

基于以旧换新的闭环供应链决策模型^①

缪朝炜, 夏志强

(厦门大学管理学院, 厦门 361005)

摘要: 构建了 3 种基于以旧换新策略的闭环供应链决策模型, 包括集中决策模型(C)、制造商销售第三方回收商回收模型(M3P)、零售商销售第三方回收商回收模型(R3P), 并分别讨论了模型的最优定价与回收策略. 通过理论与数值分析表明: 制造商和整个供应链系统所获得的利润方面, 模型 C 优于模型 M3P, 而模型 M3P 优于模型 R3P; 而第三方回收商所获得的利润方面, 模型 M3P 也优于模型 R3P; 此外, 根据产品全生命周期评估方法进行环境绩效分析, 结果表明在环境绩效的表现上不存在具有绝对优势的模型.

关键词: 闭环供应链; 以旧换新; 回收策略; 全生命周期评估

中图分类号: F270 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2016)09-0049-18

0 引 言

闭环供应链在节约资源消耗, 减少环境污染等方面具有重要作用, 可以通过系统的设计、控制和运营来使得产品实现在整个生命周期中的价值最大化^[1]. 已有研究表明旧产品的直接使用对环境的影响比新产品大^[2, 3]. 通常, 旧产品的再利用方式主要包括价值增值的再利用方式(如再制造、翻新、及修理), 材料再利用方式(如拆解利用和再循环), 及能源再利用方式(如焚烧和填埋)^[3, 4]. 其中, 能源再利用方式在能源节约和环境污染方面产生矛盾. 其他方式, 特别是再制造, 因在能源节约、成本节约和销售收益方面达成一致^[5], 有助于实现“经济”与“低碳”的双赢. 尽管如此, 企业在进行再制造或者其他再利用方式时, 在产品的回收方面存在困难^[6]. 回收形式上, Guide 等^[7]提出了通过经济返利的方式来解决回收的难题. 回收渠道方面, Savaskan 等^[8]通过构建单阶段静态决策模型比较分析了制造商的 4 种废旧产品的回收渠道, 包括集中回收, 直接从消费者

手中回收, 以激励的形式从零售商处回收, 以及将回收业务外包给第三方回收商, 并认为集中回收是对制造商和整个企业系统最优的回收渠道, 而以激励的形式从零售商处回收则是最优的分散回收渠道; 计国君和黄位旺^[9]则通过构建两阶段动态决策模型比较分析了制造商的 3 种回收处理渠道, 包括集中回收, 一个回收商对一个制造商的委托回收渠道, 以及一个回收商对两个制造商的委托回收渠道. 研究表明集中渠道所带来的社会福利最大; 聂佳佳^[10]所研究的回收渠道与 Savaskan 等相同, 但其研究问题着眼于零售商信息分享对这些闭环供应链回收渠道的影响, 研究表明不管是零售商的分享策略还是制造商回收渠道的选择均取决于预测精度和回收产品价格高低. 回收责任方面, 计国君和黄位旺^[11]基于博弈论的视角, 比较分析了单独回收、集体回收两种回收条例对企业再制造决策以及 OEM 回收激励效果的影响, 研究表明单独回收的激励效果更好; Atasu 等^[12]比较分析了两种回收法规, 即基于制造商运营的回收系统与基于国家运营的回收系统, 对利益相

① 收稿日期: 2013-10-09; 修订日期: 2014-09-10.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71371158; 71671151).

作者简介: 缪朝炜(1980—), 男, 福建福州人, 博士, 教授. Email: miaozhaowei@xmu.edu.cn

关者的影响,研究表明两种回收法规对利益相关者的影响各不相同,而利益相关者对两种法令的偏好取决于整个运营环境.闭环供应链一体化决策方面,Ovchinnikov^[13]将再制造回收环节和营销环节相结合,为OEM进行基于再制造的闭环供应链管理提供了一体化的决策;李响等^[14]研究了随机产率和随机需求下的再制造系统的回收定价决策和销售定价决策.以上文献研究了单纯意义的经济激励回收下的闭环供应链模型,并未对基于以旧换新策略的闭环供应链的模型进行研究.

与单纯意义的经济激励回收不同,以旧换新策略将回收端和销售端进行了很好的衔接,近年来也受到了学术界的广泛关注.学术界对于以旧换新的研究主要通过分析消费者以旧换新的行为来为企业的决策提供指导.在以旧换新行为的理论研究方面,Okada^[15]对消费者进行以旧换新的心理成本进行了理论上的解释,并指出:相比边际成本,个体的替换购买决策对心理成本更为敏感.这一研究表明企业可以通过以旧换新策略来加速消费者的替换购买.与Okada相似,Kim等^[16]的研究也在于分析以旧换新中消费者的行为,不同的是他们将研究重点锁定在当消费者已经选择进行以旧换新后,不同定价水平对消费者购买行为的影响,研究表明对于两个经济上完全等量的以旧换新定价方案,多付定价法适用于旧产品价格对新产品价格比率低的产品,而对于这一价格比率高的产品,少付定价法更加适宜.

从以旧换新行为的应用研究角度,根据B2B市场返回商品授权(RMA)中顾客以旧换新行为的历史数据,Li等^[17]利用聚类分析和有限混合回归模型对消费者进行划分,并验证了当结合消费者类型和产品自身特点来预测RMA中返回产品数量时,预测更为精确;Kwon等^[18]认为在允许歧视定价的汽车以旧换新中,销售人员可以根据消费者以旧换新行为来决定新产品价格,其研究表明销售者更倾向于向进行以旧换新以及换购相同品牌的消费者收取更高的新产品价格.从经济效益的角度,根据心理成本理论,Yin等^[19]比较了3种不同以旧换新定价策略对于企业盈利的影响,通过数值实验发现基于与时间无关的歧视定价策

略可以为企业带来最大的利润;Rao等^[20]的研究则表明以旧换新可以帮助企业解决旧产品市场中的“柠檬问题”,并可能抵消该市场对新产品市场的竞食效应从而为企业带来更大的经济效益.这些文献从消费者行为、定价策略,以及竞争策略等方面对以旧换新进行研究,但没有站在闭环供应链的角度对以旧换新策略的影响加以综合分析.

在实践中,以旧换新也得到了企业界的青睐,以及政府相关部门的关注.近年来,国内以旧换新市场因国家对汽车、家电、以及家具以旧换新补贴政策的支持,引起了企业和消费者的广泛参与.马卫民和赵璋^[21]深刻剖析了以旧换新补贴对各种闭环供应链渠道的影响,包括对消费者、闭环供应链规模及企业的影响.易余胤和袁江^[22]研究分析了在销售渠道和回收渠道均存在冲突的情形下企业定价决策包括批发价、零售价、废旧品的回收价和回收补贴价格,及其对利润的影响.朱庆华和窦一杰^[23]建立了绿色供应链管理中考虑产品绿色度和政府补贴分析的博弈模型并研究了参数对决策的影响.相对于Savaskan等^[8]研究的制造商回收和零售商回收的闭环供应链,目前由第三方回收商回收的情形更为普遍.范体军等^[24]探讨了基于绿色再制造时考虑激励因素和不考虑激励因素两种情况下废旧产品回收外包的决策模型.晏妮娜和黄小原^[25]构建了Stackelberg博弈模型分析了分散闭环供应链系统中制造商为主方、零售商和第三方为从方的集成闭环供应链的联合优化策略以及供应链合同的协调.熊中楷等^[26]研究了零售商作为第三方从事再制造的闭环供应链系统与其只从事回收和销售时对供应链各成员收益的影响.本文在上述研究的基础上,在以旧换新的政策背景下,立足于第三方回收商参与的闭环供应链,构建了具有两阶段生命周期产品的静态博弈模型,讨论了不同模式的闭环供应链中两个阶段消费者的购买决策行为,并分析了对于制造商、第三方回收商及整个闭环供应链系统最有利的模式,为企业选择合适的闭环供应链渠道提供决策依据;此外,从全生命周期评估的角度,比较分析各个闭环供应链渠道下产品对环境的总影响,从环保的角度为政府制定相关政策提供参考.

1 问题描述与假设条件

本文考虑在以旧换新政策下具有两阶段生命周期产品的生产、回收以及销售问题,并通过支付意愿理论对消费者在两阶段的购买行为进行刻画,该方法可以很好地刻画出企业在实施特定策略时消费者购买行为在两个不同时期的差异^[3 5 20].然而,针对不同的研究问题,学者们对产品特征方面的假设存在一定差异. Atasu 等^[5]在研究再制造时为了考虑再制造品和新产品再销售中存在的“竞争”,假设产品的最大使用寿命为一个阶段:第一阶段,消费者购买新产品;第二阶段,产品无法再使用,消费者将产品有偿或者无偿的方式返还给 OEM,而 OEM 则通过再制造技术将回收产品转化为再制造品,与此同时,消费者可以在由 OEM 生产的新产品与再制造产品之间进行购买的选择.而 Agrawal 等^[3]和 Rao 等^[20]为了突出在多阶段销售中顾客消费行为的差异,假设产品的最大使用寿命为两个阶段:第一阶段,消费者购买新产品;第二阶段,新产品变为旧产品,相同的消费者面临着继续使用旧产品、再次购买相同新产品(即以旧换新)、甚至购买二手产品的选择.鉴于 Agrawal 等^[3]和 Rao 等^[20]关于产品特征的基本假设符合本文对以旧换新问题的研究,本文同样假设产品有两个阶段的使用寿命,消费者在第一阶段购买新产品,在第二阶段可以选择继续使用或以旧换新.

假设新产品的销售价格为 p_n ,为了更好地激励顾客通过以旧换新,相应的企业会支付给顾客一定的返利 p_t ,同时政府给予顾客以旧换新补贴 s_t ,消费者结合各自对新产品的支付意愿做出购买决策.假定潜在市场规模标准化为 1,且支付意愿 θ 服从 $[0, 1]$ 均匀分布.根据支付意愿理论,只有当购买决策的净效益非负时,消费者才有可能购买新产品^[5, 11]. 第一阶段,消费者购买新产品的条件为 $U_{1n} = \theta - p_n \geq 0$,由此可得第一阶段新产品需求函数为

$$q_{1n} = \int_{p_n}^1 1 d\theta = 1 - p_n \quad (1)$$

第二阶段,对于持有该产品的老顾客有两种选择,即进行以旧换新或者继续使用^[19].经第一阶段的使用后,相对于新产品,假设消费者对旧产品的评价折扣为 δ .进行以旧换新的净效益为 $U_{2t} = \theta - p_n + p_t + s_t$,继续使用旧产品的净效益为 $U_{2u} = \delta\theta$.由 $U_{2t} \geq U_{2u}$ 和 $U_{1n} \geq 0$,得以旧换新产品的需求函数为

$$q_t = \int_{\frac{p_n - p_t - s_t}{1 - \delta}}^1 1 d\theta = 1 - \frac{p_n - p_t - s_t}{1 - \delta} \quad (2)$$

式(2)同时要满足 $q_{1n} \geq q_t$,即第二阶段以旧换新顾客数量须不超过第一阶段购买该产品的顾客数量.由 $U_{2t} \leq U_{2u}$ 和 $U_{1n} \geq 0$,可得继续使用旧产品的老顾客数量为

$$q_u = \int_{p_n}^{\frac{p_n - p_t - s_t}{1 - \delta}} 1 d\theta = \frac{p_n - p_t - s_t}{1 - \delta} - p_n \quad (3)$$

本文在构建需求函数时侧重点在于刻画以旧换新中消费者的行为,即第一阶段购买新产品,第二阶段继续使用或以旧换新.此外,本文采用静态博弈来研究企业在面对具有上述行为的消费者时的最优决策,因此研究的重点是第一阶段购买过该产品的消费者,而根据支付意愿理论,第一阶段没有购买的消费者在第二阶段肯定不购买,因此其间不会有新增顾客产生^[3 20].由此可知,两阶段新产品总需求即为第一阶段的新产品购买所产生的需求和第二阶段以旧换新所产生的需求之和,即

$$q_n = q_{1n} + q_t = \frac{2 - 2\delta - (2 - \delta) p_n - p_t - s_t}{1 - \delta} \quad (4)$$

特别指出的是本文在构建需求函数时没有考虑随机因素,由于相关文献在构建需求函数时为了重点突出不同的策略对顾客需求的影响,普遍采用上述支付意愿理论构建需求函数亦不考虑随机因素,从而能够简化模型以便获得更加清晰的管理启示,如 Atasu 等^[5]、Agrawal 等^[3]及 Rao 等^[20],因此本文也采用该方法为了重点突出以旧换新策略对于消费者购买行为及其需求的影响.

由于第三方回收模式是目前最为普遍的方式,因此本文将重点研究第三方回收商参与的闭环供应链.根据闭环供应链中正向物流的不同,可分为制造商销售第三方回收商回收模型(模型

M3P) 和零售商销售第三方回收商回收模型(模型 R3P). 此外, 本文也给出了集中决策模型, 即制造商销售并回收模型(模型 C), 作为基准模型. 3 种博弈模型下的博弈人、博弈关系及博弈变量等如图 1 所示, 其中, 供应链通过正向流决策和逆向流决策得以实现闭环决策. 图中决策变量除了包括前面提到了新产品价格 p_n 、旧产品以旧换新返利 p_t , 还包括在模型 R3P 中制造商制定的新产品批发价格 w . 此外, 本文还考虑了新产品的单位生产成本 c_n 及回收旧产品的单位直接净收益 c_s . 其中 c_s 可看成是扣除回收旧产品过程中产生的单位运输、挑选、拆解等处理成本以后, 制造商对旧产品进行再利用的净收益. 令 $b = c_s + s_t$, 即为以旧换新策略给包含消费者在内的整个闭环供应链系统所带来的直接单位收益.

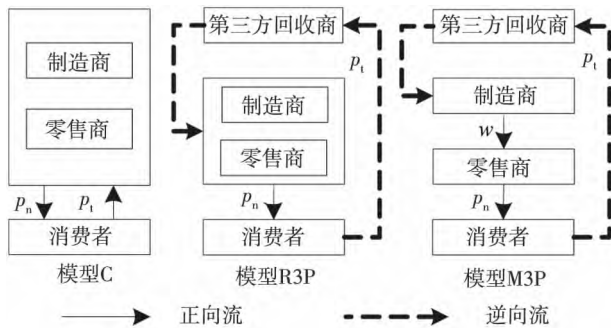


图 1 基于以旧换新的 3 种闭环供应链决策模型
Fig. 1 Three kinds of closed-loop supply chain decision models based on trade-in

2 建模与求解

本文闭环供应链决策中, 博弈方通过确定最优的决策变量以使得两阶段所获得的总利润最大化. 令 $\Pi_X^Y(\Pi_X^{Y*})$ 表示在模型 $Y \in \{M3P, R3P, C\}$ 下企业 $X \in \{M, R, 3P, S\}$ 在两阶段所获得的总利润(最优利润). 这里, M、R、3P 及 S 分别表示制造商、零售商、第三方回收商及整个系统. 同样地, 文中若在变量上以 ‘*’ 作为上标表示在模型 Y 下的最优均衡决策变量或者对应的状态变量. 下面将分别对模型 C、模型 M3P 及模型 R3P 进行数学模型的构建与求解.

2.1 集中决策模型(模型 C)

在集中决策模型中, 新产品的生产、销售及回收均由制造商进行, 因此新产品的销售价格 p_n 以旧换新返利 p_t 均由制造商确定. 其最优化问题为

$$\begin{aligned} \max_{p_n, p_t} \Pi_M^C(p_n, p_t) &= (p_n - c_n) q_n + (c_s - p_t) q_t \\ \text{s. t.} \quad &0 \leq q_t \leq q_{in} \end{aligned} \quad (5)$$

其中 q_{in} 、 q_t 及 q_n 分别见式(1)、式(2)及式(4). 下列命题 1 给出了该模型的最优策略.

命题 1 模型 C 的均衡最优解、最优利润及对应的条件如表 1 所示, 其中 $l^{C*} = c_n + \delta - 1$ 及 $h^{C*} = \delta c_n$, 分别表示模型 C 的部分回收点和全部回收点.

表 1 模型 C 下的均衡最优解和最优利润

Table 1 Equilibrium optimal solution and profits under model C

最优解 (最优利润)	不回收	部分回收	全部回收
	$b \leq l^{C*}$	$l^{C*} < b < h^{C*}$	$b \geq h^{C*}$
p_n^{C*}	$\frac{1 + c_n}{2}$	$\frac{1 + c_n}{2}$	$\frac{1 + c_n}{2} - \frac{b - \delta c_n}{2(2 - \delta)}$
p_t^{C*}	$\delta - s_t - \frac{1 - c_n}{2}$	$\frac{c_s - s_t + \delta}{2}$	$\frac{c_s - s_t + \delta}{2} - \frac{b - \delta c_n}{2 - \delta}$
q_n^{C*}	$\frac{1 - c_n}{2}$	$1 - c_n - \frac{\delta c_n - b}{2(1 - \delta)}$	$1 - c_n + \frac{b - \delta c_n}{2 - \delta}$
q_t^{C*}	0	$\frac{1 - c_n}{2} - \frac{\delta c_n - b}{2(1 - \delta)}$	$\frac{1 - c_n}{2} + \frac{b - \delta c_n}{2(2 - \delta)}$
q_u^{C*}	$\frac{1 - c_n}{2}$	$\frac{\delta c_n - b}{2(1 - \delta)}$	0
$\Pi_M^{C*} (\Pi_S^{C*})$	$\frac{(1 - c_n)^2}{4}$	$\frac{(1 - c_n)^2}{4} + \frac{(1 - c_n + b - \delta)^2}{4(1 - \delta)}$	$\frac{(2 - 2c_n + b - \delta)^2}{4(2 - \delta)}$

根据命题 1 可得以下主要结论: 1) 只有当以旧换新为闭环系统所带来的直接收益 b 足够大 (即 $b > l^{C^*}$) 时, 该政策才能够对集中决策的闭环供应链起作用, 此外, 由 $l^{C^*} = c_n + \delta - 1$ 知, 较低的新产品的生产成本 c_n 和较低的消费者对旧产品的评价折扣 δ 均有利于以旧换新在模型 C 下的盈利性; 2) 当 b 超过临界值 h^{C^*} 时, 模型 C 将对第一阶段售出的产品通过以旧换新策略进行全部回收, 同样较低的 c_n 和较低的 δ 有利于全部回收使得以旧换新策略为模型 C 带来收益; 3) 在模型 C 中, 当以旧换新能够带来利润 (部分回收或全部回收) 时, 由 $q_n^{C^*} |_{P} \geq q_n^{C^*} |_{N}$ 和 $q_n^{C^*} |_{F} \geq q_n^{C^*} |_{N}$ 知^②, 在此情况下可使得新产品的销售量得到提升. 同时, 由 $q_u^{C^*} |_{P} \leq q_u^{C^*} |_{N}$ 和 $q_u^{C^*} |_{F} \leq q_u^{C^*} |_{N}$ 知以旧换新在一定程度上可以减少废旧产品的使用; 4) 当部分回收最优时, 当回收旧产品的单位直接净收益 c_s 足够小, 即 $c_s < \delta - s_t$ 时, 有 $p_t^{C^*} |_{P} > c_s$, 结合 3) 知, 对制造商而言, 通过以旧换新来促进产品的销售利润比获取旧产品的回收利润更为重要, 换言之, 制造商为在销售端获得更高的利润, 可以牺牲在回收端所应获得的利润. 而当全部回收最优时, 当以旧换新为闭环系统所带来的直接收益 b 足够大, 即 $b > \max \left\{ \frac{\delta(2-\delta+2c_n)}{4-\delta}, h^{C^*} \right\}$ 时, 有 $p_t^{C^*} |_{F} < c_s$, 回收旧产品本身亦可为制造商带来利润.

2.2 制造商销售第三方回收商回收决策模型 (模型 M3P)

在模型 M3P 中, 制造商负责新产品的生产与销售, 第三方回收商负责旧产品的回收. 制造商和回收商之间的博弈关系为 Stackberg 博弈, 即制造商先制定新产品的销售价格 p_n , 据此, 第三方回收商制定旧产品的以旧换新返利 p_t (或称为“回收价格”). 根据逆序法, 先给出第三方回收商的最优化问题

$$\begin{aligned} \max_{p_t} \Pi_{3P}^{M3P}(p_t | p_n) &= (c_s - p_t) q_t \\ \text{s. t.} \quad 0 &\leq q_t \leq q_{t1} \end{aligned} \quad (6)$$

q_{t1} 和 q_t 分别见式 (1) 和式 (2). 根据库恩·塔克条件, 可得到第三方回收商最优化问题的最优解

$p_t^{M3P^*}(p_n)$ 代入式 (4) 得到 $q_n^{M3P^*}(p_n)$. 制造商的最优化问题为

$$\max_{p_n} \Pi_R^{M3P}(p_n) = (p_n - c_n) q_n^{M3P^*}(p_n) \quad (7)$$

类似地, 通过求解式 (7) 给出的最优化函数, 可以得到模型 M3P 中两方博弈的均衡最优解.

命题 2 模型 M3P 的均衡最优解、最优利润及对应的条件如表 2 所示, 其中

$$\begin{aligned} l^{M3P^*} &= c_n(3-2\delta) - 3(1-\delta) + \sqrt{2(3-2\delta)(1-\delta)} \times \\ &\quad (1 - c_n), \\ h_I^{M3P^*} &= \frac{(1-\delta)(3+2\delta) - c_n(1-2\delta)(3-2\delta)}{7-6\delta}, \\ h_{II}^{M3P^*} &= \frac{2\delta c_n - c_n + 1}{2} \end{aligned}$$

分别表示模型 M3P 的部分回收点、全部回收点及全部回收转折点. 特别的, 当 $\delta = 0.5$ 时 $h_{II}^{M3P^*} = h_I^{M3P^*}$, 表明全部回收 I 不存在.

根据命题 2 可得以下主要结论: 1) 在部分回收点 $b = l^{M3P^*}$ 处, 不管采取不回收还是部分回收的以旧换新策略, 制造商所获利润相同 ($\Pi_M^{M3P^*} |_{N} = \Pi_M^{M3P^*} |_{P}$), 而第三方回收商所获利润却截然不同. 部分回收策略将使得第三方回收商获利 ($\Pi_{3P}^{M3P^*} |_{P} > 0$), 不回收策略使得第三方回收商无利可图 ($\Pi_{3P}^{M3P^*} |_{N} = 0$), 因此以旧换新对第三方回收商利润的影响更明显, 这种影响程度的差异也使得在部分回收点处的最优解不连续; 2) 与集中决策模型不同, 在模型 M3P 中销售端和回收端的决策分别由不同的主体负责 (即制造商和第三方回收商). 在供应链的垂直竞争中, 第三方回收商不会为了实现销售端的利润 (即制造商的利润) 而牺牲回收端的利润 (第三方回收商的利润), 因此回收端的边际利润 ($c_s - p_t^{M3P^*}$) 在所有的回收策略下均满足非负; 3) 对于全部回收, 对应于不同的条件, 制造商有两种定价方案. 其中在全部回收 I 下, 当消费者对旧产品的评价折扣 $\delta < 0.5$, 即产品在第一阶段的折旧较大时, 随着以旧换新单位直接收益 b 的提高, 仍有必要提高以旧换新量, 为此制造商不得不降低其边际利润 ($p_n^{M3P^*} |_{F1} - c_n$)^③, 第三方回收商也不得不降低

② 为区分最优解在不同条件下的表达式, 在变量后附加“|_N”、“|_P”及“|_F”分别指在不回收、部分回收及全部回收下的均衡最优解.

③ 变量后附加“|_{F1}”及“|_{F2}”分别指在全部回收 I 及全部回收 II 下的均衡最优解.

其边际利润($c_s - p_t^{M3P^*}$);当 $\delta > 0.5$ 时 随着以旧换新单位直接收益 b 的提高,由于以旧换新难以再得到消费者的响应,两博弈方有必要降低以旧换新量,为此他们需要通过提高其边际利润来实现利润的最优;当 $\delta = 0.5$ 时,产品在两阶段的折旧相同,随着以旧换新单位直接收益 b 的提高,制造商没有必

要改变定价,因此不存在全部回收 I 的情形. 在全部回收 II 下,以旧换新单位直接收益 b 很大,第三方回收商愿意通过制定较高的以旧换新返利来使得以旧换新量与没有以旧换新时的销售量相同($q_t^{M3P^*} |_{F2} = q_n^{M3P^*} |_N$),而制造商则只需维持价格不变($p_n^{M3P^*} |_{F2} = p_n^{M3P^*} |_N$) 就能实现利润最大化.

表 2 模型 M3P 下的均衡最优解和最优利润

Table 2 Equilibrium optimal solution and profits under model M3P

最优解	不回收	部分回收	全部回收 I	全部回收 II
	$b \leq l^{M3P^*}$	$l^{M3P^*} < b < h_I^{M3P^*}$	$h_I^{M3P^*} \leq b < h_{II}^{M3P^*}$	$b \geq h_{II}^{M3P^*}$
$p_n^{M3P^*}$	$\frac{1+c_n}{2}$	$\frac{3(1-\delta) + (3-2\delta)c_n + b}{2(3-2\delta)}$	$\frac{1-\delta-b}{1-2\delta}$	$\frac{1+c_n}{2}$
$p_t^{M3P^*}$	$\frac{2(\delta-s_t)-1+c_n}{2}$	$\frac{(7-4\delta)c_s - (5-4\delta)s_t - (1-\delta)(3-4\delta) - (3-2\delta)c_n}{4(3-2\delta)}$	$\frac{(1-\delta)(\delta-s_t) - \delta c_s}{1-2\delta}$	$\frac{\delta(1+c_n) - 2s_t}{2}$
$q_n^{M3P^*}$	$\frac{1-c_n}{2}$	$\frac{3(1-\delta) + b - (3-2\delta)c_n}{4(1-\delta)}$	$\frac{2(b-\delta)}{1-2\delta}$	$1-c_n$
$q_t^{M3P^*}$	0	$\frac{(5-4\delta)b - (3-2\delta)c_n + (3-4\delta)(1-\delta)}{4(1-\delta)(3-2\delta)}$	$\frac{b-\delta}{1-2\delta}$	$\frac{1-c_n}{2}$
$q_u^{M3P^*}$	$\frac{1-c_n}{2}$	$\frac{(1-\delta)(3+2\delta) - (7-4\delta)b - (1-2\delta)(3-2\delta)c_n}{4(1-\delta)(3-2\delta)}$	0	0
$\Pi_M^{M3P^*}$	$\frac{(1-c_n)^2}{4}$	$\frac{(b-(3-2\delta)c_n + 3(1-\delta))^2}{8(1-\delta)(3-2\delta)}$	$\frac{2((2\delta-1)c_n - b + 1 - \delta)(b-\delta)}{(1-2\delta)^2}$	$\frac{(1-c_n)^2}{2}$
$\Pi_{3P}^{M3P^*}$	0	$\frac{((5-4\delta)b - (3-2\delta)c_n + (3-4\delta)(1-\delta))^2}{16(1-\delta)(3-2\delta)^2}$	$\frac{(1-\delta)(\delta-b)^2}{(1-2\delta)^2}$	$\frac{(1-c_n)(2b-\delta(1+c_n))}{4}$
$\Pi_S^{M3P^*}$	$\frac{(1-c_n)^2}{4}$	$\Pi_M^{M3P^*} + \Pi_{3P}^{M3P^*}$	$\Pi_M^{M3P^*} + \Pi_{3P}^{M3P^*}$	$\frac{(1-c_n)(2b-(2+\delta)c_n+2-\delta)}{4}$

2.3 零售商销售第三方回收商回收决策模型 (模型 R3P)

在模型 R3P 中,制造商负责新产品的生产,零售商负责新产品的销售,第三方回收商负责旧产品的回收.三者之间的博弈关系为 Stackberg 博弈:制造商先制定新产品的批发价格 w ;零售商制定销售价格 p_n ;最后,第三方回收商制定旧产品的以旧换新返利 p_t .根据逆序法,先给出第三方回收商的最优化问题

$$\begin{aligned} \max_{p_t} \Pi_{3P}^{R3P}(p_t | p_n) &= (c_s - p_t) q_t \\ \text{s. t. } &0 \leq q_t \leq q_{1n} \end{aligned} \quad (8)$$

其中 q_{1n} 和 q_t 分别见式(1)和式(2).比较式(6)和式(8)可知模型 R3P 中第三方回收商最优化问题的最优解 $p_t^{R3P^*}(p_n)$ 与模型 M3P 的 $p_t^{M3P^*}(p_n)$ 相同,将 $p_t^{R3P^*}(p_n)$ 代入式(4)得到 $q_n^{R3P^*}(p_n)$,因此零售商的最优化问题为

$$\max_{p_n} \Pi_R^{R3P}(p_n | w) = (p_n - w) q_n^{R3P^*}(p_n) \quad (9)$$

模型 R3P 中零售商和第三方回收商的最优决策 $p_n^{R3P^*}(w)$ 和 $p_t^{R3P^*}(w)$ 分别与模型 M3P 中制造商的最优决策 $p_n^{M3P^*}$ 和第三方回收商的最优决策 $p_t^{M3P^*}$ 相似,但其中的参数 c_n 需换成变量 w .由此可得制造商销量 $q_n^{R3P^*}(w)$.因此制造商的最优化问题为

$$\max_w \Pi_M^{R3P}(w) = (w - c_n) q_n^{R3P^*}(w) \quad (10)$$

引理 1 若 $\delta \neq 0.5$,零售商进行决策时存在 4 种情况:不回收、部分回收、全部回收 I 及全部回收 II.其中,当制造商预期下游采取全部回收 I 策略时,制造商的最优决策 w^{R3P^*} 在该策略的临界值取得,可由部分回收策略或全部回收 II 下的局部最优决策给出.而当制造商预期其余 3 种策略时的局部最优解如表 3 所示(为简化表达,令表中 $A = \sqrt{2(3-2\delta)(1-\delta)}$).

表 3 模型 R3P 下制造商的局部最优解
Table 3 Manufacturer's local optimal solution under model R3P

零售商决策	参数条件与制造商局部最优决策		
不回收	$b \leq l_N^{R3P} = \frac{(3-2\delta)c_n - (3-4\delta) + A(1-c_n)}{2}$		$b > l_N^{R3P}$
	$w^{R3P} _{N1} = \frac{1+c_n}{2}$		$w^{R3P} _{N2} = \frac{b+3(1-\delta)-A}{3-2\delta-A}$
部分回收	$b \leq l_P^{R3P} = \frac{(3-\delta-c_n(3-2\delta))A + (3-2\delta)^2 c_n - 3(1-\delta)(3-2\delta)}{3-2\delta+A}$	$l_P^{R3P} < b < h_P^{R3P}$	$b \geq h_P^{R3P} = \frac{((2\delta-1)(3-2\delta)c_n + (10\delta+3)(1-\delta))}{15-14\delta}$
	$w^{R3P} _{P1} = \frac{(3-2\delta)c_n + 3(1-\delta) + b}{2(3-2\delta)}$	$w^{R3P} _{P2} = \frac{(3-2\delta)c_n + 3(1-\delta) + b}{2(3-2\delta)}$	$w^{R3P} _{P3} = \frac{b+3(1-\delta)-A}{3-2\delta-A}$
全部回收 II	$b \leq l_{F2}^{R3P}$		$b > l_{F2}^{R3P} = \frac{1+2\delta+(2\delta-1)c_n}{4}$
	$w^{R3P} _{F21} = \frac{1-2b}{1-2\delta}$		$w^{R3P} _{F22} = \frac{1+c_n}{2}$

注: 表中临界值后附加“ l_N ”, “ l_P ”及“ l_{F2} ”分别指当制造商预期零售商的决策为不回收、部分回收及全部回收 II 时的临界值, 而局部最优解后附加“ l_{Nn} ”, “ l_{Pn} ”及“ l_{F2n} ”分别指当制造商预期零售商的决策为不回收、部分回收及全部回收 II 时在第 n 个情形 (详见附录 C) 下的局部最优解。

将引理 1 中制造商的局部最优解 w^{R3P*} 代入相应的零售商和第三方回收商的反应函数, 可得对应的产品价格 p_n^{R3P*} 和以旧换新返利 p_t^{R3P*} 。再将它们代入式 (2) - 式 (4) 及利润函数, 可得局部最优解所对应的 q_t^{R3P*} 、 q_u^{R3P*} 、 q_n^{R3P*} 、 Π_R^{R3P*} 及 Π_{3P}^{R3P*} 。根据引理 1, 通过对局部最优解下制造商利润的比较, 可得制造商的全局最优解。

命题 3 表 4 给出了模型 R3P 下制造商的最优解。其中, $l^{R3P*} \in (l_P^{R3P*}, l_N^{R3P*})$, $h_I^{R3P*} \in (l_P^{R3P*}, h_P^{R3P*})$, $h_{II}^{R3P*} \in (h_{F2}^{R3P*}, 1)$ (详见附录 C)。且当 $\delta = 0.5$ 时, 有 $h^{R3P*} = h_P^{R3P*} = h_{F2}^{R3P*}$, l^{R3P*} 和 l_P^{R3P*} 分别表示模型 R3P 的部分回收点和部分回收 (I 和 II) 的转折点, h^{R3P*} 、 h_I^{R3P*} 及 h_P^{R3P*} 分别表示当 $\delta = 0.5$ 、 $\delta < 0.5$ 及 $\delta > 0.5$ 时的全部回收点, h_{II}^{R3P*} 和 h_{F2}^{R3P*} 分别表示全部回收 (I 和 II) 的转折点。

根据引理 1 和命题 3 的证明过程以及结论可知: 1) 与模型 C 和模型 M3P 相比, 模型 R3P 中的决策最为分散, 其以旧换新回收策略的情况也更多。因此, 在模型 R3P 中, 各博弈方决策方案对环境的依赖性更明显; 2) 与模型 M3P 相似, 在模型 R3P 的部分回收点 l^{R3P*} 处, 不论是在不回收还是在部分回收的以旧换新策略下, 制造商所获利润

相同 ($\Pi_M^{R3P*} |_{N} = \Pi_M^{R3P*} |_{P}$), 而第三方回收商在部分回收策略时所获利润更大 ($\Pi_{3P}^{R3P*} |_{P} > \Pi_{3P}^{R3P*} |_{N}$), 这也使得在部分回收点处的最优解不连续; 3) 对于部分回收, 对应于不同的条件, 制造商有两种定价方案。在部分回收 I 下, 给定制造商的批发价格 w , 零售商在部分回收和不回收时所获利润相同 ($\Pi_R^{R3P*} |_{P}(w) = \Pi_R^{R3P*} |_{N}(w)$); 在部分回收 II 下, 给定制造商的批发价格 w , 零售商在部分回收的情况下比不回收的情况利润大 ($\Pi_R^{R3P*} |_{P}(w) > \Pi_R^{R3P*} |_{N}(w)$); 4) 对于全部回收, 当 $\delta = 0.5$, 仅有一种全部回收策略; 当 $\delta < 0.5$ 时, 制造商有两种定价方案。在全部回收 I 下, 给定制造商的批发价格 w , 零售商在全部回收 I 和全部回收 II 时所获利润相同 ($\Pi_R^{R3P*} |_{F1}(w) = \Pi_R^{R3P*} |_{F2}(w)$); 在全部回收 II 下, 给定制造商的批发价格 w , 零售商在全部回收 II 时所获利润更大 ($\Pi_R^{R3P*} |_{F2}(w) > \Pi_R^{R3P*} |_{F1}(w)$); 当 $\delta > 0.5$ 时, 制造商也有两种定价方案。在全部回收 I 下, 给定制造商的批发价格 w , 零售商在部分回收和全部回收 I 时所获利润相同 ($\Pi_R^{R3P*} |_{P}(w) = \Pi_R^{R3P*} |_{F1}(w)$); 在全部回收 II 下, 给定制造商的批发价格 w , 零售商在全部回收 II 时所获利润最大。

表4 模型 R3P 下制造商的均衡最优解

Table 4 Equilibrium optimal solution under model R3P

条件	不回收	部分回收 I	部分回收 II	全部回收 I	全部回收 II
$\delta = 0.5$	$b \leq l^{R3P^*}$	$l^{R3P^*} < b \leq l_P^{R3P^*}$	$l_P^{R3P^*} < b < h^{R3P^*}$	$b \geq h^{R3P^*}$	
	$w^{R3P^*} _{N1}$	$w^{R3P^*} _{P1}$	$w^{R3P^*} _{P2}$	$w^{R3P^*} _{F22}$	
$\delta < 0.5$	$b \leq l^{R3P^*}$	$l^{R3P^*} < b \leq l_P^{R3P^*}$	$l_P^{R3P^*} < b < h_1^{R3P^*}$	$h_1^{R3P^*} \leq b < h_{F2}^{R3P^*}$	$b \geq h_{F2}^{R3P^*}$
	$w^{R3P^*} _{N1}$	$w^{R3P^*} _{P1}$	$w^{R3P^*} _{P2}$	$w^{R3P^*} _{F21}$	$w^{R3P^*} _{F22}$
$\delta > 0.5$	$b \leq l^{R3P^*}$	$l^{R3P^*} < b \leq l_P^{R3P^*}$	$l_P^{R3P^*} < b < h_P^{R3P^*}$	$h_P^{R3P^*} \leq b < h_{II}^{R3P^*}$	$b \geq h_{II}^{R3P^*}$
	$w^{R3P^*} _{N1}$	$w^{R3P^*} _{P1}$	$w^{R3P^*} _{P2}$	$w^{R3P^*} _{P3}$	$w^{R3P^*} _{F22}$

注: 表中临界值后附加“ l_N ”, “ l_P ”及“ l_{F2} ”分别指当制造商预期零售商的决策为不回收、部分回收及全部回收 II 时的临界值, 而局部最优解后附加“ l_{Nn} ”, “ l_{Pn} ”及“ l_{F2n} ”分别指当制造商预期零售商的决策为不回收、部分回收及全部回收 II 时在第 n 个情形 (详见附录 C) 下的局部最优解。

3 模型比较分析

首先, 对 3 种基于以旧换新策略的闭环供应

链决策模型的部分回收点和全部回收点进行比较。

推论 1 3 种闭环供应链决策模型部分回收点和全部回收点排序如表 5 所示。

表 5 3 种闭环供应链部分回收点和全部回收点排序

Table 5 Comparisons among the partial collection points and the full collection points of the three CLSC decision models

条件	$0 < \delta < 0.5$	$\delta = 0.5$	$0.5 < \delta < 1$
部分回收点	$l^{C^*} < l^{M3P^*} < l^{R3P^*}$	$l^{C^*} < l^{M3P^*} < l^{R3P^*}$	$l^{C^*} < l^{M3P^*} < l^{R3P^*}$
全部回收点	$h^{C^*} < h_1^{R3P^*} < h_1^{M3P^*}$	$h^{C^*} < h_1^{M3P^*} = h^{R3P^*}$	$h^{C^*} < h_1^{M3P^*} < h_P^{R3P^*}$

对于部分回收点, 根据推论 1 可知集中决策进行以旧换新对应的 b 的临界值最小, 模型 M3P 次之, 模型 R3P 最大, 表明在基于以旧换新的决策模型中, 决策的分散使得以旧换新更不易采用。对全部回收点, 集中决策进行全部回收以旧换新所对应的 b 的临界值最小, 因此, 模型 C 更容易出现全部回收。比较两个分散决策模型, 当消费者对旧产品的评价折扣 $\delta < 0.5$, 即产品在第一阶段的折旧较大时, 全部回收的以旧换新在模型 R3P 中比在模型 M3P 中更容易出现; 当 $\delta = 0.5$ 时, 即产品在两阶段的折旧相等时, 模型 R3P 和模型 M3P 进行全部回收的条件相同; 当 $\delta > 0.5$ 时, 即产品在第一阶段的折旧较小时, 模型 M3P 比模型 R3P 更容易出现全部回收。

此外, 由于分散决策模型的最优决策受参数取值的影响较大, 无法从理论上对 3 种闭环供应链决策模型的经济效益和环境效益进行分析比较, 下面将通过数值实验来给出。在数值实验中, 令 $c_n = 0.45$, 并分别对 $\delta = 0.2$ 、 $\delta = 0.5$ 及 $\delta =$

0.8 进行数值实验。

由图 2 可知, 3 种决策模型中制造商利润排序为: $\Pi_M^{C^*} \geq \Pi_M^{M3P^*} > \Pi_M^{R3P^*}$ 。两个分散决策模型中第三方回收商利润排序为 $\Pi_{3P}^{M3P^*} \geq \Pi_{3P}^{R3P^*}$ 。3 种决策模型系统总利润的排序为 $\Pi_S^{C^*} \geq \Pi_S^{M3P^*} > \Pi_S^{R3P^*}$ 。

首先, 当 3 个闭环供应链中均采用不回收策略时 (即 $b \leq l^{C^*}$), 以旧换新均得不到消费者的响应, 无法实现供应链的闭环。此时, 模型 C 与模型 M3P 均为集中决策, 因此两模型中制造商和系统总利润均相等, 即 $\Pi_M^{C^*} = \Pi_M^{M3P^*} = \Pi_S^{C^*} = \Pi_S^{M3P^*}$ 。因第二阶段没有消费者返还旧产品, 第三方回收商在模型 M3P 和模型 R3P 中的利润均为 0, 即 $\Pi_{3P}^{M3P^*} = \Pi_{3P}^{R3P^*} = 0$ 。因模型 R3P 在正向物流上的决策为制造商与零售商的分散决策, 导致制造商的利润和系统总利润均低于模型 C 和模型 M3P, 即 $\Pi_M^{C^*} = \Pi_M^{M3P^*} > \Pi_M^{R3P^*}$ 且 $\Pi_S^{C^*} = \Pi_S^{M3P^*} > \Pi_S^{R3P^*}$ 。然而, 当仅模型 C 中制造商采取部分回收或者完全回收的以旧换新策略 (即 $l^{C^*} < b \leq$

l^{M3P^*}) 时, 模型 M3P 和模型 R3P 因仍没有产品以旧换新, 第三方回收商的利润均为 0, 而制造商及系统总利润均在模型 M3P 中更高, 而模型 C 中有旧产品被以旧换新, 使得制造商和系统总利润均比其他模型高, 即 $\Pi_M^{C^*} > \Pi_M^{M3P^*} > \Pi_M^{R3P^*}$, $\Pi_S^{C^*} > \Pi_S^{M3P^*} > \Pi_S^{R3P^*}$ 且 $\Pi_{3P}^{M3P^*} = \Pi_{3P}^{R3P^*} = 0$. 最后, 当模

型 M3P 采取回收策略(即 $b > l^{M3P^*}$) 时, 决策越分散的模型, 博弈方的利润越低, 即 $\Pi_M^{C^*} > \Pi_M^{M3P^*} > \Pi_M^{R3P^*}$, $\Pi_S^{C^*} > \Pi_S^{M3P^*} > \Pi_S^{R3P^*}$ 且 $\Pi_{3P}^{M3P^*} > \Pi_{3P}^{R3P^*}$. 总之, 决策的分散使得闭环供应链模型中各博弈方之间的竞争更激励, 从而导致他们的利润均受损, 并使系统总利润亦受损.

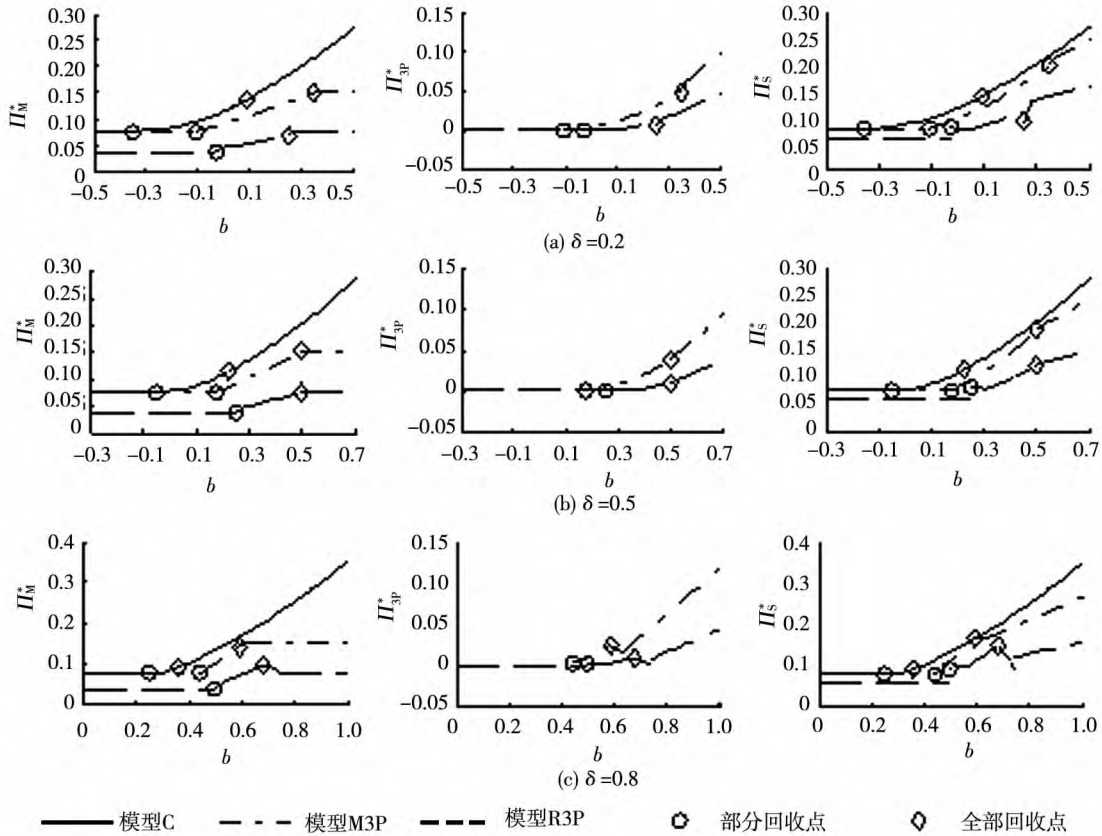


图 2 3 种闭环供应链决策模型下的 Π_M^* , Π_{3P}^* 及 Π_S^* 比较

Fig. 2 Comparisons of Π_M^* , Π_{3P}^* , and Π_S^* under the three closed-loop supply chain decision models

由图 3 可知, 3 种决策模型中两阶段总销售量和以旧换新量的排序为: 若 $b \leq l^{C^*}$, $q_n^{C^*} = q_n^{M3P^*} > q_n^{R3P^*}$ 且 $q_t^{C^*} = q_t^{M3P^*} > q_t^{R3P^*}$; 若 $b > l^{C^*}$, $q_n^{C^*} > q_n^{M3P^*} > q_n^{R3P^*}$ 且 $q_t^{C^*} > q_t^{M3P^*} > q_t^{R3P^*}$. 通过各模型最优解的进一步对比分析可以发现对于第二阶段旧产品继续使用量的排序, 存在 $\bar{b} \in (l^{C^*}, l^{R3P^*})$ 使得 $q_u^{R3P^*} |_N(b = \bar{b}) = q_u^{C^*} |_P(b = \bar{b})$. 若 $b \leq \bar{b}$, $q_u^{M3P^*} \geq q_u^{C^*} \geq q_u^{R3P^*}$. 若 $b > \bar{b}$, 第二阶段旧产品继续使用量的排序则取决于 δ 的大小: 当 $\delta < 0.5$ 时, $q_u^{M3P^*} \geq q_u^{R3P^*} \geq q_u^{C^*}$; 当 $\delta = 0.5$ 时, $q_u^{M3P^*} = q_u^{R3P^*} \geq q_u^{C^*}$; 当 $\delta > 0.5$ 时, 若 $\bar{b} < b \leq l^{R3P^*}$, $q_u^{M3P^*} > q_u^{R3P^*} > q_u^{C^*}$; 若 $b > l^{R3P^*}$, $q_u^{R3P^*} \geq$

$$q_u^{M3P^*} \geq q_u^{C^*}.$$

首先, 对于新产品销售量 q_n^* 和以旧换新量 q_t^* , 类似于上述制造商和系统总利润的比较, 闭环供应链的决策越分散, 竞争越激烈, 销售量和以旧换新量均越少. 其次, 对于第二阶段旧产品的继续使用量 q_u^* , 其比较结果取决于消费者对旧产品的评价折扣 δ 以及以旧换新单位直接收益 b . 此外, 根据图 3, 还可发现在模型 M3P 和模型 R3P 的部分回收点附近, 从采取不回收到采取部分回收, 旧产品的继续使用量并不一定因为以旧换新的出现而减少, 而可能会因为销售量的急剧增加而增加.

从环境效益分析, 简单的回收量并不能够完

全刻画闭环供应链模型的环境效益. 因此, 本文使用全生命周期评估方法(LCA)对各闭环供应链决策模型的环境效益进行评估和比较. 根据全生命周期评估方法, 各闭环供应链模型对环境的总影响取决于产品的生命周期的各个环节(主要包括生产、使用和处理)对环境的单位影响^[3]. 根据Agrawal等^[3]所使用的产品对环境总影响的计算公式, 同样可以给出在以旧换新的情形下产品对环境的总影响公式

$$E = (i_p + i_d + i_{u1}) q_n + i_{u2} q_u \quad (11)$$

其中 i_p , i_d , i_{u1} 及 i_{u2} 分别指产品在生产、处理、新使用及继续使用时对环境所产生的单位影响, 且一般有 $i_{u2} > i_{u1}$ ^[2, 3]. 结合 q_n^* 和 q_u^* 的关系, 可以从环境效益的角度对3种闭环供应链模型进行比较.

首先, 比较模型 M3P 和模型 C. 1) 若 $b \leq l^{C^*}$, 两决策模型均采纳不回收策略, 新产品在两

阶段的销售量和旧产品继续使用量均相同, 因此两模型对环境的总影响也相同; 2) 若 $l^{C^*} < b < h_1^{M3P^*}$, 有 $q_n^{C^*} > q_n^{M3P^*}$ 和 $q_u^{M3P^*} > q_u^{C^*}$, 可知第三回收商参与回收虽然减少了新产品在两阶段的销售总量而使得模型 M3P 在生产、处理及新使用阶段对环境的影响比模型 C 小, 但却增加了旧产品的继续使用阶段对环境的影响. 这表明: 对 $l^{C^*} < b < h_1^{M3P^*}$, 当产品继续使用阶段对环境的影响相对生产阶段、产品处理阶段及产品新使用阶段对环境的影响较低时(如家具、自行车、手机、笔记本电脑等)模型 M3P 对环境的总影响会比模型 C 小; 否则, 模型 M3P 对环境的总影响会比模型 C 大(如汽车、家电、台式电脑等); 3) 若 $b \geq h_1^{M3P^*}$, 两决策模型均全部回收, 第二阶段不存在继续使用的旧产品, 因此环境效益的比较取决于新产品的销售量, 由 $q_n^{C^*} > q_n^{M3P^*}$ 可知模型 C 对环境的总影响比模型 M3P 大.

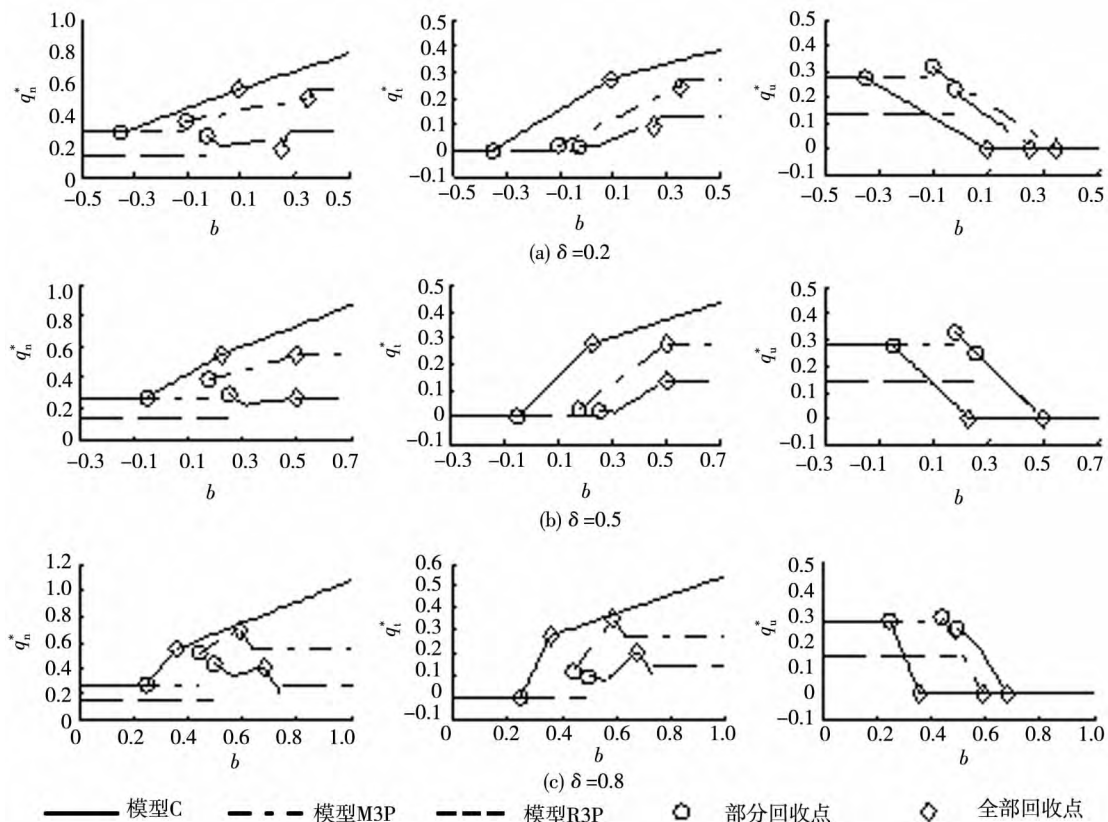


图3 3种闭环供应链决策模型下的 q_n^* 、 q_t^* 及 q_u^* 比较

Fig. 3 Comparisons of q_n^* , q_t^* , and q_u^* under the three closed-loop supply chain decision models

其次, 比较模型 R3P 和模型 C. 对于新产品销售量, 集中决策使得模型 C 的销售量更多, 即对

不同的 b 均有 $q_n^{C^*} > q_n^{R3P^*}$. 1) 若 $b \leq \bar{b}$ ($\bar{b} \in (l^{C^*}, l^{R3P^*})$) 模型 R3P 采纳不回收策略时, 模型 C 中制造商采纳不回收策略 ($b \leq l^{C^*}$) 或部分回收策略 ($l^{C^*} < b < \bar{b}$). 在模型 C 不回收情形下新产品销售量更多, 旧产品继续使用量也更多. 而在模型 C 部分回收情形下, 尽管以旧换新使得模型 C 的旧产品继续使用量降低, 但相对于两决策模型销量的差值, 模型 C 以旧换新量很小, 不足以使旧产品的继续使用量比模型 R3P 小, 即有 $q_u^{C^*} \geq q_u^{R3P^*}$, 故此, 对 $b \leq \bar{b}$ 模型 C 对环境的总影响比模型 R3P 大; 2) 若 $\bar{b} < b < h^{R3P^*}$, 与模型 M3P 和模型 C 在 $l^{C^*} < b < h_t^{M3P^*}$ 条件下对环境总影响的关系相似, 当产品继续使用阶段对环境的影响相对生产阶段、产品处理阶段及产品新使用阶段对环境的影响较低时, 模型 R3P 对环境的总影响会比模型 C 小; 否则, 模型 R3P 对环境的总影响会比模型 C 大; 3) 若 $b \geq h^{R3P^*}$, 两决策模型均全部回收, 由 $q_n^{C^*} > q_n^{R3P^*}$, 因此, 模型 C 对环境的总影响比模型 R3P 大.

最后, 比较两个分散决策模型, 即模型 R3P 和模型 M3P. 对于销售量, 正向物流的集中决策使得模型 M3P 的新产品销量更多, 即对不同的 b 均有 $q_n^{M3P^*} > q_n^{R3P^*}$. 对于旧产品继续使用量, 两模型比较还取决于 δ . 考虑 $\delta \leq 0.5$ 时, 对不同的 b 均有 $q_u^{M3P^*} \geq q_u^{R3P^*}$, 因此, 模型 M3P 对环境的总影响比模型 R3P 大. 考虑 $\delta > 0.5$ 时, 1) 若 $b \leq l^{R3P^*}$, 有 $q_u^{M3P^*} > q_u^{R3P^*}$, 因此, 模型 M3P 对环境的总影响比模型 R3P 大; 2) 若在 $l^{R3P^*} < b < h_p^{R3P^*}$, 有 $q_u^{M3P^*} < q_u^{R3P^*}$, 当产品继续使用阶段对环境的影响相对生产阶段、产品处理阶段及产品新使用阶段对环境的影响较低时, 模型 R3P 对环境的总影响会比模型 M3P 小, 否则, 模型 R3P 对环境的总影响会比模型 M3P 大; 3) 若 $b \geq h_p^{R3P^*}$, 两决策模型均全部回收, 由 $q_n^{M3P^*} > q_n^{R3P^*}$, 因此, 模型 M3P 对环境的总影响比模型 R3P 大.

4 结束语

本文通过构建基于以旧换新的 3 种闭环供应

链决策模型, 包括集中决策(模型 C)、制造商销售第三方回收商回收(模型 M3P)、零售商销售第三方回收商回收(模型 R3P), 得到各自进行不回收、部分回收及全部回收情形下的条件和最优解. 通过对部分回收点的比较可发现决策越集中, 企业进行以旧换新的可能性越大. 通过对全部回收点的比较可发现模型 C 最容易出现全部回收的以旧换新, 而两个分散决策模型比较则取决于产品的折旧速度: 若 $\delta < 0.5$, 即产品在第一阶段的折旧较大时, 模型 R3P 比模型 M3P 更容易出现全部回收; 若 $\delta > 0.5$ 时, 即产品在第一阶段的折旧较小时, 模型 M3P 比模型 R3P 更容易出现全部回收; 若 $\delta = 0.5$ 时, 即产品在两阶段的折旧相等时, 他们出现全部回收的条件相同. 此外, 通过数值实验分析了 3 种闭环供应链模型在经济效益和环境效益的优劣势, 为企业以及政府决策者提供决策依据. 首先, 从经济效益的角度, 决策模型越分散导致垂直竞争越激烈, 制造商、第三方回收商及整个闭环供应链系统的利润也越少, 即模型 C 中制造商利润和系统总利润最大, 模型 M3P 次之, 模型 R3P 最小, 且模型 R3P 中第三方回收商的利润亦没有模型 M3P 高. 其次, 从环境效益的角度, 根据生命周期评估方法, 本文发现基于以旧换新的闭环供应链对环境的影响主要取决于新产品在两阶段的总销售量, 旧产品在第二阶段的继续使用量以及产品继续使用阶段对环境的影响相对生产阶段、产品处理阶段及产品新使用阶段对环境的影响的大小. 在不回收或者完全回收为最优策略的情形下, 决策模型的决策越集中, 对环境的总影响越大. 在部分回收为最优策略的情形下, 当产品继续使用阶段对环境的影响相对生产阶段、产品处理阶段及产品新使用阶段对环境的影响较低时, 决策模型的决策越集中, 其对环境的总影响可能就越大; 否则, 决策模型的决策越集中, 其对环境的总影响可能就越小.

本文所使用是静态博弈, 然而两阶段产品生命周期的问题利用动态博弈进行分析更为复杂, 今后的研究工作将会在这个方面进一步研究. 此外, 本文也未考虑以旧换新与产品升级换代之间的相互关系, 这也将是今后的一个重要研究方向.

参考文献:

- [1] Guide Jr V D R, Van Wassenhove L N. The evolution of closed-loop supply chain research [J]. *Operation Research*, 2009, 57(1): 10–18.
- [2] Gutowski T G, Sahni S, Boustani A. Remanufacturing and energy savings [J]. *Environment Science Technology*, 2011, 45(10): 4540–4547.
- [3] Agrawal V V, Ferguson M, Toktay L B. Is leasing greener than selling? [J]. *Management Science*, 2012, 58(3): 523–533.
- [4] Thierry M, Salomon M, Van Nunen J. Strategic issues in product recovery [J]. *Management California Management Review*, 1995, 37(2): 114–135.
- [5] Atasu A, Sarvary M, Van Wassenhove L N. Remanufacturing as a marketing strategy [J]. *Management Science*, 2008, 54(10): 1731–1746.
- [6] Guide Jr V D R, Jayaraman V, Srivastava R. Supply-chain management for recoverable manufacturing systems [J]. *Interfaces*, 2000, 30(3): 125–142.
- [7] Guide Jr V D R, Teunter R H, Van Wassenhove L N. Matching demand and supply to maximize profits from remanufacturing [J]. *Management & Service Operations Management*, 2003, 5(4): 303–316.
- [8] Savaskan R C, Bhattacharya S, Van Wassenhove L N. Closed-loop supply chain models with product remanufacturing [J]. *Management Science*, 2004, 50(2): 239–252.
- [9] 计国君, 黄位旺. WEEE 回收条例有效实施问题研究 [J]. *管理科学学报*, 2012, 15(5): 1–9.
Ji Guojun, Huang Weiwang. Effective implement of WEEE take-back directive [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2012, 15(5): 1–9. (in Chinese)
- [10] 聂佳佳. 零售商信息分享对闭环供应链回收模式的影响 [J]. *管理科学学报*, 2013, 16(5): 69–82.
Nie Jiajia. Effects of retailer information sharing on collecting modes of closed-loop supply chain [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2013, 16(5): 69–82. (in Chinese)
- [11] 计国君, 黄位旺. 回收条例约束下的再制造供应链决策 [J]. *系统工程理论与实践*, 2010, 30(8): 1355–1362.
Ji Guojun, Huang Weiwang. Remanufacturing supply chain decision under the constraints of take-back laws [J]. *System Engineering-Theory & Practice*, 2010, 30(8): 1355–1362. (in Chinese)
- [12] Atasu A, Ozdemir O, Van Wassenhove L N. Stakeholder perspectives on e-waste take-back legislation [J]. *Production and Operations Management*, 2013, 22(2): 382–396.
- [13] Ovchinnikov A. Revenue and cost management for remanufactured products [J]. *Production and Operations Management*, 2011, 20(6): 824–840.
- [14] 李响, 李勇建, 蔡小强. 随机产率和随机需求下的再制造系统的回收定价决策 [J]. *系统工程理论与实践*, 2009, 29(8): 19–27.
Li Xiang, Li Yongjian, Cai Xiaoqiang. Collection pricing decision in a remanufacturable system considering random yield and random demand [J]. *System Engineering-Theory & Practice*, 2009, 29(8): 19–27. (in Chinese)
- [15] Okada E M. Trade-ins, mental accounting, and product replacement decisions [J]. *Journal of Consumer Research*, 2001, (27): 433–446.
- [16] Kim J, Rao R S, Kim K, et al. More or less: A model and empirical evidence on preferences for under- and overpayment in trade-in transactions [J]. *Journal of Marketing Research*, 2011, 48(2): 157–171.
- [17] Li K J, Fong D K H, Xu S H. Managing trade-in programs based on product characteristics and customer heterogeneity in business-to-business markets [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2011, 13(1): 108–123.
- [18] Kwon O, Dukes A J, Siddarth S, et al. The informational role of product trade-ins for pricing durable goods [J]. *The Jour-*

- nal of Industrial Economics ,2015 ,63(4) : 736 – 762.
- [19] Yin S Y , Ray S , Gurnani H. Durable products with multiple used goods markets: Product upgrade and retail pricing implications [J]. Marketing Science ,2010 ,29(3) : 540 – 560.
- [20] Rao R S , Narasimhan O , John G. Understanding the role of trade-ins in durable goods markets: Theory and evidence [J]. Marketing Science ,2009 ,28(5) : 950 – 967.
- [21] 马卫民,赵璋. 以旧换新补贴对不同模式闭环供应链的影响 [J]. 系统工程理论与实践,2012,32(9) : 1938 – 1944.
- Ma Weimin , Zhao Zhang. Different models of closed-loop supply chain with the government replacement-subsidy [J]. System Engineering-Theory & Practice ,2012 ,32(9) : 1938 – 1944. (in Chinese)
- [22] 易余胤,袁江. 渠道冲突环境下的闭环供应链协调定价模型 [J]. 管理科学学报,2012,15(1) : 54 – 65.
- Yi Yuyin , Yuan Jiang. Pricing coordination of closed-loop supply chain in channel conflicts environment [J]. Journal of Management Sciences in China ,2012 ,15(1) : 54 – 65. (in Chinese)
- [23] 朱庆华,窦一杰. 基于政府补贴分析的绿色供应链管理博弈模型 [J]. 管理科学学报,2011,14(6) : 86 – 95.
- Zhu Qinghua , Dou Yijie. A game model for green supply chain management based on government subsidies [J]. Journal of Management Sciences in China ,2011 ,14(6) : 86 – 95. (in Chinese)
- [24] 范体军,楼高翔,王晨岚,等. 基于绿色再制造的废旧产品回收外包决策分析 [J]. 管理科学学报,2011,14(8) : 8 – 16.
- Fan Tijun , Lou Gaoxiang , Wang Chenlan , et al. Analysis of outsourcing decision-making on used products collection for green remanufacturing [J]. Journal of Management Sciences in China ,2011 ,14(8) : 8 – 16. (in Chinese)
- [25] 晏妮娜,黄小原. 基于第3方逆向物流的闭环供应链模型及应用 [J]. 管理科学学报,2008,11(4) : 83 – 93.
- Yan Nina , Huang Xiaoyuan. Models of closed-loop supply chain with third-party reverse logistics and their applications [J]. Journal of Management Sciences in China ,2008 ,11(4) : 83 – 93. (in Chinese)
- [26] 熊中楷,王凯,熊榆. 经销商从事再制造的闭环供应链模式研究 [J]. 管理科学学报,2011,14(11) : 1 – 9.
- Xiong Zhongkai , Wang Kai , Xiong Yu. Research on the closed-loop supply chain that the distributor engages in remanufacturing [J]. Journal of Management Sciences in China ,2011 ,14(11) : 1 – 9. (in Chinese)

Decision models for closed-loop supply chains with trade-ins

MIAO Zhao-wei , XIA Zhi-qiang

School of Management , Xiamen University , Xiamen 361005 , China

Abstract: This paper develops three decision models for closed-loop supply chains(CLSC) with trade-ins , including the centralized decision model (model C) , the manufacturer selling and the third-party collecting model (model M3P) , and the retailer selling and the third-party collecting model (model R3P) , and investigates the optimal pricing and collection strategies for each model. The theoretical analysis and numerical experiments show that , in terms of the profits obtained by the manufacturer and the whole supply chain , model C dominates model M3P and model M3P dominates model R3P; in terms of the third-party collector's profits , model M3P dominates model R3P. However , in terms of environmental performance , none of them dominates the others according to the life-cycle assessment methodology.

Key words: closed-loop supply chain; trade-in; collection policy; life-cycle assessment

附录:

A 命题 1 证明

集中决策模型中, 利润函数的海塞矩阵为

$$H_M^C = \begin{bmatrix} -\frac{2(2-\delta)}{1-\delta} & \frac{2}{1-\delta} \\ \frac{2}{1-\delta} & -\frac{2}{1-\delta} \end{bmatrix}$$

其行列式为 $|H_M^C| = \frac{4}{1-\delta} > 0$ 且 $-\frac{2(2-\delta)}{1-\delta} < 0$, 因此制造商的最优化问题为凹规划问题, 存在最优解使利润最大化. 定义相应的拉格朗日函数为 $L_M^C = (p_n - c_n) q_n + (c_s - p_t) q_t + \lambda_{M1}^C q_t + \lambda_{M2}^C (q_{1n} - q_t)$. 库恩·塔克条件为 $\frac{\partial L_M^C}{\partial p_n} = \frac{\partial L_M^C}{\partial p_t} = \frac{\partial L_M^C}{\partial \lambda_{M1}^C} = \frac{\partial L_M^C}{\partial \lambda_{M2}^C} = 0$ 且 $q_t \geq 0, q_{1n} \geq q_t, \lambda_{M1}^C \geq 0, \lambda_{M2}^C \geq 0$. 因 $q_{1n} = q_t = 0$ 不能对所有参数成立, 可考虑以下 3 种情形.

1) $\lambda_{M1}^C = \lambda_{M2}^C = 0$. 求解库恩·塔克条件知最优决策为 $p_n^{C*} = \frac{1+c_n}{2}$ 和 $p_t^{C*} = \frac{c_s - s_t + \delta}{2}$, 代入式 (1) ~ 式 (4) 及利润函数, 可得到正文表 1 中部分回收时所示均衡最优值. 根据 $q_t^{C*} > 0$ 和 $q_{1n}^{C*} > q_t^{C*}$, 可知部分回收的条件为 $c_n + \delta - 1 < b < \delta c_n$.

2) $\lambda_{M2}^C > \lambda_{M1}^C = 0, \lambda_{M2}^C > 0$ 表明 $q_{1n} = q_t$, 求解库恩·塔克条件知最优决策为 $p_n^{C*} = \frac{1+c_n}{2} - \frac{b-\delta c_n}{2(2-\delta)}, p_t^{C*} = \frac{c_s - s_t + \delta}{2} - \frac{b-\delta c_n}{2-\delta}$, 且 $\lambda_{M2}^C = \frac{b-\delta c_n}{2-\delta}$, 代入式 (1) ~ 式 (4) 及利润函数, 可得到正文表 1 中全部回收时所示均衡最优值. 根据 $q_t^{C*} \geq 0$ 和 $\lambda_{M2}^C > 0$, 可知此情形成立的条件为 $b \geq 2c_n - 2 + \delta$ 和 $b > \delta c_n$, 因此全部回收的条件为 $b \geq \delta c_n$.

3) $\lambda_{M1}^C > \lambda_{M2}^C = 0, \lambda_{M1}^C > 0$ 表明 $q_{2t} = 0$, 求解库恩·塔克条件知最优决策为 $p_n^{C*} = \frac{1+c_n}{2}, p_t^{C*} = \delta - s_t - \frac{1-c_n}{2}$, 且 $\lambda_{M1}^C = c_n + \delta - b - 1$, 代入式 (1) ~ 式 (4) 及利润函数, 可得到正文表 1 中不回收时所示均衡最优值. 根据 $\lambda_{M1}^C > 0$ 和 $q_{1n}^{C*} \geq q_t^{C*}$, 可知此情形成立的条件为 $b < c_n + \delta - 1$ 且 $c_n \leq 1$ (总成立), 因此不回收的条件为 $b \leq c_n + \delta - 1$.

B 命题 2 证明

第三方回收商最优化决策 模型 M3P 中, 第三方回收商利润关于 p_n 的二阶导为 $\frac{d^2 \Pi_{3P}^{M3P}}{d p_n^2} = -\frac{2}{1-\delta} < 0$ 存在最优解. 拉格朗日函数定义为 $L_{3P}^{M3P} = (c_s - p_t) q_t + \lambda_{3P1}^{M3P} q_t + \lambda_{3P2}^{M3P} (q_{1n} - q_t)$. 库恩·塔克条件为 $\frac{\partial L_{3P}^{M3P}}{\partial p_t} = \frac{\partial L_{3P}^{M3P}}{\partial \lambda_{3P1}^{M3P}} = \frac{\partial L_{3P}^{M3P}}{\partial \lambda_{3P2}^{M3P}} = 0$ 且 $0 \leq q_{2t} \leq q_{1n}, \lambda_{3P1}^{M3P} \geq 0, \lambda_{3P2}^{M3P} \geq 0$. 考虑以下

3 种情形.

1) $\lambda_{3P1}^{M3P} = \lambda_{3P2}^{M3P} = 0$. 求解库恩·塔克条件知第三方回收商最优决策为 $p_t^{M3P*} (p_n) = \frac{c_s - s_t + \delta + p_n - 1}{2}$, 代入式 (1) ~ 式 (4) 及利润函数, 可得此情形所对应的子博弈最优值. 此情形成立的条件为 $q_t^{M3P*} (p_n) \geq 0$ 且 $q_{1n}^{M3P*} (p_n) \geq q_t^{M3P*} (p_n)$.

2) $\lambda_{3P2}^{M3P} > \lambda_{3P1}^{M3P}, \lambda_{3P1}^{M3P} = 0, \lambda_{3P2}^{M3P} > 0$ 表明 $q_{1n} = q_t$, 求解库恩·塔克条件知第三方回收商最优决策为 $p_t^{M3P*} (p_n) = \delta p_n - s_t$ 且 $\lambda_{3P2}^{M3P} (p_n) = (1-2\delta) p_n + b - 1 + \delta$, 代入式 (1) ~ 式 (4) 及利润函数, 可得此情形所对应的子博弈最优值. 此情形成立的条件为 $\lambda_{3P2}^{M3P} (p_n) > 0$ 且 $q_t^{M3P*} (p_n) \geq 0$.

3) $\lambda_{3P1}^{M3P} > \lambda_{3P2}^{M3P}, \lambda_{3P2}^{M3P} = 0, \lambda_{3P1}^{M3P} > 0$ 表明 $q_{2t} = 0$, 求解库恩·塔克条件知第三方回收商最优决策为 $p_t^{M3P*} (p_n) = p_n - s_t - 1 + \delta$ 且 $\lambda_{3P1}^{M3P} (p_n) = p_n - b - 1 + \delta$, 代入式 (1) ~ 式 (4) 及利润函数, 可得到此情形所对应的子博弈最优值. 此情形成立的条件为 $\lambda_{3P1}^{M3P} (p_n) > 0$ 且 $q_{1n}^{M3P*} (p_n) \geq q_t^{M3P*} (p_n)$.

制造商最优化决策 考虑到第三方回收商在 3 种情形下的最优决策不同, 分别讨论在各种情形下制造商的最优化决策.

1) $\lambda_{3P1}^{M3P*} (p_n) = \lambda_{3P2}^{M3P*} (p_n) = 0 (0 \leq q_t^{M3P*} (p_n) \leq q_{1n}^{M3P*} (p_n))$

根据第三方回收商部分回收决策下的子博弈最优值, 制造商利润函数关于 p_n 的二阶导为 $\frac{d^2 \Pi_M^{M3P}}{d p_n^2} = \frac{3-2\delta}{1-\delta} < 0$, 存在最优解. 拉格朗日函数为 $L_M^{M3P} = (p_n - c_n) \times q_n^{M3P*} (p_n) + \lambda_{M1}^{M3P} q_t^{M3P*} (p_n) + \lambda_{M2}^{M3P} (q_{1n}^{M3P*} (p_n) - q_t^{M3P*} (p_n))$. 库恩·塔克条件为 $\frac{\partial L_M^{M3P}}{\partial p_n} = \frac{\partial L_M^{M3P}}{\partial \lambda_{M1}^{M3P}} = \frac{\partial L_M^{M3P}}{\partial \lambda_{M2}^{M3P}} = 0$ 且 $0 \leq q_t^{M3P*} (p_n) \leq q_{1n}^{M3P*} (p_n), \lambda_{M1}^{M3P} \geq 0, \lambda_{M2}^{M3P} \geq 0$. 考虑以下 3 种情形.

① $\lambda_{M1}^{M3P} = \lambda_{M2}^{M3P} = 0$. 求解库恩·塔克条件得制造商的最优决策为 $p_n^{M3P*} = \frac{3(1-\delta) + (3-2\delta) c_n + b}{2(3-2\delta)}$, 代入第三方

回收商反应函数可得 $p_t^{M3P*} = \frac{(7-4\delta) c_s - (5-4\delta) s_t - (1-\delta)(3-4\delta) - (3-2\delta) c_n}{4(3-2\delta)}$. 再代入式 (1) ~ 式 (4) 及利润函数, 可得此情形下的均衡最优值. 根据 $q_t^{M3P*} \geq 0$ 和 $q_{1n}^{M3P*} \geq q_t^{M3P*}$ 可知此情形成立的条件为 $\frac{(3-2\delta) c_n - (1-\delta)(3-4\delta)}{5-4\delta} \leq b \leq \frac{(1-\delta)(3+2\delta) - (1-2\delta)(3-2\delta) c_n}{7-6\delta}$.

② $\lambda_{M2}^{M3P} > \lambda_{M1}^{M3P}, \lambda_{M1}^{M3P} = 0, \lambda_{M2}^{M3P} > 0$ 表明 $q_t^{M3P*} (p_n) =$

$q_{1n}^{M3P*}(p_n)$ 求解库恩·塔克条件知最优决策为 $p_n^{M3P*} = \frac{1-\delta-b}{1-2\delta}$ 代入第三方回收商反应函数可得 $p_t^{M3P*} = \frac{(1-\delta)(\delta-s_t)-\delta c_s}{1-2\delta}$. 再代入式(1)~式(4)及利润函数, 可得此情形下的均衡最优值. 根据 $q_t^{M3P*} \geq 0$ 和 $\lambda_{M2}^{M3P*} > 0$, 可知, 此情形成立的条件为 $\frac{b-\delta}{1-2\delta} \geq 0$ 且 $b > \frac{(1-\delta)(3+2\delta)-(1-2\delta)(3-2\delta)c_n}{7-6\delta}$.

③ $\lambda_{M1}^{M3P} > \lambda_{M2}^{M3P}, \lambda_{M2}^{M3P} = 0, \lambda_{M1}^{M3P} > 0$ 表明 $q_t^{M3P*}(p_n) = 0$ 求解库恩·塔克条件知最优决策为 $p_n^{M3P*} = 1-\delta-b$, 代入第三方回收商反应函数可得 $p_t^{M3P*} = c_s$. 再代入式(1)~式(4)及利润函数, 可得此情形下的均衡最优值. 根据 $q_{1n}^{M3P*} \geq q_t^{M3P*}$ 和 $\lambda_{M1}^{M3P*} > 0$, 可知, 此情形成立的条件为 $b < \delta$ 且 $b < \frac{(3-2\delta)c_n - (1-\delta)(3-4\delta)}{5-4\delta}$.

2) $\lambda_{3P2}^{M3P*}(p_n) \geq \lambda_{3P1}^{M3P*}(p_n), \lambda_{3P1}^{M3P*}(p_n) = 0 (0 \leq q_t^{M3P*}(p_n) = q_{1n}^{M3P*}(p_n))$

根据零售商全部回收决策下的子博弈最优值, 制造商利润函数关于 p_n 的二阶导为 $\frac{d^2 \Pi_M^{M3P}}{dp_n^2} = -4 < 0$, 存在最优解. 拉格朗日函数为 $L_M^{M3P} = (p_n - c_n) q_n^{M3P*}(p_n) + \lambda_{M1}^{M3P} \times \lambda_{3P2}^{M3P*}(p_n)$. 库恩·塔克条件为 $\frac{\partial L_M^{M3P}}{\partial p_n} = \frac{\partial L_M^{M3P}}{\partial \lambda_{M1}^{M3P}} = 0, \lambda_{3P2}^{M3P*}(p_n) \geq 0$ 及 $\lambda_{M1}^{M3P} \geq 0$. 考虑以下两种情形.

① $\lambda_{M1}^{M3P} = 0$. 求解库恩·塔克条件得制造商的最优决策为 $p_n^{M3P*} = \frac{1+c_n}{2}$ 且 $\lambda_{M1}^{M3P*} = \frac{2\delta c_n - c_n + 1}{2}$, 代入第三方回收商反应函数可得 $p_t^{M3P*} = \frac{\delta(1+c_n) - 2s_t}{2}$. 再代入式(1)~式(4)及利润函数, 可得此情形下的均衡最优值. 根据 $\lambda_{3P2}^{M3P*}(p_n) \geq 0$, 可知, 此情形成立的条件为 $b \geq \frac{2\delta c_n - c_n + 1}{2}$.

② $\lambda_{M1}^{M3P} > 0, \lambda_{M2}^{M3P} > 0$ 表明 $\lambda_{3P2}^{M3P*}(p_n) = 0$ 求解库恩·塔克条件知最优决策为 $p_n^{M3P*} = \frac{1-\delta-b}{1-2\delta}$, 代入第三方回收商反应函数可得 $p_t^{M3P*} = \frac{(1-\delta)(\delta-s_t) - \delta c_s}{1-2\delta}$. 再代入式(1)~式(4)及利润函数, 可得此情形下的均衡最优值. 根据 $\lambda_{3P2}^{M3P*} > 0$ 和 $q_t^{M3P*}(p_n) \geq 0$, 可知, 此情形成立的条件为 $\frac{b-\delta}{1-2\delta} \geq 0$ 且 $b < \frac{2\delta c_n - c_n + 1}{2}$. 此情形与情形 1) 的②相同.

3) $\lambda_{3P1}^{M3P*}(p_n) \geq \lambda_{3P2}^{M3P*}(p_n), \lambda_{3P2}^{M3P*}(p_n) = 0 (0 = q_t^{M3P*}(p_n) = q_{1n}^{M3P*}(p_n))$

根据零售商全部回收决策下的子博弈最优值, 制造商利润函数关于 p_n 的二阶导为 $\frac{d^2 \Pi_M^{M3P}}{dp_n^2} = -2 < 0$, 存在最优解. 拉格朗日函数为 $L_M^{M3P} = (p_n - c_n) q_n^{M3P*}(p_n) + \lambda_{M1}^{M3P} \times \lambda_{3P1}^{M3P*}(p_n)$. 库恩·塔克条件为 $\frac{\partial L_M^{M3P}}{\partial p_n} = \frac{\partial L_M^{M3P}}{\partial \lambda_{M1}^{M3P}} = 0, \lambda_{3P1}^{M3P*}(p_n) \geq 0$ 及 $\lambda_{M1}^{M3P} \geq 0$. 考虑以下两种情形.

① $\lambda_{M1}^{M3P} = 0$. 求解库恩·塔克条件得制造商的最优决策为 $p_n^{M3P*} = \frac{1+c_n}{2}$, 代入第三方回收商反应函数可得 $p_t^{M3P*} = \frac{2(\delta-s_t) - 1+c_n}{2}$. 再代入式(1)~式(4)及利润函数, 可得均衡最优值. 由 $\lambda_{3P1}^{M3P*}(p_n) \geq 0$, 知此情形成立的条件为 $b \geq \frac{2\delta+c_n-1}{2}$.

② $\lambda_{M1}^{M3P} > 0, \lambda_{M2}^{M3P} > 0$ 表明 $\lambda_{3P2}^{M3P*}(p_n) = 0$ 求解库恩·塔克条件知最优决策为 $p_n^{M3P*} = 1-\delta-b$, 代入第三方回收商反应函数可得 $p_t^{M3P*} = c_s$. 再代入式(1)~式(4)及利润函数, 可得此情形下的均衡最优值. 根据 $\lambda_{M2}^{M3P*} > 0$, 可知, 此情形成立的条件为 $b < \frac{2\delta+c_n-1}{2}$. 此情形与情形 1) 的③相同.

综上, 由 $\frac{(3-2\delta)c_n - (1-\delta)(3-4\delta)}{5-4\delta} - \frac{2\delta+c_n-1}{2} = -\frac{1-c_n}{2(5-4\delta)} < 0$, 可知对制造商存在 $l^{M3P*} \in \left(\frac{(3-2\delta)c_n - (1-\delta)(3-4\delta)}{5-4\delta}, \frac{2\delta+c_n-1}{2} \right)$, 使得不回收(情形 3)的①和部分回收(情形 1)的①所获利润相同, 即 $\Pi_M^{M3P*}(b = l^{M3P*})|_{1)①} = \Pi_M^{M3P*}(b = l^{M3P*})|_{3)①}$ 得 $l^{M3P*} = \frac{(3-2\delta)c_n - 3(1-\delta) + A(1-c_n)}{A}, A = \sqrt{2(3-2\delta)(1-\delta)}$. 又 $\frac{(1-\delta)(3+2\delta) - (1-2\delta)(3-2\delta)c_n}{7-6\delta} - \frac{2\delta c_n - c_n + 1}{2} = \frac{(1-2\delta)^2(1-c_n)}{2(7-6\delta)} \leq 0$. 若 $\delta \neq \frac{1}{2}$, 对 $b \leq l^{M3P*}$ 情形(3)的 1) 给出不回收时的最优解; 对 $l^{M3P*} < b < \frac{(1-\delta)(3+2\delta) - (1-2\delta)(3-2\delta)c_n}{7-6\delta}$ 情形 1) 的①给出部分回收时的最优解; 对 $\frac{(1-\delta)(3+2\delta) - (1-2\delta)(3-2\delta)c_n}{7-6\delta} \leq b < \frac{2\delta c_n - c_n + 1}{2}$, 情形 1) 的②(或情形 2) 的②) 给出全部回收 I 的最优解; 对 $b \geq \frac{2\delta c_n - c_n + 1}{2}$, 情形 2) 的①给出全部回收 II 的最优解. 若 $\delta = \frac{1}{2}$, 则在第三方回收商进行部分回收时所决策的旧产品继续使用量 $q_u^{M3P*} = \frac{(2\delta-1)p_n - b + 1 - \delta}{2(1-\delta)}$

与价格无关 此时情形 1) 的②及情形 2) 的②均不存在 则对 $b \leq l^{M3P^*}$ 情形 3) 的①给出不回收时的最优解; 对 $l^{M3P^*} < b < \frac{(1-\delta)(3+2\delta) - (1-2\delta)(3-2\delta)c_n}{7-6\delta}$ 情形 1) 的①给出部分回收时的最优解; 对 $\frac{(1-\delta)(3+2\delta) - (1-2\delta)(3-2\delta)c_n}{7-6\delta} = \frac{2\delta c_n - c_n + 1}{2} = \frac{1}{2} \leq b < \frac{2\delta c_n - c_n + 1}{2}$ 情形 2) 的①给出全部回收的最优解.

C 引理 1 证明及命题 3 证明

通过对模型 R3P 和模型 M3P 中最优化问题的比较, 可知在模型 R3P 中第三方回收商的子博弈最优解与模型 R3P 中的第三方回收商的相同, 而零售商的子博弈最优解与模型 R3P 中的制造商相似且仅需将其中的参数 c_n 换成变量 w , 即为模型 R3P 中零售商的决策.

引理 1 证明(制造商局部最优化决策)

考虑 $\delta \neq \frac{1}{2}$, 分别讨论制造商在预期零售商不回收、部分回收、全部回收 I 及全部回收 II 4 种情形下的局部最优决策. 令 $A = \sqrt{2(3-2\delta)(1-\delta)}$.

$$1) \quad b \leq (3-2\delta)w - 3(1-\delta) + A(1-w)$$

制造商利润函数关于 w 的二阶导为 $\frac{d^2 I_M^{R3P}}{d w^2} = -1 < 0$ 存在最优解. 拉格朗日函数为 $L_M^{R3P} = (w - c_n) q_n^{R3P^*}(w) + \lambda_{M1}^{R3P} ((3-2\delta)w - 3(1-\delta) + A(1-w) - b)$. 库恩·塔克条件为 $\frac{\partial L_M^{R3P}}{\partial w} = \frac{\partial L_M^{R3P}}{\partial \lambda_{M1}^{R3P}} = 0, \lambda_{M1}^{R3P} \geq 0$ 及 $b \leq (3-2\delta)w - 3(1-\delta) + A(1-w)$. 考虑以下两种情形.

① $\lambda_{M1}^{R3P} = 0$. 求解库恩·塔克条件得制造商的最优决策为 $w^{R3P^*} = \frac{1+c_n}{2}$, 代入零售商的反应函数可得 $p_n^{R3P^*} = \frac{3+c_n}{4}$ 将他们再代入第三方回收商的反应函数可得 $p_t^{R3P^*} = \frac{(4(3-2\delta)(2-\delta) - A(7-4\delta))(c_s - s_t) - 2A s_t - \delta(5-4\delta)A + 4\delta(3-2\delta)(1-\delta)}{4(3-2\delta - A)(3-2\delta)}$

将这些最优解代入式(1)~式(4)及利润函数, 可得此情形下的均衡最优值. 根据 $\lambda_{M1}^{R3P} > 0$, 可知此情形成立的条件为 $b < l_p^{R3P^*} = \frac{(3-\delta - c_n(3-2\delta))A + (3-2\delta)^2 c_n - 3(1-\delta)(3-2\delta)}{3-2\delta - A}$.

② $\lambda_{M1}^{R3P} = \lambda_{M2}^{R3P} = 0$. 求解库恩·塔克条件得制造商的最优决策为 $w^{R3P^*} = \frac{(3-2\delta)c_n + 3(1-\delta) + b}{2(3-2\delta)}$, 代入零售

$\frac{4\delta - 4s_t - 1 + c_n}{4}$. 将这些最优解代入式(1)~式(4)及利润函数, 可得此情形下的均衡最优值. 根据 $b \leq (3-2\delta)w - 3(1-\delta) + A(1-w)$, 可知此情形成立的条件为 $b \leq l_N^{R3P^*} = \frac{(3-2\delta)c_n - (3-4\delta) + A(1-c_n)}{2}$.

② $\lambda_{M1}^{R3P} > 0, \lambda_{M2}^{R3P} > 0$ 表明 $b = (3-2\delta)w - 3(1-\delta) + A(1-w)$, 求解库恩·塔克条件得制造商的最优决策为 $w^{R3P^*} = \frac{3(1-\delta) - A + b}{3-2\delta - A}$, 代入零售商的反应函数可得 $p_n^{R3P^*} = \frac{b+6-5\delta-2A}{2(3-2\delta - A)}$ 将他们再代入第三方回收商的反应函数可得 $p_t^{R3P^*} = \frac{c_s + (5-4\delta-2A)(\delta - s_t)}{2(3-2\delta - A)}$. 将这些最优解代入式(1)~式(4)及利润函数, 可得此情形下的均衡最优值. 根据 $\lambda_{M1}^{R3P} > 0$, 可知此情形成立的条件为 $b > l_N^{R3P^*} = \frac{(3-2\delta)c_n - (3-4\delta) + A(1-c_n)}{2}$.

$$2) \quad (3-2\delta)w - 3(1-\delta) + A(1-w) \leq b \leq \frac{(1-\delta)(3+2\delta) - (1-2\delta)(3-2\delta)w}{7-6\delta}$$

制造商利润函数关于 w 的二阶导为 $\frac{d^2 I_M^{R3P}}{d w^2} = -\frac{3-2\delta}{2(1-\delta)} < 0$ 存在最优解. 拉格朗日函数为 $L_M^{R3P} = (w - c_n) q_n^{R3P^*}(w) + \lambda_{M1}^{R3P} (b - (3-2\delta)w - 3(1-\delta) + A(1-w)) + \lambda_{M2}^{R3P} (\frac{(1-\delta)(3+2\delta) - (1-2\delta)(3-2\delta)w}{7-6\delta} - b)$. 库恩·塔克条件为 $\frac{\partial L_M^{R3P}}{\partial w} = \frac{\partial L_M^{R3P}}{\partial \lambda_{M1}^{R3P}} = \frac{\partial L_M^{R3P}}{\partial \lambda_{M2}^{R3P}} = 0, \lambda_{M1}^{R3P} \geq 0, \lambda_{M2}^{R3P} \geq 0$ 及 $(3-2\delta)w - 3(1-\delta) + A(1-w) \leq b \leq \frac{(1-\delta)(3+2\delta) - (1-2\delta)(3-2\delta)w}{7-6\delta}$. 考虑如下 3 种情形.

① $\lambda_{M1}^{R3P} > \lambda_{M2}^{R3P}, \lambda_{M2}^{R3P} = 0, \lambda_{M1}^{R3P} > 0$ 表明 $b = (3-2\delta)w - 3(1-\delta) + A(1-w)$, 求解库恩·塔克条件得制造商的最优决策为 $w^{R3P^*} = \frac{3(1-\delta) + b - A}{3-2\delta - A}$, 代入零售商的反应函数可得 $p_n^{R3P^*} = \frac{(6-4\delta - A)b - (6-5\delta)A + 6(3-2\delta)(1-\delta)}{2(3-2\delta - A)(3-2\delta)}$, 将他们再代入第三方回收商的反应函数可得

商的反应函数可得 $p_n^{R3P^*} = \frac{(3-2\delta)c_n + 9(1-\delta) + 3b}{4(3-2\delta)}$ 将他们再代入第三方回收商的反应函数可得 $p_t^{R3P^*} = \frac{(15-8\delta)c_s - (9-8\delta)s_t + (3-2\delta)c_n - (3-8\delta)(1-\delta)}{8(3-2\delta)}$

将这些最优解代入式(1)~式(4)及利润函数, 可得此情形下的均衡最优值. 根据 $(3-2\delta)w - 3(1-\delta) + A(1-w) \leq$

$b \leq \frac{(1-\delta)(3+2\delta) - (1-2\delta)(3-2\delta)w}{7-6\delta}$, 知此情形成

立的条件为 $l_p^{R3P*} \leq b \leq h_p^{R3P*}$, 其中 $l_p^{R3P*} = \frac{(3-\delta-c_n(3-2\delta))A+(3-2\delta)^2c_n-3(1-\delta)(3-2\delta)}{3-2\delta-A}$,

$$h_p^{R3P*} = \frac{(2\delta-1)(3-2\delta)c_n+(10\delta+3)(1-\delta)}{15-14\delta}$$

③ $\lambda_{M2}^{R3P} > \lambda_{M1}^{R3P}$, $\lambda_{M1}^{R3P} = 0$. $\lambda_{M2}^{R3P} > 0$ 表明 $b = \frac{(1-\delta)(3+2\delta) - (1-2\delta)(3-2\delta)w}{7-6\delta}$, 求解库恩·塔克

条件得制造商的最优决策为 $w^{R3P*} = \frac{(1-\delta)(3+2\delta) - (7-6\delta)b}{(3-2\delta)(1-2\delta)}$, 代入零售商的反应函数可

得 $p_n^{R3P*} = \frac{b-1+\delta}{2\delta-1}$, 将他们再代入第三方回收商的反应

函数可得 $p_t^{R3P*} = \frac{(1-\delta)s_t+\delta c_s-\delta(1-\delta)}{2\delta-1}$. 将这些最

优解代入式(1)~式(4)及利润函数, 可得此情形下的均衡最优值. 根据 $\lambda_{M2}^{R3P} > 0$, 可知此情形成立的条件为 $b >$

$$h_p^{R3P*} = \frac{(2\delta-1)(3-2\delta)c_n+(10\delta+3)(1-\delta)}{15-14\delta}$$

$$3) \frac{(1-\delta)(3+2\delta) - (1-2\delta)(3-2\delta)w}{7-6\delta} \leq b \leq$$

$$\frac{2\delta w - w + 1}{2}$$

$$\text{制造商利润函数为 } \Pi_M^{R3P}(w) = \frac{2(b-\delta)(w-c_n)}{1-2\delta}$$

关于 w 单调递减或单调递增. 因此, 这一情形下的局部最优解在临界值处取得, 可由其他情形 2) 或情形 3) 下的局部最优解给出.

$$4) b \geq \frac{2\delta w - w + 1}{2}$$

制造商利润函数关于 w 的二阶导为 $\frac{d^2 \Pi_M^{R3P}}{d w^2} = -2 <$

0 存在最优解. 拉格朗日函数为 $L_M^{R3P} = (w-c_n) q_n^{R3P*}(w) + \lambda_{M1}^{R3P}(b - \frac{2\delta w - w + 1}{2})$. 库恩·塔克条件为 $\frac{\partial L_M^{R3P}}{\partial w} = \frac{\partial L_M^{R3P}}{\partial \lambda_{M1}^{R3P}} =$

0, $\lambda_{M1}^{R3P} \geq 0$ 及 $b \geq \frac{2\delta w - w + 1}{2}$. 考虑以下两种情形.

① $\lambda_{M1}^{R3P} > 0$, $\lambda_{M1}^{R3P} > 0$ 表明 $b = \frac{2\delta w - w + 1}{2}$, 求解库恩·

塔克条件得制造商的最优决策为 $w^{R3P*} = \frac{1-2b}{1-2\delta}$, 代入零

售商的反应函数可得 $p_n^{R3P*} = \frac{1-\delta-b}{1-2\delta}$, 再代入第三方回

收商的反应函数可得 $p_t^{R3P*} = \frac{\delta(1-\delta)-\delta c_s-(1-\delta)s_t}{1-2\delta}$.

将这些最优解代入式(1)~式(4)及利润函数, 可得此情形下的均衡最优值. 根据 $\lambda_{M1}^{R3P} > 0$, 可知此情形成立的条件

$$\text{为 } b < h_{F2}^{R3P*} = \frac{(2\delta-1)c_n+2\delta+1}{4}$$

② $\lambda_{M1}^{R3P} = 0$. 求解库恩·塔克条件得制造商的最优决

策为 $w^{R3P*} = \frac{1+c_n}{2}$, 代入零售商的反应函数可得 $p_n^{R3P*} =$

$\frac{3+c_n}{4}$, 将他们再代入第三方回收商的反应函数可得 $p_t^{R3P*} =$

$\frac{\delta(3+c_n)-4s_t}{4}$. 将这些最优解代入式(1)~式(4)及利润

函数, 可得此情形下的均衡最优值. 根据 $b \geq \frac{2\delta w - w + 1}{2}$,

可知此情形成立的条件为 $b \geq h_{F2}^{R3P*} =$

$$\frac{(2\delta-1)c_n+2\delta+1}{4}$$

为了区分在 3 种有效情形下的局部最优解, 制造商预期不回收(情形 1)、部分回收(情形 2)及全部回收 Π (情形 4)时的局部最优解及最优利润标注“ l_{Nn} ”、“ l_{Pn} ”及“ l_{F2n} ”, 其中 n 表示某种预期回收策略下的第几种情形.

命题 3 证明(制造商全局最优化决策)

对于 b 的区间 $(-1, l_p^{R3P*})$. 由 $l_N^{R3P*} - l_P^{R3P*} =$

$$\frac{(1-c_n)(3-2\delta-A)^2}{2(3-2\delta+A)} > 0$$
, 得 $l_{N1}^{R3P*} > l_{P1}^{R3P*}$; 由 Π_M^{R3P*}

$$|_{P1}(b = l_p^{R3P*}) - \Pi_M^{R3P*}|_{N1}(b = l_p^{R3P*}) =$$

$$\frac{(3-2\delta)(1-c_n)^2(7-4\delta-2A)^2}{8(3-2\delta+A)} > 0$$
, 得 $\Pi_M^{R3P*}|_{P1}(b =$

$$l_p^{R3P*}) > \Pi_M^{R3P*}|_{N1}(b = l_p^{R3P*})$$
. 故存 $l^{R3P*} \in (-1, l_p^{R3P*})$ 使

$$\text{得 } \Pi_M^{R3P*}|_{P1}(b = l_p^{R3P*}) = \Pi_M^{R3P*}|_{N1}(b = l_p^{R3P*})$$
. 求解得 $l^{R3P*} =$

$$\frac{(4\delta-3+c_n(3-2\delta))A+A^2(1-c_n)-B(3-2\delta-A)(1-c_n)}{2A}$$
 这

里 $B = \sqrt{A(A-2(1-\delta))}$, $A = \sqrt{A-2(1-\delta)}$. 当 $b \in$

$(-1, l_p^{R3P*}]$ 时, 情形 1) 的 ① 给出全局最优解; 当 $b \in$

$(l_p^{R3P*}, l_p^{R3P*}]$ 时, 情形 2) 的 ① 给出全局最优解.

对于 b 的区间 $(l_p^{R3P*}, h_{F2}^{R3P*})$. 由 $h_{F2}^{R3P*} - h_p^{R3P*} =$

$$\frac{3(1-2\delta)^2(1-c_n)}{4(15-14\delta)}$$
 知, 当 $\delta \neq \frac{1}{2}$ 时 $h_{F2}^{R3P*} > h_p^{R3P*}$, 当 $\delta =$

$$\frac{1}{2}$$
 时 $h_{F2}^{R3P*} = h_p^{R3P*}$. 由 $\Pi_M^{R3P*}|_{P2} - \Pi_M^{R3P*} =$

$$-\frac{(b-\delta)^2}{2(3-2\delta)(1-2\delta)}$$
 知, 当 $\delta < \frac{1}{2}$ 时 $\Pi_M^{R3P*}|_{P2} < \Pi_M^{R3P*}$,

$$\text{当 } \delta > \frac{1}{2} \text{ 时 } \Pi_M^{R3P*}|_{P2} > \Pi_M^{R3P*}$$
. 由 $\Pi_M^{R3P*}|_{P3}(b = h_{F2}^{R3P*})$

$$- \Pi_M^{R3P*}(b = h_{F2}^{R3P*}) = -\frac{(1-2\delta)(1-c_n)^2}{8(3-2\delta)}$$
 知, 当 $\delta < \frac{1}{2}$

$$\text{时 } \Pi_M^{R3P*}|_{P3}(b = h_{F2}^{R3P*}) < \Pi_M^{R3P*}(b = h_{F2}^{R3P*})$$
, 当 $\delta > \frac{1}{2}$

$$\text{时 } \Pi_M^{R3P*}|_{P3}(b = h_{F2}^{R3P*}) > \Pi_M^{R3P*}(b = h_{F2}^{R3P*})$$
. 综上, 若 $\delta <$

$$\frac{1}{2}$$
, 存在 $h_1^{R3P*} \in (l_p^{R3P*}, h_p^{R3P*})$ 使得 $\Pi_M^{R3P*}|_{P2}(b =$

$$h_1^{R3P*}) = \Pi_M^{R3P*}|_{F21}(b = h_1^{R3P*})$$
. 求解得

$$h_1^{R3P^*} = \frac{(2\delta - 1)(3 - 2\delta)(15 - 14\delta)c_n + (1 - \delta)(76\delta + 45 - 76\delta^2) - 4(3 - 2\delta)C(1 - c_n)}{132\delta^2 - 324\delta + 193}$$

这里 $C = \sqrt{2(1-\delta)(1-2\delta)^3}$,有: 对 $l_p^{R3P^*} < b < h_1^{R3P^*}$,情形2的②给出部分回收II的均衡最优解; 对 $h_1^{R3P^*} \leq b < h_{F2}^{R3P^*}$,情形2的③(或情形3的①)给出全部回收I的均衡最优解; 对 $b \geq h_{F2}^{R3P^*}$,情形3的②给出全部回收II的均衡最优解. 若 $\delta > \frac{1}{2}$,存在 $h_{II}^{R3P^*} \in (h_{F2}^{R3P^*}, 1)$ 使得 $\Pi_M^{R3P^*} |_{P3}(b = h_{II}^{R3P^*}) = \Pi_M^{R3P^*} |_{F22}(b = h_{II}^{R3P^*})$. 求解得 $h_{II}^{R3P^*} = \frac{2(2\delta - 1)(3 - 2\delta)c_n + 2(6\delta - 8\delta^2 + 3) + D(1 - c_n)}{4(7 - 6\delta)}$,这里 $D = \sqrt{2(3 - 2\delta)(2\delta - 1)^3}$,有: 对 $l_p^{R3P^*} < b < h_p^{R3P^*}$,情形2的②给出部分回收II的均衡最优解; 对 $h_p^{R3P^*} \leq b < h_{II}^{R3P^*}$,情形2的③给出全部回收I的均衡最优解; 对 $b \geq h_{II}^{R3P^*}$,情形3的②给出全部回收III的均衡最优解. 最后, 若 $\delta = \frac{1}{2}$, $h_p^{R3P^*} = h_{F2}^{R3P^*}$,令 $h^{R3P^*} = h_p^{R3P^*} = h_{F2}^{R3P^*}$,有: 对 $l_p^{R3P^*} < b < h^{R3P^*}$,情形2的②给出部分回收II的均衡最优解; 对 $b \geq h^{R3P^*}$,情形3的②给出全部回收的均衡最优解.

综上所述, 即可得制造商的(全局)均衡最优解, 带入零售商和第三方回收商的反应函数, 即可得他们的均衡最优决策及其最优利润.

D 推论1 证明

对于部分回收点的比较. 由 $l^{C^*} - l^{M3P^*} = (1 - c_n)(A -$

$2(1 - \delta))$ 和 $A^2 - (2 - 2\delta)^2 = -2(1 - \delta) < 0 \Rightarrow A < 2(1 - \delta)$ 可知 $l^{C^*} < l^{M3P^*}$. 由 $l^{M3P^*} - l^{R3P^*} = -\frac{(A - B)(3 - 2\delta - A)(1 - c_n)}{2A} \sqrt{A^2 - B^2} = 2A(1 - \delta) > 0 \Rightarrow A > B$ 及 $3 - 2\delta > 2(1 - \delta) > A$,可知 $l^{M3P^*} < l^{R3P^*}$. 故 $l^{C^*} < l^{M3P^*} < l^{R3P^*}$.

对于全部回收点的比较. 考虑 $\delta < 0.5$. 由 $h_1^{M3P^*} - h_1^{R3P^*} = \frac{4(3 - 2\delta)((7 - 6\delta)C + 2(11 - 6\delta)(1 - \delta)(1 - 2\delta))(1 - c_n)}{(7 - 6\delta)(132\delta^2 - 324\delta + 193)} > 0$

可知 $h_1^{M3P^*} > h_1^{R3P^*}$. $h^{C^*} - h_1^{R3P^*} = \frac{(4(3 - 2\delta)C - (1 - \delta)(76\delta + 45 - 76\delta^2))(1 - c_n)}{132\delta^2 - 324\delta + 193}$ 和

$(4(3 - 2\delta)C)^2 - ((1 - \delta)(76\delta + 45 - 76\delta^2))^2 = -(1 - \delta)(132 \times \delta^2 - 324\delta + 193)(9 + 51\delta + 8\delta^2 - 36\delta^3) < 0 \Rightarrow 4(3 - 2\delta) \times C < (1 - \delta)(76\delta + 45 - 76\delta^2)$ 可知 $h^{C^*} < h_1^{R3P^*}$. 故 $h^{C^*} < h_1^{R3P^*} < h_1^{M3P^*}$. 考虑 $\delta > 1/2$. 由 $h_1^{M3P^*} - h_p^{R3P^*} = -\frac{8(1 - \delta)(2\delta - 1)(3 - 2\delta)(1 - c_n)}{(15 - 14\delta)(7 - 6\delta)}$ 可知 $h_1^{M3P^*} < h_p^{R3P^*}$. $h^{C^*} - h_1^{M3P^*} = -\frac{(1 - \delta)(3 + 2\delta)(1 - c_n)}{(7 - 6\delta)} < 0$ 可知 $h^{C^*} < h_1^{M3P^*}$. 故 $h^{C^*} < h_1^{M3P^*} < h_p^{R3P^*}$. 考虑 $\delta = 1/2$. 由 $h_1^{M3P^*} - h_p^{R3P^*} = 0$ 和 $h_p^{M3P^*} - h_{F2}^{M3P^*} = 0$ 可知 $h^{R3P^*} = h_p^{R3P^*} = h_{F2}^{R3P^*} = h_1^{M3P^*}$. 故 $h^{C^*} < h_1^{M3P^*} = h^{R3P^*}$.