对三种不同能力构建模式下的激励契约进行了分析。张宗明等<sup>[18]</sup>探讨了具有多目标、多任务和不完全测度特点的IT外包的关系契约,并刻画了折现系数和任务特性对关系契约使用条件的影响。上述四篇文献中,第一篇文献在风险中性下进行研究,后三篇文献假定接包企业具有绝对不变风险规避(CARA)偏好,使用指数效用函数及Holmstrom和Milgram<sup>[19]</sup>的多任务委托代理模型,在任务互补和替代等情形下考察多任务外包的激励问题,其中张宗明等<sup>[18]</sup>讨论的是关系契约,另两篇文献讨论的是正式契约。

尽管对多任务业务外包的激励问题已进行了有益的探讨,但仍有许多问题悬而未决。在生产业务外包中,当接包企业引进新的机器设备使其生产技术特性发生变化时,或因面临经济困境而变得更加厌恶风险时,发包企业对不同任务的激励强度是否需要调整?怎样调整?等等,本文将在任务互补、替代和不相关三种情形下探讨上述问题。

与本文研究最相关的是Fitoussi等<sup>[16]</sup>、任怀飞和张旭梅<sup>[17]</sup>、以及张宗明等<sup>[18]</sup>,四篇文献均在风险规避下使用Holmstrom和Milgram<sup>[19]</sup>的多任务委托代理模型研究多任务外包下的激励问题。但至少存在以下不同点,第一,本文将影响契约的参数划分为三类:与特定任务相关的参数、反映任务关联属性的参数以及与任务无关的参数,并完整刻画了三类参数的变化对契约设计的影响,与上述三篇文献的关注重心不同。第二,在技术上本文使用均方分析技术而非指数效用方法。指数效用方法要求影响可测绩效的随机因素服从联合正态分布,这一假设比较具有限制性,基于这一假设的可测绩效在理论上可取负值,与实际观察不符。均方技术具有理论分析相对简单的优点,能提供可实施的、适用的、似视的解<sup>[20]</sup>,近年来在运营管理文献中得到广泛运用<sup>[21-23]</sup>。在这一分析框架下,不必对影响可测绩效的随机因素的分布作特殊限定。特别地,对具有CARA偏好的效用函数,指数效用与均方分析两种方法在结果上是一致

的<sup>[24]</sup>。在委托代理框架下,运用均方分析研究委托人对代理人的激励问题这一方法主要出现在经济及金融文献,尤其是资产证券组合文献中<sup>[25-27]</sup>,后来这种方法被借用到与库存管理有关的运筹及运营管理研究中<sup>[28]</sup>。最近,Feng等<sup>[29]</sup>运用这种方法考察了单任务业务外包契约的谈判问题,但他们并不关注最优激励契约设计,这有别于本文的研究。

## 1 模型

某大型制造企业(发包企业)将配件的生产业务外包给一中小企业(接包企业)。为了建立紧密的联系并获取成本优势,发包企业将多个任务同时外包给接包企业,不失一般性,设有两项任务,并用 $a_1$ 和 $a_2$ 来测度任务的完成属性。发包企业对完成这些任务有一个基本要求,比如按时交货或质量达到市场的平均水平等等,两项任务的基本要求分别设为 $a_1^0$ 和 $a_2^0$ 。超过基本要求的外包件能给发包企业带来额外收益 $M = b^T \Delta a$ ,其中 $b^T = (b_1 \ b_2)$ , $\Delta a = (\Delta a_1 \ \Delta a_2)^T = (a_1 - a_1^0 \ a_2 - a_2^0)^T$ 。这些收益可能来自于从市场采购同等质量配件的成本节约,也可能来自于发包企业的产成品在市场获得的竞争优势。后文提及 $b_i$ 为任务 $i$ 的绩效系数, $b_i > 0$ ,它可衡量任务 $i$ 对发包企业的重要程度, $b_i$ 越大,任务 $i$ 履行的好坏对发包企业绩效的影响越大。

要使任务的完成属性高于基本要求,接包企业需在正常投入之外进行额外的投入, $e = (e_1 \ e_2)^T$ ,其中 $e_i$ 为提高任务 $a_i$ 的完成属性所进行的投入,这些投入包括加强质量监管、购置先进的机器设备、引进技术人才或对员工进行培训等等。接包企业面临在任务 $a_1$ 和 $a_2$ 两个方面投入的权衡,设接包企业的投入成本为 $C(e) = \frac{1}{2} e^T C e$ ,

其中 $C = \begin{pmatrix} c_1 & d \\ d & c_2 \end{pmatrix}$ 是二维矩阵, $c_1 > 0$ , $c_2 > 0$ ,且有 $c_1 c_2 > d^2$ 。为了论述的方便,后文将矩阵 $C$ 称为投入成本矩阵, $c_i$ 为任务 $i$ 的成本系数,而 $d$ 为关联系数。特别地,当 $d < 0$ 时,两项任务具有互

补效应 随着对其中一项任务投入的增加,要在边上提高另一项任务的完成属性需要的投入递减;当  $d > 0$  时,两项任务相互替代,对一项任务投入的增加,将加大对另一项任务的履行难度;而  $d = 0$  表明两项任务相互独立.

任务完成的属性测度  $\Delta a = (\Delta a_1, \Delta a_2)^T$  受到投入  $e$  和随机因素的共同影响,设  $\Delta a = e + \varepsilon$ , 其中  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^T$  是二维随机向量,其协方差矩阵

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{Var}(\varepsilon_1) & \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \text{Var}(\varepsilon_2) \end{pmatrix}.$$

相对于绩效的可测性,要证实接包企业为提高任务的完成属性而增加的投入需要花费高昂的成本,在接包企业对机器设备和员工培训等投入中,难以确认哪些投入与改进外包业务的完成属性直接相关,哪些投入用于提升接包企业的管理水平和技术能力.因此,在业务外包实践中,发包企业通常根据任务完成的属性测度或可测绩效变量来提供激励契约<sup>[15-18]</sup>.假设发包企业提供以下激励契约:  $L(\alpha, \beta) = \alpha + \beta^T \Delta a$ , 其中  $\alpha \in R$  为基本外包费,即接包企业按基本要求完成配件生产时发包企业给予的外包费,  $\beta = (\beta_1, \beta_2)^T \in R^2$ , 且  $\beta > 0$ , 其分量  $\beta_i$  反映的是发包企业对任务  $i$  的激励强度,后文提及为激励系数,  $\beta_i$  越大,对任务  $i$  的激励越强. 发包企业的净收益

$$N(\alpha, \beta) = M - L(\alpha, \beta) \tag{1}$$

在契约  $L(\alpha, \beta)$  下,接包企业的收益是投入  $e$  的函数

$$I(e) = L(\alpha, \beta) - C(e) \tag{2}$$

接包企业风险规避,它在收益和风险之间权衡得失.本文采用均方分析技术来处理接包企业的风险偏好,当接包企业采取策略  $e$  时,其收益的期望和方差分别为

$$E[I(e)] = \alpha + \beta^T e - e^T C e$$

$$\text{Var}[I(e)] = \beta^T \Sigma \beta$$

接包企业面临以下优化问题<sup>[28, 29]</sup>

$$\max_e \{ EV(e) \triangleq E[I(e)] - \lambda \text{Var}[I(e)] \} \tag{3}$$

其中  $EV(e)$  是接包企业的均方目标函数,记号“ $\triangleq$ ”表示定义,而  $\lambda \geq 0$  用来刻画接包企业的风险规避程度,  $\lambda$  越大,接包企业越关注收益的波动情况,其决策行为表现得越厌恶风险,当  $\lambda =$

0 时,  $EV(e) = E[I(e)]$ , 接包企业风险中性.除非特别说明,后文将在  $\lambda > 0$  的情形下进行讨论.

接包企业的保留支付设为  $v$ , 它表示接包企业不参与业务外包下可获得的确定性支付.

发包企业在考虑到接包企业的参与约束以及最优反映的基础上,设计契约  $L(\alpha, \beta)$  来最大化其期望收益  $E[N(\alpha, \beta)] = -\alpha + (b - \beta)^T e$ , 因而发包企业面临以下优化问题(P1)

$$\max_{\alpha, \beta} E[N(\alpha, \beta)] \tag{4}$$

$$\text{s. t. } e \in \arg \max_e EV(e) \tag{5}$$

$$EV(e) \geq v \tag{6}$$

## 2 分 析

### 2.1 模型求解

本小节求解 P1. 首先考察式(5),注意到  $EV(e)$  关于  $e$  的 Hessian 阵为  $-C$ , 它是严格负定的,因而优化问题  $\max_e EV(e)$  的最优解存在.

$EV(e)$  关于  $e$  的一阶最优条件为

$$\frac{\partial EV(e)}{\partial e} = \beta - C e = 0 \tag{7}$$

求解上式,得到

$$e^*(\beta) = C^{-1} \beta \tag{8}$$

要使发包企业的期望收益最大,接包企业的参与约束必然起作用,即  $EV[e^*(\beta)] = v$ . 利用这一结果,将 P1 转化为无约束优化问题

$$\max_{\alpha, \beta} \left\{ F(\beta) \triangleq b^T e^*(\beta) - \frac{1}{2} [e^*(\beta)]^T \times C e^*(\beta) - \lambda \beta^T \Sigma \beta - v \right\}$$

$F(\beta)$  关于  $\beta$  的 Hessian 阵  $H = -C^{-1} - 2\lambda \Sigma$ , 由于  $C$  和  $\Sigma$  均严格正定,所以  $H$  严格负定,上述无约束优化问题存在唯一最优解,其一阶最优条件为

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = \left[ \frac{\partial e^*(\beta)}{\partial \beta} \right]^T b - \left[ \frac{\partial e^*(\beta)}{\partial \beta} \right]^T C e^*(\beta) - 2\lambda \Sigma \beta = 0 \tag{9}$$

$$\text{其中 } \frac{\partial e^*(\beta)}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial e_1^*(\beta)}{\partial \beta_1} & \frac{\partial e_1^*(\beta)}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial e_2^*(\beta)}{\partial \beta_1} & \frac{\partial e_2^*(\beta)}{\partial \beta_2} \end{pmatrix}.$$

由式(8) ,有  $\frac{\partial e^*(\beta)}{\partial \beta} = C^{-1}$  ,因  $C^{-1}$  对称 ,化简式(9)为  $C^{-1}b - C^{-1}\beta - 2\lambda\Sigma\beta = 0$  解得  $\beta^* = (I + 2\lambda C\Sigma)^{-1}b$  (10) 其中  $I$  为单位阵.

$$\beta_i^* = \frac{b_i [1 + 2c_j\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)] - 2b_j d \lambda \text{Var}(\varepsilon_j)}{[1 + 2c_i\lambda \text{Var}(\varepsilon_i)] [1 + 2c_j\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)] - 4d^2 \lambda^2 \text{Var}(\varepsilon_i) \text{Var}(\varepsilon_j)} \quad (11)$$

要使  $\beta^* > 0$  ,要求参数满足以下关系

$$d < \hat{d} \triangleq \min \left\{ \frac{b_i}{b_j} \left[ c_j + \frac{1}{2\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)} \right], \frac{b_j}{b_i} \left[ c_i + \frac{1}{2\lambda \text{Var}(\varepsilon_i)} \right] \right\} \quad (12)$$

这个设定在本质上限制了关联系数  $d$  取值的上界 ,并不具有很强的限制性 ,在以下两种情形下都能得到满足: 1)  $d \leq 0$  ,两项任务互补或无关; 2)  $d > 0$  ,且  $\frac{d}{c_j} < \frac{b_i}{b_j} < \frac{c_i}{d}$  ,即关联系数  $d$  与任务  $j$  的成本系数之比小于任务  $i$  和任务  $j$  的绩效系数之比. 特别地 ,当式(12)不被满足时 ,比如  $d > \frac{b_i}{b_j} \left[ c_j + \frac{1}{2\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)} \right]$  相应的激励系数  $\beta_i^* = 0$  ,此时多任务激励问题转化为单任务激励问题.

投入成本矩阵严格凸要求  $|d| < \sqrt{c_1 c_2}$  ,令  $\bar{d} = \min \{ \hat{d}, \sqrt{c_1 c_2} \}$  .  $d$  的定义域限制在  $(-\sqrt{c_1 c_2}, \bar{d})$  除非特别说明 ,后文总在这一假定下进行讨论.

## 2.2 敏感性分析

在式(11)的参数中 ,绩效系数、成本系数和可测绩效方差与某一特定任务相关 ,关联系数反映两项任务的相关性 ,而风险规避系数与任务无关 ,下面依次讨论这些参数对激励契约的影响.

### 2.2.1 与特定任务有关的参数的变化对激励系数的影响

当市场状况发生变化 ,与任务相关的绩效系数可能发生改变; 当接包企业通过引进新的机器设备或先进的作业方法使得生产技术状况得到改善时 ,成本投入系数会发生变化; 当影响可测绩效的随机因素发生变化或者发包企业采用新的标准或测量手段对任务完成属性进行测评时 ,可测绩效的波动情况随之改变. 随着这些因素的变化 ,对

为了得到更多分析结果 ,本文进一步假定  $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$  . 当可测绩效受到相互独立的随机因素影响时 ,该假设成立. 基于这一假设 , $\beta^*$  的分量  $\beta_i^*$  可表示如下

接包企业的激励强度应随之调整.

**定理 1** 与某一特定任务相关的收益系数上升 ,成本系数下降或可测绩效方差减小 ,对此任务的最优激励系数应上升.

证明 只需表明  $\beta_i^*$  是  $b_i$  的增函数 ,是  $c_i$  和  $\text{Var}(\varepsilon_i)$  的减函数. 略.

定理 1 的结论符合直觉 ,当某一任务能给接包企业带来更大边际收益时 ,应增大对此项任务的激励强度; 当某一任务的成本系数上升或其绩效的波动程度增大 ,需减小对此任务的激励强度. 在单任务背景下 ,杨治和张俊<sup>[13]</sup>表明代理方的利润分享比例与市场需求的确定性负相关 ,这与定理 1 的结论一致. 任怀飞和张旭梅<sup>[17]</sup>则在任务无关情形下得到了与定理 1 相同的结论.

在单任务和多任务下 ,虽然与特定任务有关的参数的变化对此任务的激励在方向上保持一致 ,但在对激励强度的影响程度上则有所不同 (直接比较激励系数对有关参数的一阶导数大小即可完成证明) 这是因为任务之间相互关联 ,对一项任务的激励会影响到与之关联的其它任务的激励.

**定理 2** 在任务无关下 ,与某一任务有关的参数的变化对另一任务的激励系数没有影响; 在任务替代和互补两种情形下 ,与某一任务相关的参数的变化对另一任务激励系数的影响正好相反.

证明 见附录. 后文中未给出的证明均列在技术性附录中.

定理 2 揭示的管理洞见是明显的 ,在多任务外包中 ,当与某一项特定任务有关的参数发生变化时 ,必须根据任务的关联属性来调整对另一项任务的激励强度 ,具体调整方向见表 1. 特别地 ,即使发包企业不能准确掌握参数变化的大小因而不能确定对激励系数调整的具体数值 ,仍可根据

任务的关联属性和参数变化的方向,确保另一任务的激励系数在调整方向上保持正确.

表1 参数的变化对激励系数  $\beta_i^*$  的影响

Table 1 Effect of the parameters on  $\beta_i^*$

任务的相关性	绩效系数		成本系数		可测绩效方差		关联系数	风险规避系数
	$b_i$	$b_j$	$c_i$	$c_j$	$\text{Var}(\varepsilon_i)$	$\text{Var}(\varepsilon_j)$		
$d = 0$	↑	—	↓	—	↓	—	↓	↓
$d < 0$	↑	↑	↓	↓	↓	↑	↓	↓
$d > 0$	↑	↓	↓	↑	↓	↓	不确定	↓

注:第2列~第7列的结果来自于定理1和定理2,第8列的结果来自于定理3,最后一列是定理4的结果,其中记号“↑”、“↓”、“—”分别表示:当参数上升时,激励系数上升、下降或不变.

用关联系数  $d$  的绝对值  $|d|$  来衡量任务的关联程度,  $|d| = 0$  表示任务无关联,  $|d|$  越大,任务关联度越大.任务的相关性反映的是任务的关联属性:无关、互补或者替代,而任务的关联度衡量的是互补效应和替代效应的大小.

推论1 任务关联度越大,与特定任务相关的参数变化对另一任务激励系数的影响就越显著.

如果任务互补(替代),当某项任务的收益系数上升时,需增大(减弱)对另一项任务的激励强度,且当任务的互补(替代)效应增强时,这种交互影响就越显著,如图1所示.

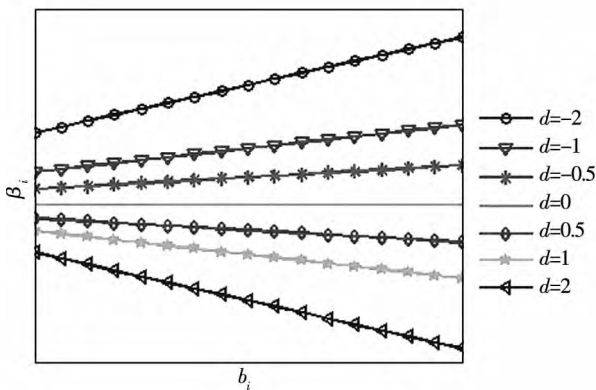


图1  $|d|$  对交互影响的强化作用

Fig. 1 The strengthening impact of  $|d|$  on the interactive effects

### 2.2.2 任务相关性对激励系数的影响

任务相关性由业务本身的自然属性和接包企业的生产技术特性所确定.如果接包企业的生产设施或机器设备更富有柔性,或更多地采取成组生产技术或团队作业方式,任务的互补性就得到增强.任务本身的自然属性也可能发生变化,并引致任务相关性的变化.

引理1 当  $d \leq 0$  时,  $\beta_i^*$  是  $d$  的减函数.

在两项任务互补下,当关联系数增大(互补效应减弱)时,如果保持原有的激励强度不变,必将导致接包企业对两项任务的投入均下降.直觉上,似乎应增大对其中至少一项任务的激励强度,但引理1却给出了相反的结论:发包企业的最优策略是同时减弱对所有任务的激励强度.虽然这使得接包企业的投入下降,但却有助于增大发包企业的绩效,即当互补效应减弱时,原有的激励力度变得过强了,因而应减小激励而不是增大激励.反过来,当互补效应增强时,虽然在原有激励强度下接包企业的投入也会上升,但继续加强激励更有利,发包企业只需额外使用较小的激励成本,就能使接包企业对两个维度的投入有较大的增长.

任怀飞和张旭梅<sup>[17]</sup>比较了任务互补与无关两种情形下的激励强度,表明任务互补下对两项任务的激励强度均应大于任务无关下的激励强度,这与引理1的结论一致.

$$H(d) = 2\lambda \text{Var}(\varepsilon_i) d [b_i(1 + 2c_j\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)) - 2b_j\lambda \text{Var}(\varepsilon_j) d] - (1 + 2c_j\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)) \times [b_j(1 + 2c_i\lambda \text{Var}(\varepsilon_i)) - 2b_i\lambda \text{Var}(\varepsilon_i) d]$$

引理2 当  $d > 0$  时,有以下结论:1) 如果

$\hat{d} = \frac{b_i}{b_j} \left[ c_j + \frac{1}{2\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)} \right]$ , 那么  $\beta_i^*$  是  $d$  的减函数.

2) 如果  $\hat{d} = \frac{b_j}{b_i} \left[ c_i + \frac{1}{2\lambda \text{Var}(\varepsilon_i)} \right]$ , 当  $\bar{d} < d^0$  时  $\beta_i^*$  是  $d$  的减函数; 当  $\bar{d} > d^0$  在区间  $[0, d^0)$ ,  $\beta_i^*$  是  $d$  的减函数, 在区间  $(d^0, \bar{d})$   $\beta_i^*$  是  $d$  的增函数, 其中  $H'(d^0) = 0$ .

当  $d > 0$  时, 两项任务具有替代效应, 关联系

数的上升对激励系数的影响比较复杂,引理2指出激励系数 $\beta_i^*$ 是关联系数 $d$ 的先减后增的凸函数,并刻画了临界点 $d^0$ .当两项任务的替代效应不够强时,即 $d < d^0$ ,随着关联系数的上升,应适当降低对任务 $i$ 的激励强度,以避免对接包企业的激励过度;当两项任务的替代效应足够强时,即 $d > d^0$ ,随着关联系数的上升,应加强对任务 $i$ 的激励,以抵消替代效应对完成此任务的不利影响.

综合引理1和引理2可得以下结论.

**定理3** 1)当任务无关或具有互补效应时,随着互补效应的上升(关联系数减小),对所有任务的激励都应增强.2)当任务具有替代效应时,随着替代效应的上升(关联系数增大),只要 $d < d^0$ ,则对所有任务的激励都应减弱;而当 $d > d^0$ 时,其中一项任务的激励系数应随替代效应的上升而减小,而另一项任务的激励系数随替代效应的上升而增大.

### 2.2.3 接包企业的风险偏好对激励系数的影响

接包企业因灾害而遭受重大经济损失、决策者变更、经济衰退或政府管制等原因都可能导致接包企业在决策时变得更为谨慎,即在收益和波动的权衡中更偏向于控制收益波动的大小.

**定理4** 接包企业越规避风险,激励强度应越低;特别地,当接包企业风险中性时, $\beta_i^* = b_i$ .

当接包企业风险中性时,最优激励系数等于绩效系数.接包企业独享风险性收益并承担所有风险是最优的.经典代理理论的一个基本结论是让风险中性的代理人承担所有的风险可实现帕累托意义上的最优<sup>[30]</sup>,但如果代理人风险规避,上述结论不再成立<sup>[30]</sup>.

代理人越规避风险,对其激励强度应越低,这一结论在代理人承担单一任务下被很多文献所确认<sup>[13,14]</sup>,而且即使代理人同时承担多项任务,只要任务彼此独立,上述结论被证明同样成立<sup>[31]</sup>.定理4发展了相关研究:即使代理人承担的多项任务相互关联,上述结论依然成立.这就揭示了以下管理启示:如果接包企业变得更加规避风险,对所有任务的激励强度都应降低,而不管任务的关联属性如何.尽管在单任务和多任务下接包企业风险规避的变化对任务激励的影响在方向上保持

一致,但在影响程度上则有所不同,这与特定任务相关的参数变化对任务激励强度的影响类似.

## 3 应用

### 3.1 任务无关型的多任务业务外包

发包企业将毫关联的两项任务外包给同一接包企业,比如两类不相干的配件加工,两类配件的生产可能由接包企业的两个工厂分别完成,或者使用完全不同的机器设备.任务无关型的业务外包可视为同一接包企业前后相继的两次业务外包,或者由两个没有关联但风险规避程度和生产技术特性完全相同的接包企业分别承担不同的外包任务,比如发包企业将 $a_1$ 外包给企业1,将 $a_2$ 外包给企业2,并分别提供激励契约 $B_1(\alpha_1, \beta_1) = \alpha_1 + \beta_1 \Delta a_1$ ,  $B_2(\alpha_2, \beta_2) = \alpha_2 + \beta_2 \Delta a_2$ ,因为 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 均可解释为接包企业完成基本任务要求( $a_1 = a_1^0$ ,  $a_2 = a_2^0$ )下的外包费,而多业务外包激励契约 $B(\alpha, \beta) = \alpha + \beta_1 \Delta a_1 + \beta_2 \Delta a_2$ 中的 $\alpha$ 是接包企业提供的配件属性为 $(a_1, a_2) = (a_1^0, a_2^0)$ 时的外包费用,因而有 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ .

**推论2** 当 $d = 0$ 时, $\beta_i^* = \frac{b_i}{1 + 2c_i \lambda \text{Var}(\varepsilon_i)}$ .

在任务无关下,对某项任务的激励强度只依赖于与该项任务有关的参数和接包企业的风险规避程度,而独立于与其它任务有关的参数,这与任怀飞和张旭梅<sup>[17]</sup>的研究结论一致.

### 3.2 具有互补效应的多任务业务外包

发包企业将两项具有互补效应的任务同时外包给某一接包企业,比如两类相关的配件加工业务,这些配件将使用某些共同的机器设备,或由某些共同的技术人员设计完成;或者数量为 $Q$ 的一批配件,但发包企业在两个维度上关注配件的加工精度:尺寸精度和形状精度.发包企业对两项任务的基本质量规定为 $q_1^0$ 和 $q_2^0$ .如果外包件的完成质量高于基本质量规定,发包企业将额外获得绩效 $10 \times \Delta q_1$ 和 $8 \times \Delta q_2$ .当任务具有互补效应时,接包企业对一项任务的投入不仅能提高该项任务的质量属性,还有助于改善另一项任务的质量属性,即 $d < 0$ .设投入成本矩阵 $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ .

发包企业提供如下激励政策:  $\beta_1 \Delta q_1 + \beta_2 \Delta q_2$ , 给定  $\lambda = 0.1, \text{Var}(\varepsilon_1) = 0.5, \text{Var}(\varepsilon_2) = 0.4$ , 由式(11)解得  $(\beta_1^*, \beta_2^*) = (8.103, 6.674)$ . 图2和图3分别绘制了绩效系数和成本系数对激励系数的影响. 当两项任务互补时, 只要其中一项任务的绩效系数增加, 就需同时增加另一项任务的激励强度; 当接包企业通过技术改进提高了某项任务的生产效率, 即对应的成本系数下降, 发包企业也应同时加大对所有任务的激励强度.

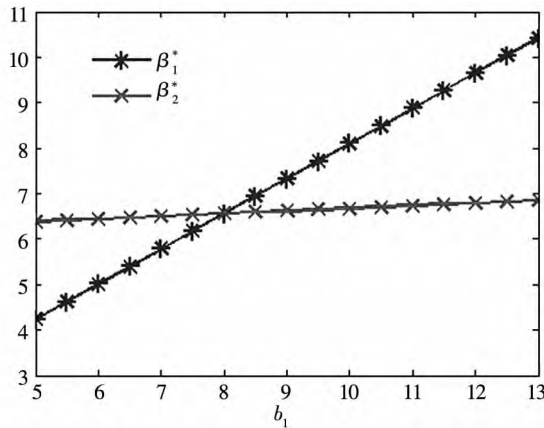


图2  $b_1$  对激励系数的影响

Fig. 2 Effect of  $b_1$  on the incentive coefficients

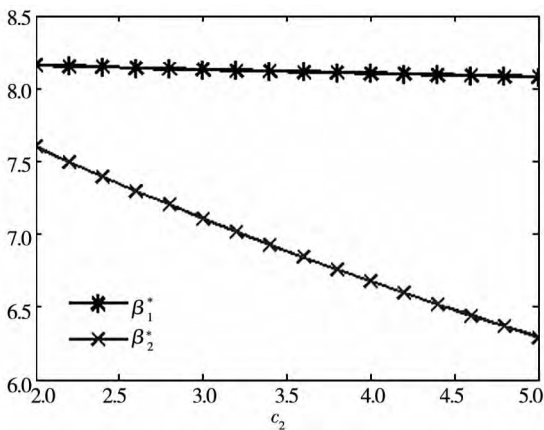


图3  $c_2$  对激励系数的影响

Fig. 3 Effect of  $c_2$  on the incentive coefficients

图4反映了可测绩效方差对激励强度的影响. 当配件1的产出波动增加, 发包企业将减少对配件1的激励强度, 由于接包企业风险规避程度没有改变, 接包企业的确定性收益和风险性收益的配比维持在特定水平是最优的, 发包企业可通过调增对另一配件的激励强度, 增大接包企业的风险性收益占总收益的比例. 由于任务互补, 对配件1投入的下降可通过对配件2投入的增加来弥补.

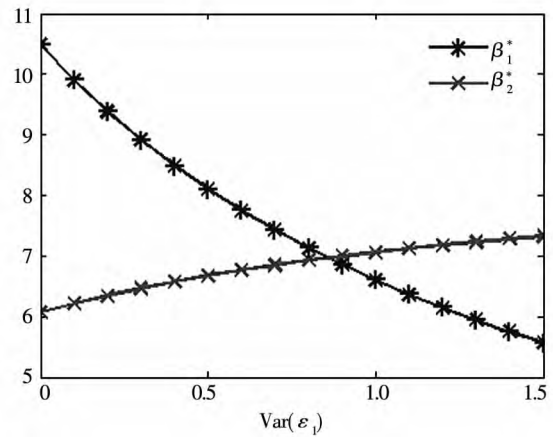


图4  $\text{Var}(\varepsilon_1)$  对激励系数的影响

Fig. 4 Impact of  $\text{Var}(\varepsilon_1)$  on the incentive coefficients

### 3.3 具有替代效应的多任务业务外包

制造企业欲将数量为  $Q$  的某一配件的生产业务外包给一专门服务商. 要在激励的市场竞争中获得竞争优势, 制造企业不仅关注外包件的产品质量  $q$ , 也关注外包件的交货时间  $t$ . 特别地, 设外包件的最迟交货时间为  $t^1$ , 当  $t < t^1$  时, 发包企业在市场竞争中能获得更大的利益; 外包件的基本质量要求为  $q^0$ , 当  $q > q^0$  时, 表示产品质量优于基本要求. 假设  $t < t^1$  和  $q > q^0$  的外包件能给发包企业带来额外收益, 当接包企业在时间  $t$  向发包方交付质量为  $q$  的配件时, 发包企业的可测绩效设定为  $M = 10 \times \Delta q + 8 \times \Delta t$ . 发包方提供的激励契约为  $L(\alpha, \beta) = \alpha + \beta_1 \Delta q + \beta_2 \Delta t$ , 其中  $\alpha$  可解释为在最迟交货时间提供满足基本质量要求的配件时, 发包方给予接包方的外包费.

接包方面临在交货速度和产品质量改进两方面的权衡, 两项任务具有相互抑制效应, 如果加大在交货提前期方面的投入, 比如使用适宜于大规模生产的机器设备, 将降低配件的生产质量; 而如果使用高精尖的机器设备实施精益生产, 或加大对员工在技术改进方面的培训, 则会放缓配件的生产进程. 任务的替代性主要体现在: 如果要加快生产进度, 并维持配件的生产质量不变, 接包企业必须同时增加在两个维度上的投入力度, 即  $d > 0$ . 不妨设成本投入矩阵  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

为了便于比较, 仍假定  $\lambda = 0.1, \text{Var}(\varepsilon_1) = 0.5, \text{Var}(\varepsilon_2) = 0.4$ . 在这些参数设定下, 发包企业的最优激励系数  $(\beta_1^*, \beta_2^*) = (7.354, 5.504)$ . 图5

和图 6 反映了与某一特定任务有关的绩效系数和成本系数对另一任务激励系数的影响,这与任务具有替代效应的情形正好相反(见图 2 和图 3)。

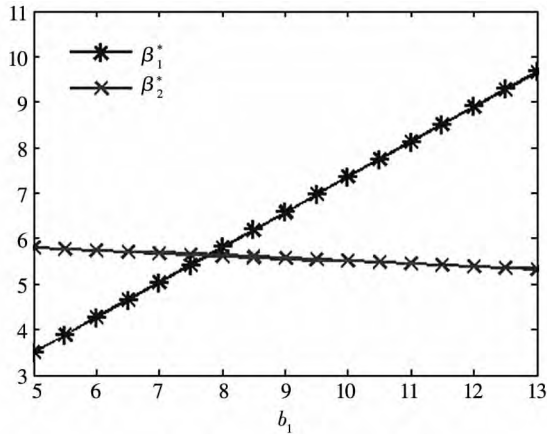


图 5  $b_1$  对激励系数的影响

Fig. 5 Impact of  $b_1$  on the incentive coefficients

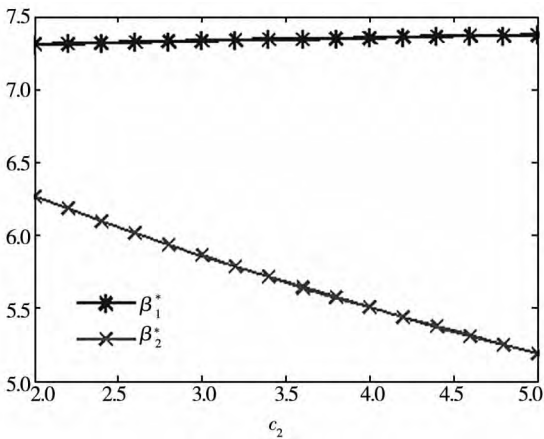


图 6  $c_2$  对激励系数的影响

Fig. 6 Impact of  $c_2$  on the incentive coefficients

当加快交货提前期的成本系数上升时,需减小对交货进度的激励强度,接包企业对提前期的投入下降,由于替代效应,提高外包件质量的工作变得更容易完成,因为更长的生产周期有助于提高外包件的生产质量.在这种情形下,接包企业有激励减小对加工质量方面的投入,比如使用通用的机器设备、减少培训等等.基于此,发包企业有必要加大对外包件质量的激励力度,以此促进接包企业增大对两个维度的投入.

对质量改进和交货速度两项任务的激励系数与产品质量方差的关系如图 7 所示.当产品质量方差增大时,发包企业将减弱对外包件质量的激励强度,接包企业在改善产品质量方面投入减少.如果发包企业增大对交货提前期的激励强度,接

包企业在此方面的投入将上升,比如将两班工作制改为三班工作制,由于替代效应,产品质量更难以得到保证,这对发包企业将是不利的.

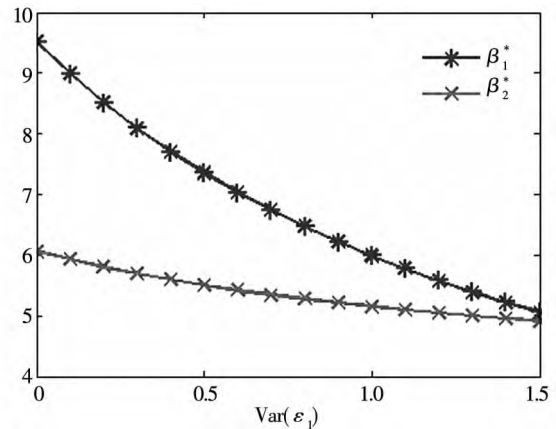


图 7  $\text{Var}(\varepsilon_1)$  对激励系数的影响

Fig. 7 Impact of  $\text{Var}(\varepsilon_1)$  on the incentive coefficients

### 3.4 任务相关性和接包企业风险偏好分析

下面的分析将基于以下参数设定:  $b_1 = 10$ ,  $b_2 = 8$ ,  $c_1 = 3$ ,  $c_2 = 4$ ,  $\text{Var}(\varepsilon_1) = 0.5$ ,  $\text{Var}(\varepsilon_2) = 0.4$ . 当  $\lambda = 0.1$  时,有  $\frac{b_1}{b_2} \left[ c_2 + \frac{1}{2\lambda \text{Var}(\varepsilon_2)} \right] = 20.625$ ,  $\frac{b_2}{b_1} \left[ c_1 + \frac{1}{2\lambda \text{Var}(\varepsilon_1)} \right] = 10.4$ , 因而有  $\hat{d} = 10.4$ . 由引理 2,  $\beta_2$  是  $d$  的减函数. 特别地,  $\bar{d} = \min\{10.4, \sqrt{3 \times 4}\} = 3.464$ , 而  $d^o = 6.103$ , 故有  $\bar{d} < d^o$ . 由引理 2 知,  $\beta_1$  是  $d$  的减函数. 图 8 绘制了最优激励系数随关联系数的变化情况,而图 9 反映的是  $d = -1$  时最优激励系数与接包企业风险规避程度的关系曲线.

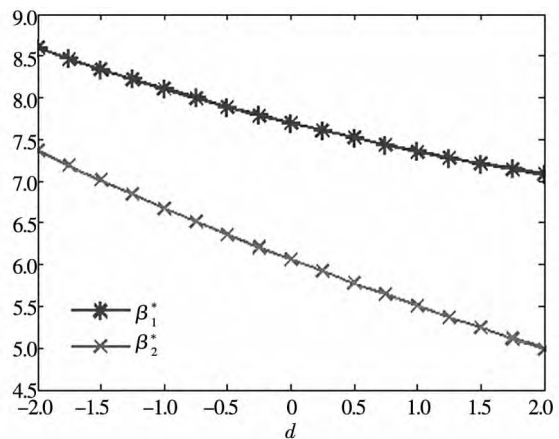


图 8  $d$  对激励系数的影响

Fig. 8 Impact of  $d$  on the incentive coefficients



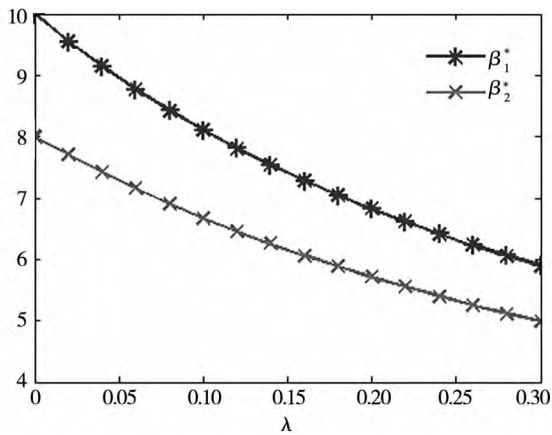


图9 λ对激励系数的影响

Fig. 9 Impact of λ on the incentive coefficients

### 4 结束语

在多任务外包中,对任务的激励强度施加影响的参数可分为三类,其中绩效系数、成本系数和可测绩效方差与某一特定任务相关联,关联系数刻画的是两项任务的关联属性,而接包企业的风险规避系数度量的是接包企业的风险规避程度,与任务无关.本文研究了上述三类参数变化时,发包企业应如何调整对不同任务的激励强度,为多任务业务外包的激励管理提供了理论借鉴.

多任务下的激励管理与单任务情形具有某些一致性:与特定任务有关的参数变化以及接包企

业风险偏好的变化对任务激励强度的影响虽然在调整幅度上有所不同,但在调整方向上保持一致.因此,发包企业对单任务外包的管理经验,可以部分借鉴到对多任务外包的激励管理中来.

尽管存在上述共同点,但多任务业务外包下的激励管理也具有与单任务情形显著不同的一些特征.首先,与某一任务有关的参数的变化会对相关任务的激励强度施加重要影响,其中影响的方向依赖于任务之间的关联属性,而影响的强度依赖于任务之间的关联程度.在任务替代和互补两种情形下,与某一任务有关的参数的变化对另一任务激励强度的影响正好相反;而且任务关联度越大,这种影响就越显著.因此,在调整任务的激励强度时必须考虑任务之间的关联属性和关联强度.

其次,任务的关联属性及强度本身的变化对激励契约也有重要影响.本文刻画了两项任务关联系数的临界值,并揭示了以下管理启示:当任务无关或互补时,随着互补效应的上升,对所有任务的激励都应加强;当任务之间的替代效应较弱(关联系数小于临界值)时,随着替代效应的上升,需同时减弱对所有任务的激励强度;当任务之间的替代效应较强(关联系数大于临界值)时,在增加对其中一项任务激励强度的同时需减小对另一项任务的激励强度.

### 参考文献:

[1]黎继子. 供应链管理[M]. 北京: 机械工业出版社, 2011: 18-41.  
 Li Jizi. Supply Chain Management [M]. Beijing: China Machine Press, 2011: 18-41. (in Chinese)

[2]Grahovac J, Parker G, Shittu E. The impact of costliness, competitive importance, and modularity of investments on outsourcing [J]. Production and Operations Management, 2015, 24(3): 421-437.

[3]Steven A B, Dong Y, Corsi T. Global sourcing and quality recalls: An empirical study of outsourcing-supplier concentration-product recalls linkages [J]. Journal of Operations Management, 2014, 32(5): 241-253.

[4]吴庆, 但斌, 钱宇, 等. 努力水平影响损耗的低值易逝品 TPL 协调合同 [J]. 管理科学学报, 2014, 17(12): 15-26.  
 Wu Qing, Dan Bin, Qian Yu, et al. Third party logistics coordinating contracts for low value perishable products with loss dependent on logistics effort levels [J]. Journal of Management Sciences in China, 2014, 17(12): 15-26. (in Chinese)

[5]Dey D, Fan M, Zhang C. Design and analysis of contracts for software outsourcing [J]. Information Systems Research, 2010, 21(1): 93-114.

[6]张宗明, 廖貅武, 刘树林. 需求不确定性下 IT 服务外包合同设计与分析 [J]. 管理科学学报, 2013, 16(2): 46-59.  
 Zhang Zongming, Liao Xiuwu, Liu Shulin. Design and analysis of contracts for IT service outsourcing with uncertain require-

- ments [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2013, 16(2): 46–59. (in Chinese)
- [7] 宋寒, 但斌, 张旭梅. 不对称信息下服务外包中的客户企业参与机制 [J]. *系统管理学报*, 2011, 20(1): 56–62.  
Song Han, Dan Bin, Zhang Xumei. The mechanism of customer enterprise participation in service outsourcing under asymmetric information [J]. *Journal of Systems & Management*, 2011, 20(1): 56–62. (in Chinese)
- [8] 范体军, 楼高翔, 王晨岚, 等. 基于绿色再制造的废旧产品回收外包决策分析 [J]. *管理科学学报*, 2011, 14(8): 8–16.  
Fan Tijun, Lou Gaoxiang, Wang Chenlan, et al. Analysis of outsourcing decision-making on used products collection for green remanufacturing [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2011, 14(8): 8–16. (in Chinese)
- [9] Elitzur R, Gavious A, Wnsley AKP. Information systems outsourcing projects as a double moral hazard problem [J]. *Omega*, 2012, 40(3): 379–389.
- [10] Jian N, Sameer Hasija S, Dana G, et al. Optimal contracts for outsourcing of repair and restoration services [J]. *Operations Research*, 2013, 61(6): 1295–1311.
- [11] Lee CH, Geng X, Raghunathan S. Contracting information security in the presence of double moral hazard [J]. *Information Systems Research*, 2013, 24(2): 295–311.
- [12] 代建生, 孟卫东, 魏立伟. 具有双边道德风险的服务外包线性分成契约 [J]. *系统管理学报*, 2014, 23(3): 403–409.  
Dai Jiansheng, Meng Weidong, Wei Liwei. Services outsourcing linear shared-saving contract in the presence of double moral hazard [J]. *Journal of Systems & Management*, 2014, 23(3): 403–409. (in Chinese)
- [13] 杨治, 张俊. 企业研发外包的控制机制: 信息泄露下的支付合同选择 [J]. *管理学报*, 2012, 9(6): 863–869.  
Yang Zhi, Zhang Jun. Control mechanism of R&D outsourcing: The choice of payment contract in information leakage context [J]. *Chinese Journal of Management*, 2012, 9(6): 863–869. (in Chinese)
- [14] 代建生, 秦开大, 陈渝. 风险厌恶下服务外包最优线性分成契约 [J]. *计算机集成制造系统*, 2015, 21(11): 3024–3032.  
Dai Jiansheng, Qin Kaida, Chen Yu. Optimal linear sharing contracts in service outsourcing with risk aversion [J]. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2015, 21(11): 3024–3032. (in Chinese)
- [15] 唐国锋, 但斌, 宋寒. 多任务道德风险下应用服务外包激励机制研究 [J]. *系统工程理论与实践*, 2013, 33(5): 1175–1184.  
Tang Guofeng, Dan Bin, Song Han. Research on the incentive mechanism for multi-task moral hazard in application service outsourcing [J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2013, 33(5): 1175–1184. (in Chinese)
- [16] Fitoussi D, Gurbaxani V. IT outsourcing contracts and performance measurement [J]. *Information Systems Research*, 2012, 23(1): 129–143.
- [17] 任怀飞, 张旭梅. ASP 模式下关键业务应用服务外包中的激励契约研究 [J]. *科研管理*, 2012, 33(11): 68–75.  
Ren Huaifei, Zhang Xumei. The incentive contracts for critical business application service outsourcing with ASP pattern [J]. *Science Research Management*, 2012, 33(11): 68–75. (in Chinese)
- [18] 张宗明, 刘树林, 廖貅武. 不完全测度下多目标 IT 外包关系契约激励机制 [J]. *系统工程学报*, 2013, 28(3): 338–347.  
Zhang Zongming, Liu Shulin, Liao Xiuyu. Relational incentive contracts for multiobjective IT outsourcing with in complete measurement [J]. *Journal of Systems Engineering*, 2013, 28(3): 338–347. (in Chinese)
- [19] Holmstrom B, Milgrom P. Multitask principal-agent analyses: Incentive contracts, asset ownership, and job design [J]. *Journal of Law, Economics and Organization*, 1991, 24(7): 24–52.
- [20] Ogryczak W, Ruszczyński A. Dual stochastic dominance and related mean-risk models [J]. *SIAM Journal of Optimization*,

- 2002, 13(1): 60–78.
- [21] Chiu C H, Choi T M. Supply chain risk analysis with mean-variance models: A technical review [J]. *Annals of Operations Research*, 2016, 240(2): 489–507.
- [22] Basu P, Nair S K. A decision support system for mean-variance analysis in multi-period inventory control [J]. *Decision Support Systems*, 2014, 57: 285–295.
- [23] Kouvelis P, Li R, Ding Q. Managing storable commodity risks: The role of inventory and financial hedge [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2013, 15(3): 507–521.
- [24] Van Mieghem J A. Capacity management, investment, and hedging: Review and recent developments [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2003, 5(4): 269–301.
- [25] Boynton W, Blossick G, Rainish R F. The principal-agent problem, tracking error, and the optimal investment portfolio [J]. *Applied Economics Letters*, 2015, 22(3): 239–246.
- [26] 李仲飞, 袁子甲. 参数不确定性下资产配置的动态均值-方差模型 [J]. *管理科学学报*, 2010, 13(12): 1–9.  
Li Zhongfei, Yuan Zijia. A dynamic mean-variance model of portfolio selection under parameter uncertainty [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2010, 13(12): 1–9. (in Chinese)
- [27] 唐衍伟, 陈刚, 刘喜华. 股指期货套期保值不完全变现连续出清策略 [J]. *管理科学学报*, 2014, 17(12): 85–92.  
Tang Yanwei, Chen Gang, Liu Xihua. Continuous optimal partial liquidation of the single stock's hedging under arithmetic Brownian movements [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2014, 17(12): 85–92. (in Chinese)
- [28] Ding Q, Dong L, Kouvelis P. On the integration of production and financial hedging decisions in global markets [J]. *Operations Research*, 2007, 55(3): 470–489.
- [29] Feng B, Yao T, Jiang B. Analysis of the market-based adjustable outsourcing contract under uncertainties [J]. *Production and Operations Management*, 2013, 22(1): 278–288.
- [30] Mas. Collet A, Whinston D, Green J R. *Microeconomic Theory* [M]. Shanghai: Shanghai University of Finance & Economics Press, 2005.
- [31] 袁江天, 张维. 多任务委托代理模型下国企经理激励问题研究 [J]. *管理科学学报*, 2006, 9(3): 45–53.  
Yuan Jiangtian, Zhang Wei. Multitask principal-agent model and study on SOE managers' incentive issues [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2006, 9(3): 45–53. (in Chinese)

## Incentive contracts for multi-task business outsourcing

*DAI Jian-sheng*

Faculty of Management and Economics, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China

**Abstract:** Multi-task outsourcing can help a customer enterprise make full use of its external resources. To improve efficiency of outsourcing, multi-task-oriented incentive contracts need to be designed to encourage the outsourcing firm to balance its effort and investment among the tasks. In this paper, a multi-task principal-agent model is constructed, with the outsourcing firm modeled as an agent with a mean-variance utility objective. Sensitivity analyses are exerted to probe into impact of the exogenous parameters on the incentive contract. Finally, application of the theoretical model is investigated in the three scenarios as follows: The two tasks are independent, substitutive and complementary. It shows that the optimal incentive coefficient of a cer-

tain task is jointly determined by the risk-averse coefficient of the outsourcing firm , the task-specific parameters , and as well correlation coefficient of the two tasks. Furthermore , with change of the properties peculiar to one task , the adjustment direction and size of incentive intensity of the other task are determined by the correlated nature and degree of correlation between the two tasks , respectively. Managerial insights are provided for the customer enterprise to strengthen the incentive management of multi-task-outsourcing , taking full advantage of various indices of the properties , especially of the correlation properties of the tasks.

**Key words:** multi-task business outsourcing; incentive contract; mean-variance analysis; substitutive effect; complementary effect

技术性附录:

定理 2 的证明 令  $B = [1 + 2c_1\lambda \text{Var}(\varepsilon_1) + 2c_2\lambda \text{Var}(\varepsilon_2) + 4\lambda^2 \text{Var}(\varepsilon_1) \text{Var}(\varepsilon_2) |C|]^2$  其中  $|C|$  为矩阵  $C$  的行列式. 由式(11) 有

$$\frac{\partial \beta_i^*}{\partial b_j} = \frac{-2d\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)}{B} \tag{F1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_i^*}{\partial c_j} &= \frac{2\lambda}{B} \{ b_i \text{Var}(\varepsilon_j) [1 + 2c_i\lambda \text{Var}(\varepsilon_i) + 2c_j\lambda \text{Var}(\varepsilon_j) + 4\lambda^2 \text{Var}(\varepsilon_i) \text{Var}(\varepsilon_j) |C|] - \\ &\quad (\text{Var}(\varepsilon_j) + 2c_i\lambda \text{Var}(\varepsilon_i) \text{Var}(\varepsilon_j)) [b_i + 2\lambda (b_i c_j - b_j d) \text{Var}(\varepsilon_j)] \} \\ &= \frac{4d\lambda^2 [\text{Var}(\varepsilon_j)]^2}{B} [b_j (1 + 2c_i\lambda \text{Var}(\varepsilon_i)) - 2b_i\lambda \text{Var}(\varepsilon_j) d] \end{aligned} \tag{F2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_i^*}{\partial \text{Var}(\varepsilon_j)} &= \frac{2\lambda}{B} \{ (b_i c_j - b_j d) [1 + 2c_i\lambda \text{Var}(\varepsilon_i) + 2c_j\lambda \text{Var}(\varepsilon_j) + 4\lambda^2 \text{Var}(\varepsilon_i) \text{Var}(\varepsilon_j) |C|] - \\ &\quad (c_j + 2\lambda \text{Var}(\varepsilon_i) |C|) [b_i + 2\lambda (b_i c_j - b_j d) \text{Var}(\varepsilon_j)] \} \\ &= \frac{2\lambda}{B} \{ (b_i c_j - b_j d) [1 + 2c_i\lambda \text{Var}(\varepsilon_i)] - b_i [c_j + 2\lambda \text{Var}(\varepsilon_i) (c_i c_j - d^2)] \} \\ &= \frac{2d\lambda}{B} \{ -b_j [1 + 2c_i\lambda \text{Var}(\varepsilon_i)] + 2b_i\lambda \text{Var}(\varepsilon_i) d \} \end{aligned} \tag{F3}$$

由式(12) 有  $b_j [1 + 2c_i\lambda \text{Var}(\varepsilon_i)] - 2b_i\lambda \text{Var}(\varepsilon_i) d > 0$  , 利用这一结果 结合(F1) ,(F2) 和(F3) 可完成证明.

推论 1 的证明 由式(F1) 有

$$\frac{\partial^2 \beta_i^*}{\partial b_j \partial |d|} = \begin{cases} \frac{-2\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)}{B} < 0, & d > 0 \\ \frac{2\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)}{B} > 0, & d < 0 \end{cases} \tag{F4}$$

由(F1) 当  $d > 0$  有  $\frac{\partial \beta_i^*}{\partial b_j} < 0$ ; 当  $d < 0$  时 有  $\frac{\partial \beta_i^*}{\partial b_j} > 0$  , 与(F4) 相结合 可表明  $\frac{\partial^2 \beta_i^*}{\partial b_j \partial |d|}$  与  $\frac{\partial \beta_i^*}{\partial b_j}$  有相同的正负号 即随着任务关联度的上升 参数  $b_j$  对  $\beta_i$  的影响更显著.

有关参数  $c_j$  和  $\text{Var}(\varepsilon_j)$  的证明是类似的 略.

引理 1 的证明 由式(11) 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_i^*}{\partial d} &= \frac{2\lambda}{B} \{ -b_j \text{Var}(\varepsilon_j) [(1 + 2c_i\lambda \text{Var}(\varepsilon_i)) (1 + 2c_j\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)) - 4\lambda^2 \text{Var}(\varepsilon_i) \text{Var}(\varepsilon_j) d^2] + \\ &\quad 4\lambda \text{Var}(\varepsilon_i) \text{Var}(\varepsilon_j) d [b_i (1 + 2c_j\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)) - 2b_j\lambda \text{Var}(\varepsilon_j) d] \} \\ &= \frac{2\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)}{B} \{ - (1 + 2c_j\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)) [b_j (1 + 2c_i\lambda \text{Var}(\varepsilon_i)) - 2b_i\lambda \text{Var}(\varepsilon_i) d] + \\ &\quad 2\lambda \text{Var}(\varepsilon_i) d [b_i (1 + 2c_j\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)) - 2b_j\lambda \text{Var}(\varepsilon_j) d] \} \end{aligned} \tag{F5}$$

注意到  $b_i (1 + 2c_j\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)) - 2b_j\lambda \text{Var}(\varepsilon_j) d > 0$   $i = 1, 2$  当  $d \leq 0$  时 必有  $\frac{\partial \beta_i^*}{\partial d} < 0$  .

引理2的证明 1) 由(F5) 有

$$\frac{\partial^2 \beta_i^*}{\partial d^2} = \frac{4\lambda^2 \text{Var}(\varepsilon_i) \text{Var}(\varepsilon_j)}{B} [b_i(1 + 2c_j\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)) - 2b_j\lambda \text{Var}(\varepsilon_j) d] > 0 \quad (\text{F6})$$

注意到  $\frac{\partial \beta_i^*}{\partial d} \Big|_{d=0} < 0$ ,  $\frac{\partial \beta_i^*}{\partial d} \Big|_{d=\hat{d}} < 0$  则对任意  $d \in (0, \bar{d}) \subset (0, \hat{d})$  必有  $\frac{\partial \beta_i^*}{\partial d} < 0$ .

2) 当  $\frac{b_i}{b_j} \left[ c_j + \frac{1}{2\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)} \right] > \frac{b_j}{b_i} \left[ c_i + \frac{1}{2\lambda \text{Var}(\varepsilon_i)} \right]$  时, 由(F5) 有  $\frac{\partial \beta_i^*}{\partial d} \Big|_{d=\hat{d}} > 0$  与  $\frac{\partial \beta_i^*}{\partial d} \Big|_{d=0} < 0$  及(F6) 相结合可知:

$\beta_i^*$  在区间  $(0, \hat{d})$  存在唯一极小点  $d^o$ , 满足  $H'(d^o) = 0$ . 因  $\beta_i^*$  在区间  $(0, \hat{d})$  严格凸, 故有  $\frac{\partial \beta_i^*}{\partial d} \Big|_{d < d^o} < 0$ ,  $\frac{\partial \beta_i^*}{\partial d} \Big|_{d > d^o} > 0$ . 注

意到  $\bar{d} \leq \hat{d}$  可完成证明.

定理3的证明 1) 直接由引理1 得到结论.

2) 根据引理2, 只需表明: 当  $d > d^o$ , 如果  $\partial \beta_i^* / \partial d > 0$ , 则  $\partial \beta_j^* / \partial d < 0$ . 首先注意到以下两式必有一个成立:  $\hat{d} = \frac{b_i}{b_j} \left[ c_j + \frac{1}{2\lambda \text{Var}(\varepsilon_j)} \right]$ ,  $\hat{d} = \frac{b_j}{b_i} \left[ c_i + \frac{1}{2\lambda \text{Var}(\varepsilon_i)} \right]$ . 如果前者成立, 根据引理2的第1)部分, 则对  $d \in (0, \hat{d})$  有  $\frac{\partial \beta_i^*}{\partial d} < 0$ ,

根据引理2的第2)部分, 有  $\frac{\partial \beta_j^*}{\partial d} \Big|_{d > d^o} > 0$ ; 如果后者成立, 结果刚好相反.

定理4的证明 当  $\lambda = 0$  时, 由式(11) 有  $\beta_i^* = b_i$ . 下证  $\beta_i^*$  是  $\lambda$  的减函数.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_i^*}{\partial \lambda} &= \frac{2}{B} \{ (b_i c_j - b_j d) \text{Var}(\varepsilon_j) [1 + 2c_i \lambda \text{Var}(\varepsilon_i) + 2c_j \lambda \text{Var}(\varepsilon_j) + 4\lambda^2 \text{Var}(\varepsilon_i) \text{Var}(\varepsilon_j) | C |] - \\ &\quad (c_i \text{Var}(\varepsilon_i) + c_j \text{Var}(\varepsilon_j) + 4\lambda \text{Var}(\varepsilon_i) \text{Var}(\varepsilon_j) | C |) [b_i + 2(b_i c_j - b_j d) \lambda \text{Var}(\varepsilon_j)] \} \\ &= \frac{2}{B} \{ - (b_i c_j - b_j d) 4\lambda^2 \text{Var}(\varepsilon_j) [\text{Var}(\varepsilon_j)]^2 | C | + (b_i c_j - b_j d) \text{Var}(\varepsilon_j) - \\ &\quad b_i [c_i \text{Var}(\varepsilon_i) + c_j \text{Var}(\varepsilon_j) + 4\lambda \text{Var}(\varepsilon_i) \text{Var}(\varepsilon_j) | C |] \} \\ &= \frac{2}{B} \{ - 2\lambda \text{Var}(\varepsilon_i) \text{Var}(\varepsilon_j) | C | [2\lambda (b_i c_j - b_j d) \text{Var}(\varepsilon_j) + b_i] - \\ &\quad b_j d \text{Var}(\varepsilon_j) - b_i c_i \text{Var}(\varepsilon_i) - 2b_i \lambda \text{Var}(\varepsilon_i) \text{Var}(\varepsilon_j) | C | \} < 0 \end{aligned}$$