原材料价格波动下的库存与生产联合决策①

傅　科[1]，梁桂添[2]，王夏阳[1*]
(1. 中山大学岭南学院，广州 510275; 2. 香港中文大学商学院，中国香港)

摘要: 价格波动的情况下如何进行原材料采购，并在产品的生产决策中如何权衡市场需求、产品价格以及采购与库存成本等问题是当前很多企业面临的普遍难题. 对此类问题，假定原材料的价格波动服从马尔可夫过程，成品的市场需求为与价格相关的随机变量，进而建立了多周期库存采购与生产联合决策模型，并分析了系统的动态最优策略. 模型同时考虑了原材料买进或者卖出决策和成品生产决策. 研究结果表明，模型的最优策略，即原材料库存决策与成品生产决策均满足动态基库存策略. 同时证明了一系列性质，这些性质展示了原材料价格波动下最优库存策略的特征. 数值实验进一步验证了模型的最优策略，并研究了参数变化时最优策略的变化.

关键词: 价格波动; 采购管理; 库存决策; 基库存策略
中图分类号: F273　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1007 - 9807(2016)12 - 0047 - 12

0 引 言

对制造企业来讲，原材料采购成本是企业的关键成本之一，然而很多原材料市场价格波动很大，对企业的采购和生产决策乃至最终盈利造成了重大影响. 以中国铁矿石的采购为例，中国钢铁企业的铁矿石采购多数依赖进口，例如，武钢集团铁矿石采购中进口矿占比接近 80%，国内采购量约 10%，其余为自有铁矿. 然而，铁矿石的价格波动十分显著. 以中国铁矿网 2015 年 9 月 20 日到 2016 年 3 月 21 日的铁矿石价格指数变化为例(如图 1 所示)，可以看出，进口铁矿石的波动尤为剧烈，最高值比最低值高约 63%.

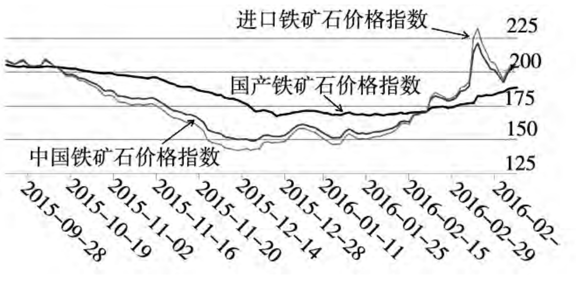

图 1　中国铁矿石价格指数(来源: 中国铁矿网)

Fig. 1 Price index of iron ore in China

为了应对铁矿石的价格变化，一些企业在铁矿石采购中采取了长期合同. 然而，全球铁矿石采购的长期合同虽然在以往曾经起到了锁定价格、降低风险的作用，但近些年这一机制已经逐步丧

① 收稿日期: 2014 - 10 - 27; 修订日期: 2016 - 03 - 21.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71222105; 71671192; 71431007).
通信作者: 王夏阳(1972—)，女，河南南阳人，博士，副教授. Email: wangxy@mail.sysu.edu.cn

失了原有的功能. 随着近几年铁矿石价格的持续上涨，几大铁矿石供应商必和必拓、力拓和淡水河谷逐渐开始采用季度协议价取代年度协议价，进而用月度协议价取代了季度协议价[1]，甚至采取一船一价. 在这一趋势下，企业无论是采取长期合同还是依靠现货市场采购铁矿石，都面临着价格的大幅度波动. 显然，这样的价格波动对钢铁企业的原材料采购以及成品生产决策乃至企业的赢利性会造成显著影响. 与此同时，钢铁企业在整体产能过剩的背景下，为了赢得市场需求，又会采取降低价格的行为，这使得盈利变得更加困难.

为了应对以上问题，一些企业开始采取产量限制措施. 例如，宝钢在 2009 年市场低迷时期限产幅度达到 20% 以上. 对于采购的过剩铁矿石，一些企业也开始考虑以现货价格进行转卖，以降低风险. 事实上，类似于上述钢铁企业面临的价格波动情况下的原材料采购、如何在产品的生产决策中权衡市场需求、产品价格以及采购与库存成本等问题在其他行业也普遍存在，然而如何进行更好的决策却是企业面临的普遍难题. 这类企业的生产和库存系统及其面临的经营环境通常具有以下 4 个基本特征: 1) 原材料价格随着时间显著波动; 2) 成品需求量与价格相关，且随时间随机变化; 3) 企业缺乏与上游供应商签订风险共担合约的议价能力，但可以通过预测今后原材料价格上涨而采购原材料，形成“投机性”原材料库存，也可以通过预测原材料价格下跌而卖掉部分原材料库存; 4) 企业还需要耗费原材料库存，进行成品库存和生产决策. 因而，解决这一类问题对企业具有普遍的指导意义.

虽然学术界有关原材料价格波动下的库存决策问题一直在持续研究，但当前的研究要么假设需求确定，要么对价格波动的假设过于简单，而且通常考虑的是单一的原材料采购或是成品库存决策问题. 还有一些研究则主要基于风险共担的合约展开，其前提是采购一方有较强的合同议价能力，这与本文指出的当前多数企业面临的问题不符合. 同时，现有的研究很多考虑的是单周期决策，少数考虑多周期模型的文献也未考虑原材料的转卖问题. 有鉴于此，本文将针对该类生产系统建立多周期库存采购与生产联合决策模型，分析系统的最优策略，并在这一模型中考虑剩余原材料库存的转卖问题. 本文对原材料价格波动下的多周期原材料采购与产品生产决策问题的研究，一方面将有助于企业做出更为合理的决策; 另一方面可以对原材料价格波动下的库存决策领域的学术研究做出有益的补充.

1 文献综述

有关生产企业的原材料采购与成品生产决策问题属于库存管理的经典范畴，一直是运作管理学术界关注的重点问题. 梳理原材料价格波动情况下的库存管理研究文献发现，现有的研究主要包括两大类: 一类着重考虑不同类型的原材料价格波动假设下的最优库存策略; 另一类则考虑了当存在原材料价格波动时，企业在不同的采购合同结构下应采用何种库存策略.

有关原材料价格波动下库存问题的第一类研究出现得较早[2-9]. Fabian 等[2] 最早研究了现货市场上原材料价格变动时的库存决策问题，认为在进行原材料库存决策时，最主要的问题是确定采购的时间以及数量. 随后针对这一问题的研究则更为具体与深入. 其中，Taylor 和 Bradley 等[3] 的研究考虑了原材料价格持续上升的情况. Golabi[4] 的研究更进一步，假设原材料价格波动服从某个已知分布，其研究表明，当原材料价格落于某个区间时，最优策略为持有满足之后多个周期需求的库存数量，且该策略对有限和无限时域的情况均有效. 但是这一研究假设需求是确定性的. Gurnani[5] 假设市场需求为随机量，分析了原材料价格提高时的企业最优订货策略及其变化. Wang[6] 则考虑了原材料价格在连续周期持续下降的情况，其研究表明企业的最优策略为与成本不相关的短视库存策略. Gavirneni[7] 在其有关周期盘点库存的生产系统的研究中，对原材料价格随时间的变化做出了更具一般性的假设，考虑原材料采购价格服从马尔可夫过程. 然而，为了降低问题的复杂性，其研究考虑的是销售损失的情况，并假设期末库存的残值为零. Berling 和 Rosling[8] 在其随机需求下的库存和生产决策模型的研究中，讨论了采购价格的变化对企业最优策略的影响. 随后的研究还进一步假设原材料价格的变化

服从几何布朗运动,同时需求服从泊松过程[9].

另一类研究则考虑了采购合约问题. 当原材料价格存在波动时,现有文献涉及的采购合约主要包括时间柔性合同、收益共享合同、现货市场上的数量柔性合同、期权合同、长期价格合同等,以及合同与现货购买方式组合下的库存决策[10-17]. 其中,一些研究考虑的是价格存在波动,且企业与供应商存在风险共担合同时的库存决策问题[10-13]. 例如,Li 和 Kouvelis[10]研究了需求稳定但原材料价格波动情况下,双方采取风险共担的时间柔性合约结构下的采购时间与采购数量决策问题,目标是最小化单周期采购成本的净现值与库存持有成本之和的期望值. 在这一研究中,价格的变化服从几何布朗运动,当价格波动超出一定范围时,超出的采购成本由双方共同承担. 还有一些研究则主要研究了特定行业中价格波动情况下的库存决策问题[16-17]. 例如, Secomandi 和 Kekre[16]研究了能源行业在期货与现货市场的采购问题.

进一步梳理上述文献,可以看出,多数合同都具有规避价格波动风险的功能. 但是,这些合同存在的前提是采购一方具有较为明显的议价能力,企业需要在这些约定的合同结构下做出最有利于自己的库存决策或采购组合选择. 然而,本文所研究的市场情形与此有较大的差异. 例如,钢铁企业在采购铁矿石时可以选择所谓的长期价格协议,但这一价格协议已经不再具有有效的降低价格波动性的功能. 无论企业采取何种采购方式,都难以规避原材料价格的波动. 此外,还有更多的企业所需的大宗原材料主要从现货市场采购. 因而,本文的研究不再区分采购合同,而是将研究重心放在存在原材料价格波动情况下的多周期库存与生产动态决策. 对文献的梳理同时还发现,近期的相关研究开始逐渐与特定的行业中面临的具体问题关联,如牛肉加工业[13]、能源行业[16]等,或是考虑了汇率波动对供应链的影响[18]. 但是对钢铁行业等需要进行大宗原材料采购的制造型企业面临的库存与生产问题,当前的研究还缺乏针对性,或是与实际情况不尽符合[15],因而本文从钢铁行业面临的问题出发进行建模与分析. 本文的模型和结论也可以用于其它原材料价格波动的商业情形,比如对于计算机组装厂商来讲,内存等关键零部件价格的大幅度波动对其库存和生产决策的影响.

总体而言,以往有关原材料价格波动下的库存决策研究通常要么假设需求确定,要么假设需求随机但为了简化问题而将价格波动假设为特定的分布. 虽然少数研究假设原材料价格服从更具一般性的马尔可夫过程,然而其研究中通常考虑的是销售损失的情况,并假设期末库存的残值为零,常常将研究问题简化为单期库存决策问题. 一些研究假设买卖双方存在共担风险的采购合约,而将现货采购仅作为供应不足时的采购. 对于缺乏风险共担时的采购问题研究,当前的文献主要将大宗物料采购问题视为单纯的投机性库存决策问题. 这些均与本文研究的原材料采购的目的是用于生产,但是如何在缺乏合同议价能力时规避原材料价格的波动风险存在很大的差别. Chen 等[15]的研究虽然在长期采购合约中考虑了价格波动风险,弱化了采购合约的风险规避功能,并将现货市场作为同时考虑的采购源,但其研究却假设剩余的原材料库存价值为零,没有考虑原材料的转卖问题,相应地也没有考虑库存与生产的联合决策问题. 这与当前生产型企业采购中面临的多期库存采购与生产决策问题存在较大的差异. 由于本文所研究的原材料不是易逝品,因此更为合理的假设是企业可以根据原材料价格波动情况及企业的采购情况,选择在当期卖出多余的原材料库存. 事实上,这也是企业常常采取一种风险规避方式. 综上所述,为了弥补现有研究的不足并使研究更具针对性,本文假设市场对成品的需求随机且与价格相关,不同周期的原材料价格服从马尔可夫过程,剩余的原材料库存可以转卖,在此前提下建立多周期原材料库存采购与成品生产决策模型,并对其最优策略进行分析.

2　模型建立与理论分析

2.1　模型建立

本文研究这样的生产系统: 考虑有限的 T 个周期,原材料价格外生且存在波动,原材料的供应充足. 在每一个周期,企业可以根据给定的原材料价格决定采购还是销售自身的原材料库存. 另外,

企业还会对原材料进行加工生产成成品，然后用成品满足随机的市场需求. 由于原材料价格会随着时间而发生变化，本文假设处于不同周期的原材料价格服从马尔可夫过程. 具体地，假设任意周期 t 原材料价格 c_t 是以下 M 个取值之一: $\{c_1, c_2, \cdots, c_M\}$，不失一般性，假设 $c_1 < c_2 < \cdots < c_M$. 从周期 t 到周期 $t+1$ 的价格变化服从马尔可夫过程，转移概率矩阵为 $\Pi = (\pi_{ij})$. 对上述假设的合理性解释如下: 一方面这个随机变化的价格设定体现了原材料价格随机变化这一重要特征，而在全球化的环境下跨国采购的原材料价格变化的重要原因就是汇率的波动，比如从 2015 年至今的人民币对美元贬值导致很多进口原材料的企业成本显著上升. Masson [19] 采用上述马尔可夫过程来描述汇率的变动，其中进行实证分析的数据来源包括 167 个国家的 24 年数据; 另一方面，在一些相关的理论研究模型中，如 Gavirneni [7] 与 Lee 和 Ren [20] 也采用了类似的假设.

在每个周期事件发生的顺序为: 在周期初盘点原材料和成品库存，然后决定原材料采购(销售)数量; 接着生产成品，以满足随后实现的需求. 剩余的原材料和成品将作为库存持有到下一周期并各自产生库存持有成本.

企业的策略 [21] 是给定每个阶段的初始原材料库存量和成品库存量(它们均依赖于所有之前周期的随机原材料价格和随机需求的实现)，它相应的原材料库存决策和成品库存决策. 制造商的目标为利润最大化，其每个阶段的决策包括两个方面: 一是原材料库存决策，二是成品的生产决策. 制造商有可能同时销售原材料和成品，这是这个生产系统的特殊之处.

其他一些参数定义如下:

$t = 1, 2, \cdots, T$: 表示 T 个周期;

$y_t^{(1)}$: 周期 t 生产之前成品初始库存;

$y_t^{(2)}$: 周期 t 生产之后的成品库存;

$x_t^{(1)}$: 周期 t 采购(销售)之前的原材料初始库存;

$x_t^{(2)}$: 周期 t 采购(销售)和生产之后的原材料库存;

h: 单位原材料库存成本;

u: 单位成品生产成本.

企业的决策包括成品价格的决策. 为了保持研究的可追溯性，本文借鉴文献 [22] 和 [23] 有关成品需求与价格的研究，进一步地假设成品需求与价格的关系满足下式

$$D(p) = d(p) + \varepsilon$$

其中 ε 是均值为 0 的随机变量，并且与价格独立; $d(p)$ 假设连续可微. 注意本文假设成品需求仅依赖于成品价格，而与原材料价格相互独立. 同时，$d(p)$ 存在严格递减的反函数 $p(d)$，因此，$dp(d)$ 是关于 d 的单变量函数，假设它是关于 d 的严格凹函数. 实际上，如果 $d(p)$ 是线性函数，或者是指数函数，例如 $d(p) = C - kp^v$，其中 $v \geqslant 1, C, k > 0$，则上述假设显然满足(这类需求函数在库存管理文献中很常见，例如 Federgruen 和 Heching [24]).

令 $d := d(p)$，那么 d 为需求的均值，而真实的需求可以表示为 $d + \varepsilon$. 根据假设，成品价格由成品需求的均值唯一决定，即 $p = p(d)$. 因此，只要确定了 d，就可以求得成品价格 p. 为了后面分析的简便，在建立模型时，将用 d 代替 p.

定义 $H(x)$ 为期末成品库存为 x 时的库存成本和延迟交货成本. 假设 $H(x)$ 关于 x 是递增凸函数且连续可微. 另外，假设在某个周期未被满足的需求将在后面的周期满足(backlogging)，即所有的成品需求都会被满足.

假设 $c_1 + h > c_i$，$i \geqslant 2$. 该假设表示即使原材料价格下降到最小值，但是由于库存成本的存在，企业在下一个周期并不能保证一定获益.

令 $V_t^i(x_t^{(1)}, y_t^{(1)})$ 为从第 t 期到第 T 期的贴现最优收益，其中 i 表示在周期 t 的原材料价格为 c_i，其中 c_i 从 $\{c_1, c_2, \cdots, c_M\}$ 中取值. $(x_t^{(1)}, y_t^{(1)})$ 分别表示系统在 t 周期的初始状态: 原材料初始库存和成品初始库存. 定义贴现率 $0 < \gamma \leqslant 1$. 在周期 t，给定初始状态 $(x_t^{(1)}, y_t^{(1)})$，则有如下最优方程

$$V_t^i(x_t^{(1)}, y_t^{(1)}) = \max_{x_t^{(2)} \geqslant 0, y_t^{(2)} \geqslant y_t^{(1)}, d \geqslant 0} \{ -c_i(x_t^{(2)} - x_t^{(1)} + y_t^{(2)} - y_t^{(1)}) - u(y_t^{(2)} - y_t^{(1)}) + Z_t(x_t^{(2)}, y_t^{(2)}, d_t) \} \quad (1)$$

其中

$$
\begin{aligned}
Z_t(x_t^{(2)},y_t^{(2)},d_t) &= \mathrm{E}\left[p_t(d_t)D_t(p_t) - hx_t^{(2)} - H(y_t^{(2)} - D_t(p_t))\right] + \\
&\quad \gamma\sum_{j=1}^{M}\pi_{ij}\mathrm{E}\left[V_{t+1}^{j}(x_t^{(2)},(y_t^{(2)} - D_t(p_t)))\right] \\
&= p_t(d_t)d_t - hx_t^{(2)} - \mathrm{E}\left[H(y_t^{(2)} - d_t - \varepsilon_t)\right] + \\
&\quad \gamma\sum_{j=1}^{M}\pi_{ij}\mathrm{E}\left[V_{t+1}^{j}(x_t^{(2)},(y_t^{(2)} - d_t - \varepsilon_t))\right]
\end{aligned}
\tag{2}
$$

这里 $Z_t(x_t^{(2)},y_t^{(2)},d_t)$ 可以解释为除去原材料采购成本(或销售收入)和成品生产成本的目标函数. 式(1)中等式右边第1项为原材料采购成本(销售收入),此项是由于成品生产需要的原材料数量为 $y_t^{(2)} - y_t^{(1)}$(注意 $y_t^{(2)} \geqslant y_t^{(1)}$),原材料从初始库存 $x_t^{(1)}$ 到期末库存 $x_t^{(2)}$,需要补充的数量为 $x_t^{(2)} - x_t^{(1)}$(若 $x_t^{(2)} \geqslant x_t^{(1)}$)或者销售量为 $-(x_t^{(2)} - x_t^{(1)})$(若 $x_t^{(2)} \leqslant x_t^{(1)}$),故原材料总采购成本为 $-c_i(x_t^{(2)} - x_t^{(1)} + y_t^{(2)} - y_t^{(1)})$;第2项为生产成本. 式(2)中等式右边第1项为当期除去采购和生产成本后的期望收入;第2项和第3项分别是原材料和成品库存的持有成本;第4项为 $t+1$ 周期之后的期望利润. 约束条件 $x_t^{(2)} \geqslant 0, y_t^{(2)} \geqslant y_t^{(1)}, d \geqslant 0$ 中,第1项表示每一期末库存非负,第2项表示每期成品目标水平不可以低于现有库存量,第3项表示平均需求量非负. 为简单起见,假设末期利润函数值为0,即

$$V_{T+1}^{(j)}(x_{T+1}^{(1)},y_{T+1}^{(1)}) = 0$$

本文接下来将对模型进行进一步的分析.

2.2　结构性质与最优策略

首先,对于前述定义的目标函数 $Z_t(x_t^{(2)},y_t^{(2)},d_t)$ 以及利润函数 $V_t^{(i)}(x_t^{(1)},y_t^{(1)})$,有以下基本性质.

命题1　$Z_t(x_t^{(2)},y_t^{(2)},d_t)$ 是关于 $(x_t^{(2)},y_t^{(2)},d_t)$ 的联合凹函数; $V_t^{(i)}(x_t^{(1)},y_t^{(1)})$ 是关于 $(x_t^{(1)},y_t^{(1)})$ 的联合凹函数.

证明　这里使用归纳法进行证明. 易知 $V_{T+1}^{(j)}(x_{T+1}^{(1)},y_{T+1}^{(1)}) = 0$ 满足条件. 假设 $V_{t+1}^{(j)}(x_{t+1}^{(1)},y_{t+1}^{(1)})$ 是关于 $(x_{t+1}^{(1)},y_{t+1}^{(1)})$ 的联合凹函数,现在先证明 $Z_t(x_t^{(2)},y_t^{(2)},d_t)$ 是关于 $(x_t^{(2)},y_t^{(2)},d_t)$ 的联合凹函数.

根据凹函数定义以及假设,并且由于 $y_t^{(2)} - d_t - \varepsilon_t$ 是线性函数,所以 $p_t(d_t)d_t - hx_t^{(2)} - \mathrm{E}[H(y_t^{(2)} - d_t - \varepsilon_t)]$ 显然是关于 $(x_t^{(2)},y_t^{(2)},d_t)$ 的联合凹函数. 而对于 $\mathrm{E}[V_{t+1}^{(j)}(x_t^{(2)},(y_t^{(2)} - d_t - \varepsilon_t))]$,因为根据归纳假设,$V_{t+1}^{(j)}(x_{t+1}^{(1)},y_{t+1}^{(1)})$ 是关于 $(x_{t+1}^{(1)},y_{t+1}^{(1)})$ 的联合凹函数,而 $y_t^{(2)} - d_t - \varepsilon_t$ 是线性函数,所以 $\mathrm{E}[V_{t+1}^{(j)}(x_t^{(2)},(y_t^{(2)} - d_t - \varepsilon_t))]$ 是关于 $(x_t^{(2)},y_t^{(2)},d_t)$ 的联合凹函数.

综上可得 $Z_t(x_t^{(2)},y_t^{(2)},d_t)$ 是关于 $(x_t^{(2)},y_t^{(2)},d_t)$ 的联合凹函数. 最后,由于决策变量的取值

$$A = \{(x_t^{(2)},y_t^{(2)}): x_t^{(2)} \geqslant 0,\ y_t^{(2)} \geqslant y_t^{(1)}\}$$

是个凸集,根据文献 Heyman 和 Sobel[25] 中的命题 B-4,最大化不影响函数的凹性,因此可得 $V_t^{(i)}(x_t^{(1)},y_t^{(1)})$ 是关于 $(x_t^{(2)},y_t^{(2)})$ 的联合凹函数. 　　证毕.

定义

$$
\begin{aligned}
(x_t^{(2)*},y_t^{(2)*},d_t^*) = \max_{x_t^{(2)}\geqslant 0, y_t^{(2)}\geqslant y_t^{(1)}, d\geqslant 0} \{ -c_i(x_t^{(2)} - \\
x_t^{(1)} + y_t^{(2)} - y_t^{(1)}) - u(y_t^{(2)} - y_t^{(1)}) + \\
Z_t(x_t^{(2)},y_t^{(2)},d_t)\}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

那么 $(x_t^{(2)*},y_t^{(2)*},d_t^*)$ 为 t 周期的最优决策,其中 $(x_t^{(2)*},y_t^{(2)*})$ 为最优库存决策. 相应地,定义 $p_t^* = p_t^*(d_t^*)$,那么 p_t^* 为最优定价决策. 注意到在式(3)右端的目标函数中,以及 $Z_t(x_t^{(2)},y_t^{(2)},d_t)$ 的递归关系中,原材料价格 c_i 是个重要因素,因此它会对企业的最优决策造成影响. 将在后文讨论原材料价格对于企业最优决策的影响.

令周期 t 成品的产量为 a,那么就有

$$y_t^{(2)} = a + y_t^{(1)}$$

代入原模型,可得

$$V_t^{(i)}(x_t^{(1)},y_t^{(1)}) = \max_{x_t^{(2)}\geqslant 0, a\geqslant 0, d_t\geqslant 0}\{-c_i(x_t^{(2)} - x_t^{(1)}) - (c_i + u)a + \bar{Z}_t(x_t^{(2)},a,d_t)\} \tag{4}$$

$$\bar{Z}_t(x_t^{(2)},a,d_t) = p_t(d_t)d_t - hx_t^{(2)} - \mathrm{E}[H(a + y_t^{(1)} - d_t - \varepsilon_t)] +$$

$$\gamma\sum_{j=1}^{M}\pi_{ij}\mathrm{E}\left[V_{t+1}^{(j)}\left(x_t^{(2)},\left(a+y_t^{(1)}-d_t-\varepsilon_t\right)\right)\right] \tag{5}$$

基于上述定义，可以证明以下重要性质.

命题 2 1) a 随着 $y_t^{(1)}$ 的增加而减小. 当 $y_t^{(1)}$ 趋向于无穷大时，有 $a=0$. 2) d_t^* 随着 $y_t^{(1)}$ 的增加而增加.

证明 1) 易知 $\bar{Z}_t(x_t^{(2)},a,d_t)$ 是关于 $(x_t^{(2)},a,d_t)$ 的联合凹函数，因此可将原模型 $V_t^{(i)}(x_t^{(1)},y_t^{(1)})$ 转化为

$$\begin{aligned}V_t^{(i)}(x_t^{(1)},y_t^{(1)}) &= \max_{x_t^{(2)}\geqslant 0,a\geqslant 0,d_t\geqslant 0}\left\{-c_i(x_t^{(2)}-x_t^{(1)})-(c_i+u)a+\bar{Z}_t(x_t^{(2)},a,d_t)\right\}\\ &= \max_{a\geqslant 0}\left\{-(c_i+u)a+\max_{x_t^{(2)}\geqslant 0,d_t\geqslant 0}\left\{-c_i(x_t^{(2)}-x_t^{(1)})+\bar{Z}_t(x_t^{(2)},a,d_t)\right\}\right\}\end{aligned} \tag{6}$$

定义

$$g(y)=\max_{x_t^{(2)}\geqslant 0,d_t\geqslant 0}\left\{-c_i(x_t^{(2)}-x_t^{(1)})+\bar{Z}_t(x_t^{(2)},y-y_t^{(1)},d_t)\right\}$$

因为 $\bar{Z}_t(x_t^{(2)},a,d_t)$ 是关于 $(x_t^{(2)},a,d_t)$ 的联合凹函数，易知 $g(y)$ 是凹函数.

根据 Topkis[26] 中的定理 2.6.2，要证明 a 随着 $y_t^{(1)}$ 的增加而减少，即证明 $-(c_i+u)a+g(a+y_t^{(1)})$ 关于 $(a,y_t^{(1)})$ 是子模的(submodular). 第 1 项是线性函数，显然是子模的; 因此，只需要证明 $g(a+y_t^{(1)})$ 的子模性.

根据子模的定义，要证明两者的子模性，即证明对 $a_1\geqslant a_2 y_{t1}^{(1)}\geqslant y_{t2}^{(1)}$，有

$$g(a_1+y_{t1}^{(1)})-g(a_1+y_{t2}^{(1)})\leqslant g(a_1+y_{t2}^{(1)})-g(a_2+y_{t2}^{(1)}) \tag{7}$$

成立. 令

$$Y_1=a_1+y_{t1}^{(1)},\ Y_2=a_1+y_{t2}^{(1)},$$
$$Y_3=a_2+y_{t1}^{(1)},\ Y_4=a_2+y_{t2}^{(1)}$$

那么式(7)等价于

$$g(Y_1)-g(Y_3)\leqslant g(Y_2)-g(Y_4) \tag{8}$$

因为 $g(y)$ 是凹函数，并且 $Y_3\geqslant Y_4$，因此式(8)可变为

$$\begin{aligned}g(Y_1)-g(Y_3)&\leqslant g(Y_3+a_1-a_2)-g(Y_3)\\&\leqslant g(Y_4+a_1-a_2)-g(Y_4)\\&=g(Y_2)-g(Y_4)\end{aligned}$$

因此 a 随着 $y_t^{(1)}$ 的增加而减少.

最后，由式(3)及 $g(y)$ 的定义可得

$$a^*(y_t^{(1)})=\operatorname*{argmax}_{a\geqslant 0}\left\{-(c_i+u)a+g(a+y_t^{(1)})\right\}$$

定义

$$f(y)=-(c_i+u)(y-y_t^{(1)})+g(y)$$

易知 $f(y)$ 是凹函数，因此存在一个最大值，定义为 $\bar{y}$，得到，对所有 $a\geqslant 0$，$y_t^{(1)}\geqslant\bar{y}$ 及 $y\geqslant\bar{y}$，$f(0+y)\geqslant f(a+y_t^{(1)})$.

上式意味着当 $y_t^{(1)}$ 趋向于无穷大时，为使目标函数值最大，a 的取值应为 0.

2) 根据式(5)和式(6)，有

$$\begin{aligned}V_t^{(i)}(x_t^{(1)},y_t^{(1)}) &= \max_{x_t^{(2)}\geqslant 0,a\geqslant 0,d_t\geqslant 0}\left\{-c_i(x_t^{(2)}-x_t^{(1)})-(c_i+u)a+\bar{Z}_t(x_t^{(2)},a,d_t)\right\}\\ &= \max_{d_t\geqslant 0}\left\{p_t(d_t)d_t+\max_{x_t^{(2)}\geqslant 0,a\geqslant 0}\left\{-c_i(x_t^{(2)}-x_t^{(1)})(-(c_i+u)a+\hat{Z}_t(x_t^{(2)},a,d_t)\right\}\right\}\end{aligned}$$

其中

$$\hat{Z}_t(x_t^{(2)},a,d_t)=hx_t^{(2)}-\mathrm{E}\left[H(a+y_t^{(1)}-d_t-\varepsilon_t)\right]+\gamma\sum_{j=1}^{M}\pi_{ij}\mathrm{E}\left[V_{t+1}^{(j)}\left(x_t^{(2)},\left(a+y_t^{(1)}-d_t-\varepsilon_t\right)\right)\right]$$

同理，类似命题 2 第 1) 部分，同样可以证明

$$p_t(d_t)d_t+\max_{x_t^{(2)},a}\left\{-c_i(x_t^{(2)}-x_t^{(1)})-(c_i+u)a+\hat{Z}_t(x_t^{(2)},a,d_t)\right\}$$

关于 $(d_t,y_t^{(1)})$ 是超模的(supermodular). 因此 d_t^* 随着 $y_t^{(1)}$ 的增加而增加. 证毕.

命题 2 第 1) 部分表明成品产量随着期初成品库存的增加而减少,并且当期初成品库存足够大时,企业将会停止生产成品. 命题 2 第 2) 部分表明,因为 $p(d)$ 是严格递减函数,因此成品最优价格决策 p_t^* 随着 $y_t^{(1)}$ 的增加而下降. 这表明期初成品库存越高,则企业对于成品的定价越低. 这是因为期初库存水平越高,需要制定越低的价格以便消耗这些库存.

由上述讨论可知 $a^*(y_t^{(1)})$ 为成品的最优产量,令

$$I_t^* = \inf\{y_t^{(1)}: a^*(y_t^{(1)}) = 0\}$$

命题 2 第 1) 部分说明了上述关于 I_t^* 的定义是明确和有意义的(well-defined) . 其管理学上的意义是,当成品库存量趋于无穷大时,企业将会选择不生产成品. 那么,根据命题 2,并注意到式(3) 中 $y_t^{(2)*}$ 的定义,有

定理 1　I_t^* 是成品生产决策的临界值: 若 $I_t^* > y_t^{(1)}$,那么 $a^*(y_t^{(1)}) = I_t^* - y_t^{(1)}$,$y_t^{(2)*} = I_t^*$; 若 $I_t^* \leqslant y_t^{(1)}$,那么 $a^*(y_t^{(1)}) = 0$,$y_t^{(2)*} = I_t^*$.

由定理 1,成品生产数量满足状态依赖的动态基库存策略. 当期初的成品库存低于某一临界值时,企业应生产成品至该临界值水平. 若成品初始库存高于该临界值,则企业不进行成品的生产.

下面的定理刻画了原材料采购或销售策略.

定理 2　存在一个数值 S_t^*:

1) 当 $x_t^{(1)} < S_t^*$ 时,原材料采购数量为 $S_t^* - x_t^{(1)}$,原材料期末库存决策为 $x_t^{(2)*} = S_t^*$;

2) 当 $x_t^{(1)} \geqslant S_t^*$ 时,仍有 $x_t^{(2)*} = S_t^*$,生产成品后多余的原材料则被销售;

3) 特别地,当原材料价格 $c_i = c_M$ 时,有 $x_t^{(2)*} = 0$.

证明　式(1) 可转换为

$$\begin{aligned} V_t^{(i)}(x_t^{(1)}, y_t^{(1)}) &= \max_{x_t^{(2)}, y_t^{(2)}, d_t} -c_i(x_t^{(2)} - x_t^{(1)} + y_t^{(2)} - y_t^{(1)}) - u(y_t^{(2)} - y_t^{(1)}) + Z_t(x_t^{(2)}, y_t^{(2)}, d_t) \\ &= \max_{x_t^{(2)}}\{-c_i(x_t^{(2)} - x_t^{(1)}) + \max_{y_t^{(2)}, d_t} W(x_t^{(2)}, y_t^{(2)}, d_t)\} \end{aligned}$$

其中

$$W(x_t^{(2)}, y_t^{(2)}, d_t) = -(c_i + u)(y_t^{(2)} - y_t^{(1)}) + Z_t(x_t^{(2)}, y_t^{(2)}, d_t)$$

为简化符号,令

$$\overline{W}(x_t^{(2)}) = \max_{y_t^{(2)}, d_t} W(x_t^{(2)}, y_t^{(2)}, d_t)$$

由于 $Z_t(x_t^{(2)}, y_t^{(2)}, d_t)$ 是关于$(x_t^{(2)}, y_t^{(2)}, d_t)$ 的联合凹函数,易证 $\overline{W}(x_t^{(2)})$ 是凹函数. 此外,由假设 $d(p)$ 和 $H(x)$ 连续可微,根据 Federgruen 和 Zipkin[27] 定理 2 易知 $\overline{W}(x_t^{(2)})$ 连续可微,据此定义

$$S_t^* := \begin{cases} 0, & \text{若 } \overline{W}'(0) < c_i \\ \overline{W}'(x_t^{(2)}) = c_i \text{ 的解}, & \text{若 } \overline{W}'(0) \geqslant c_i \end{cases}$$

即当 $\overline{W}'(0) \geqslant c_i$ 时,S_t^* 是函数 $\overline{W}'(x_t^{(2)})$ 的斜率为 c_i 时 $x_t^{(2)}$ 的取值,当 $\overline{W}'(0) < c_i$ 时,S_t^* 为 0. 因为 $\overline{W}(x_t^{(2)})$ 是关于 $x_t^{(2)}$ 的凹函数,易知 $-c_i(x_t^{(2)} - x_t^{(1)}) + \overline{W}(x_t^{(2)})$ 在 $x_t^{(2)} = S_t^*$ 处取得最大值.

由此可知当 $x_t^{(1)} \geqslant S_t^*$ 时,模型最优解 $x_t^{(2)} = S_t^*$;当 $x_t^{(1)} < S_t^*$ 时,亦有 $x_t^{(2)} = S_t^*$ 因此 1) 和 2) 得证.

下面用反证法证明 3) . 假设原材料当期价格为 $c_i = c_M$,但是企业该期最优决策中 t 期末仍然持有原材料库存,即 $x_t^{(2)} > 0$. 那么有

$$\begin{aligned} -c_i(0 - x_t^{(1)}) + \max_{y_t^2, d_t} W(0, y_t^{(2)}, d_t) &> -c_i(x_t^{(2)} - x_t^{(1)}) - hx_t^{(2)} + c_{i+1}x_t^{(2)} + \max_{y_t^2, d_t} W(0, y_t^{(2)}, d_t) \\ &\geqslant -c_i(x_t^{(2)} - x_t^{(1)}) + \max_{y_t^2, d_t} W(x_t^{(2)}, y_t^{(2)}, d_t) \end{aligned}$$

此不等式与原假设矛盾. 故 3) 成立.　　证毕.

由定理 2,原材料的期末库存策略为状态依赖的动态基库存策略. 但与传统的基库存策略相比,这里的基库存策略有一点不同: 当初始库存水平 $x_t^{(1)}$ 大于基库存水平 S_t^* 时,企业会将多出的部分直接销售而非作为库存持有至下一周期. 这是由于在本模型中,原材料价格 c_i 是随机波动的,若当前价格偏低(偏高) 时,企业有理由认为未来的价格有较大概率上涨(下跌) ,从而在当前周期以较低(高) 价格进行原材料的存货(销售) 以最大

化收益. 特别的，当原材料价格在本期达到顶峰时，显然持有原材料库存将会导致企业受损，因此，此时在该期末企业不会持有原材料库存. 这个特点有别于大多数传统库存管理模型. 在这些传统模型下，企业不能够对现有库存进行销售. 在现实案例中，《21 世纪经济报道》曾指出“国内钢企和贸易商纷纷以现货价大量囤积铁矿石”，反映了在当前铁矿石价格较低的情况下，企业预期原材料价格未来会以较大概率上升，从而动态调整原材料库存的决策行为.

定义 $S_t^*(c_i)$ 为 t 周期原材料价格为最优原材料目标库存水平，有如下结论.

命题 3 $S_t^*(c_i) \geqslant S_t^*(c_j)$，$1 \leqslant i < j \leqslant M$.

证明 由定理 2 的证明可知，给定当期成本 c_i，最优原材料库存水平为

$$S_t^*(c_i) = \begin{cases} 0, & \text{若 } \overline{W}'(0) < c_i \\ \overline{W}'(x_t^{(2)}) = c_i \text{ 的解}, & \text{若 } \overline{W}'(0) \geqslant c_i \end{cases}$$

由于 $\overline{W}(x_t^{(2)})$ 是凹函数，$\overline{W}'(x_t^{(2)})$ 单调递减，因此对于 $c_i \geqslant c_j$，有 $S_t^*(c_i) \geqslant S_t^*(c_j)$. 证毕.

命题 3 展示了本文考虑的原材料价格波动的情况下企业进行原材料采购或销售决策的重要结论: 随着原材料市场价格的提高，企业的基库存水平将会降低. 这表明考虑了原材料价格波动的情况下，企业将会利用这一市场信息及概率转移矩阵进行原材料库存的动态调整，从而可望获得更大的收益. 如前文所述，在现实实践中，当钢铁企业预计铁矿石未来价格将以较大概率上升时，会出现囤积铁矿石行为. 显然，如果当前价格相对未来预期价格越低，则企业越愿意囤积越多的铁矿石. 这与上述命题 3 的结论是一致的. 当然，现实问题更为复杂，因为对铁矿石价格的波动的预期，本身就有不确定性，而本文的研究对此方向提供了一定的基础.

3 算例分析

通过算例分析，证实以上分析的结论，并验证参数变化时最优策略的变化情况.

首先，设定原材料价格集合为 $\{c_1, c_2, \cdots, c_M\} = \{16, 18, 20, 22, 24\}$，转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

进一步设定需求函数为 $d(p) = 300 - 3p$; 随机变量 ε 服从 $X \sim N(0.25)$ 的正态分布，成品库存缺货和持有成本分别是 $b = 5$，$m = 7$. 其他参数设置为 $u = 7$，$h = 5$，$\gamma = 0.8$. 为简单起见，本文仅考虑两个周期的决策. 在第 1 个周期，将原材料市场价格设置为 16，并且原材料库存为 0. 接下来，本文将对算例结果进行进一步分析.

3.1 成品生产数量与成品初始库存的关系

保持其他变量及参数不变，通过计算，可以得到成品生产数量 a 与成品初始库存 $y_t^{(1)}$ 的关系，见图 2.

图 2 很好地展示了成品产量与成品初始库存的关系，成品产量随着成品初始库存的增加而减少，当原材料库存超过一定的数值时，企业将不再进行成品的生产. 另外，该图也很好地体现了成品的最优生产决策为基库存策略: 当成品初始库存低于某一临界值时，企业将成品生产至该临界值; 当库存大于临界值时，成品产量为 0.

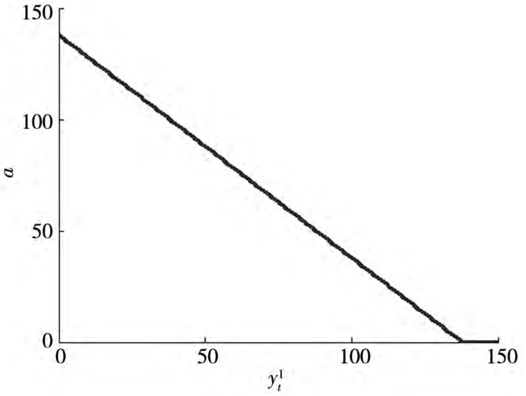

图 2 a 与 $y_t^{(1)}$ 的关系

Fig. 2 Relationship between a and $y_t^{(1)}$

3.2 成品价格与成品初始库存的关系

保持其他参数不变，通过计算，得到图 3 所示的 p_t 与 $y_t^{(1)}$ 的关系图(图 3).

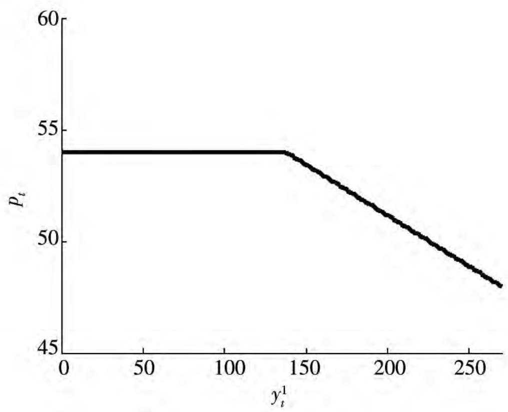

图 3　p_t 与 $y_t^{(1)}$ 的关系

Fig. 3 Relationship between p_t and $y_t^{(1)}$

当期初成品库存低于基库存数量时，根据基库存策略，成品产后数量将等于基库存数量，因此与此对应，企业将保持一致的定价. 而当期初成品库存高于基库存数量时，企业为了平衡收益与库存成本，将降低价格保证成品的销售额. 而从另一个角度来说，当在期初，成品库存较低时，企业为了生产到基库存水平的成品，那么相比于高初始库存，企业将会花费较多的成本进行成品的生产. 为了平衡多产生的成本，因此企业将制定较高的价格.

3.3　其他参数对最优策略的影响

保持其他变量和参数不变，研究原材料库存成本对原材料期末库存数量的影响，结果如图 4 所示.

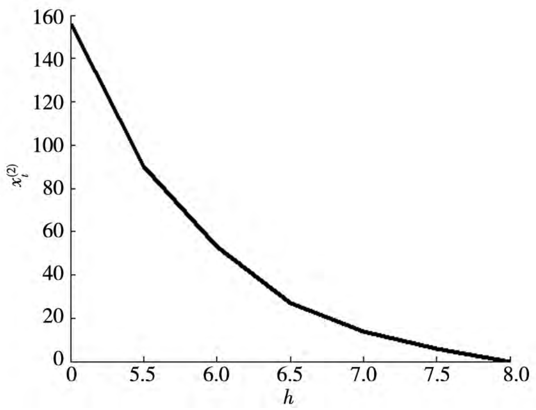

图 4　$x_t^{(2)}$ 与 h 的关系

Fig. 4 Relationship between $x_t^{(2)}$ and h

由图 4 可知，原材料期末库存数量随着原材料库存成本的增加而减少，这与库存管理的常识符合. 仔细研究图 4 可以进一步发现，当原材料库存成本较小时，原材料期末库存数量将趋向于较大值. 这是由于如果原材料价格在未来的一个周期以较大概率上涨，那么企业将会从原材料差价中获得利润. 而当原材料库存成本逐渐增加时，原材料期末库存数量减少的幅度越来越小，并且当库存成本为 8 时，原材料期末数量为 0. 这是因为当库存成本为 8 时，有 $16+8=24$，其中 24 为原材料成本可能取得的最大值. 因此在期末保留原材料将不会获利，企业的原材料期末库存决策为 0.

接下来，本文保持其余变量和参数不变，研究成品生产决策数量与成品库存成本的关系. 图 5 为原材料期末库存数量与原材料库存成本之间的关系图.

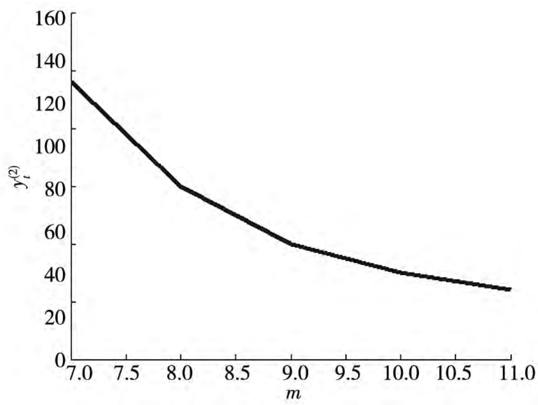

图 5　$y_t^{(2)}$ 与 m 的关系

Fig. 5 Relationship between $y_t^{(2)}$ and m

同理，成品产后数量随着成品库存成本的增加而减少. 并且，发现当成品库存成本逐渐增加时，成品产后数量减少的幅度越来越小. 当成品库存成本较大时，该曲线将趋于平缓，因为此时企业仍将必须持有一定数量的成品库存以满足该周期的成品市场需求.

3.4　原材料市场价格对原材料期末决策的影响

保持其他参数不变，研究原材料市场价格对原材料期末库存数量的影响，结果如图 6 所示.

由图 6 可以看出原材料期末库存数量随着原材料市场价格的增加而逐渐减少，但其减少的幅度也越来越小. 特别地，当原材料市场价格为 24，即所有可能值中的最大值时，原材料期末库存数量为 0. 该结果与定理 2 中的 3) 一致.

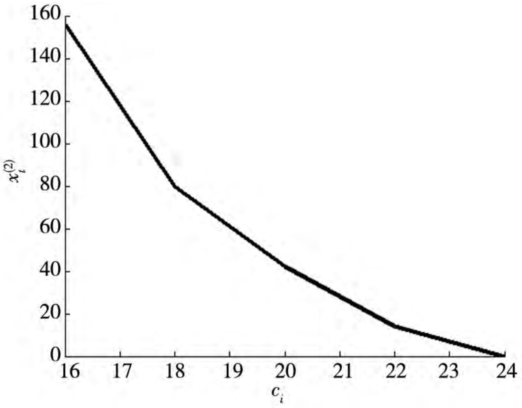

图 6 $x_t^{(2)}$ 与 c_i 的关系

Fig. 6 Relationship between $x_t^{(2)}$ and c_i

4 结束语

本文研究了企业面对原材料价格波动情况下的原材料采购和成品生产决策. 与以往研究的主要区别在于，所研究的企业在同时面临市场需求波动和原材料价格波动的情况下，一方面需要进行原材料的库存决策，另一方面还需要进行由原材料加工生产成品的生产决策. 同时，研究的问题是多周期库存问题，并且在研究中考虑了原材料的转卖. 本文的研究可以得出以下 4 个主要结论.

1) 原材料库存决策满足动态基库存策略，但该策略与传统的基库存策略不同. 当原材料初始库存大于某临界值时，多出的库存将会被销售而不会继续持有至下一个周期. 由于原材料价格波动可能较为复杂，当企业采用不准确的价格预期做出决策的话，有可能会导致较大的损失: 设想当前周期企业储存了较多的原材料库存，若下个周期原材料价格低于当前周期的价格时，企业将不可避免地蒙受损失(相反的情况类似) . 因此，为了平衡可能导致的损失，在每个周期，企业将设定原材料期末库存数量的基础值. 该基库存策略具备一定的稳健性，因为无论原材料如何变动，每个周期的基础值不会偏离太多.

2) 成品的生产决策满足(修正的) 基库存策略: 存在某一个临界值，当成品的初始库存小于该临界值时，成品生产数量为临界值减去初始库存; 当成品初始库存大于该临界值时，企业将不进行生产. 由于原材料和成品库存同时决策，因此，为保证运营的平衡，企业的成品生产必须与原材料库存决策一致才能使收益最大化.

3) 成品价格随着成品初始库存的增加而下降. 当成品初始库存增加时，意味着企业将有更多的成品销往市场，因此，为保证自身的销售量，企业需要制定较低的成品价格从而吸引更多的需求.

4) 根据算例发现了数学证明之外的结果. 当成品库存成本趋向于 0 时，其生产决策数量将收敛于某一个值. 同时，可以看出原材料价格变化分别影响了原材料和成品库存的最优决策.

后续的研究可以从如下几个方向考虑: 1) 将本研究与长期合同及组合采购方式下的研究结论进行对比，探究两种情形下生产商赢利性的差异; 2) 很多文献研究产品的库存成本是和其价格相关的，因此本文的另一个后续研究方向可以考虑当原材料库存成本与原材料价格存在某种关系时，模型的最优策略会发生怎样的变化.

参 考 文 献:

[1] 郑利鹏. 暗战铁矿石期货 [N] . 中国投资，2012 年 12 月 04 日.
Zheng Lipeng. Secret war on iron ore futures [N] . Chinese Investment，Dec. 4，2012. (in Chinese)

[2] Fabian T，Fisher J，Sasieni W，et al. Purchasing raw material on a fluctuating market [J] . Operations Research，1959，7 (1) : 107 – 122.

[3] Taylor S，Bradley C. Optimal ordering strategies for announced price increases [J] . Operation Research，1985，33(2) : 312 – 325.

[4] Golabi K. Optimal inventory policies when ordering prices are random [J] . Operation Research，1985，33(3) : 575 – 588.

[5] Gurnani H. Optimal ordering policies in inventory systems with random demand and random deal offerings [J] . European

Journal of Operational Research，1996，95(2)：299－312.

[6] Wang Y. The optimality of myopic stocking policies for systems with decreasing purchasing prices [J]. European Journal of Operational Research，2001，133(1)：153－159.

[7] Gavirneni S. Periodic review inventory control with fluctuating purchasing costs [J]. Operations Research Letters，2004，32(4)：374－379.

[8] Berling P，Rosling K. The effect of financial risks on inventory policy [J]. Management Science，2005，51(12)：1804－1815.

[9] Berling P，Martínez-de-Albéniz V. Optimal inventory policies when purchase price and demand are stochastic [J]. Operations research，2011，59(1)：109－124.

[10] Li C，Kouvelis R. Flexible and risk-sharing supply contract under price uncertainty [J]. Management Science，1999，45(10)：1378－1398.

[11] Sethi S，Yan H，Zhang H. Quantity flexibility contracts：Optimal decisions with information updates [J]. Decision Science，2004，35(4)：691－712.

[12] Feng Q，Sethi S. Procurement Flexibility Under Price Uncertainty [M] // Edwin Cheng T C，Tsan-Ming Choi，eds. Innovative Quick Response Programs in Logistics and Supply Chain Management，Berlin：Springer-Verlag，2010.

[13] Boyabatli O，Kleindorfer P，Koontz S. Integrating long-term and short-term contracting in beef supply chains [J]. Management Science，2011，57(10)：1771－1787.

[14] 李建斌，杨瑞娜. 有限供应的现货市场与期权合约下的采购策略 [J]. 管理科学学报，2011，14(7)：18－26.
Li Jianbin，Yang Ruina. Procurement policy based on portfolio contract and spot market with limited capacity [J]. Journal of Management Sciences in China，2011，14(7)：18－26. (in Chinese)

[15] Chen Y，Xue W，Yang J. Technical note-optimal inventory policy in the presence of a long-term supplier and a spot market [J]. Operations Research，2013，61(1)：88－97.

[16] Secomandi N，Kekre S. Optimal energy procurement in spot and forward markets [J]. Manufacturing & Service Operations Management，2014，16(2)：270－282.

[17] 赵　霞，吴方卫，蔡　荣. 随机产出与需求下二级供应链协调合同研究 [J]. 管理科学学报，2014，17(8)：34－47.
Zhao Xia，Wu Fangwei，Cai Rong. Research on coordination of two-stage supply chain under random yield and random demand with contracts [J]. Journal of Management Sciences in China，2014，17(8)：34－47. (in Chinese)

[18] 倪得兵，梁旭晫，唐小我. 相关双边汇率波动与供应链中汇率风险传导 [J]. 管理科学学报，2015，18(10)：1－13.
Ni Debing，Liang Xuzhuo，Tang Xiaowo. The correlation of two-sided exchange rate volatilities and transmission of exchange rate risk in supply chains [J]. Journal of Management Sciences in China，2015，18(10)：1－13. (in Chinese)

[19] Masson P R. Exchange rate regime transitions [J]. Journal of Development Economics，2001，64(2)：571－586.

[20] Lee J，Ren L. Vendor-managed inventory in a global environment with exchange rate uncertainty [J]. International Journal of Production Economics，2011，130(2)：169－174.

[21] Shapiro A，Dentcheva D. Lectures on Stochastic Programming：Modeling and Theory [M]. Philadelphia：SIAM，2014：447.

[22] Li Q，Zheng S. Joint inventory replenishment and pricing control for systems with uncertain yield and demand [J]. Operation Research，2006，54(4)：696－705.

[23] Bernstein F，Li Y，Shang K. A simple heuristic for joint inventory and pricing models with lead time and backorders [J]. Management Science，2015，62(8)：2358－2373.

[24] Federgruen A，Heching A. Combining pricing and inventory control under uncertainty [J]. Operation Research，1999，47(3)：454－475.

[25] Heyman D, Sobel M. Stochastic Models in Operations Research [M]. New York: McGraw-Hill, 1984: 547.
[26] Topkis D. Supermodularity and Complementarity [M]. Princeton: Princeton University Press, 1998: 288.
[27] Federgruen A, Zipkin P. An inventory model with limited production capacity and uncertain demands II. The discounted-cost criterion [J]. Mathematics of Operations Research, 1986, 11(2): 208 - 215.

Joint inventory and production decisions under fluctuating material costs

FU Ke[1], *LIANG Gui-tian*[2], *WANG Xia-yang*[1*]
1. Lingnan (University) College, SunYat-sen University, Guangzhou 510275, China;
2. CUHK Business School, The Chinese University of Hong Kong, Hong Kong, China

Abstract: Manufacturing firms are often faced with frequent price fluctuations of both raw materials and the final products. Therefore, it has become increasingly difficult for the firms to make proper procurement and production decisions. This paper studies the inventory and production decisions for a manufacturer who is faced with fluctuating material costs. A multi-period inventory and production decision model is developed based on the assumptions that the fluctuation of material costs follows the Markov process and the market demand for the final product is a price-dependent random variable. The optimal dynamic inventory and production policies are then analyzed. One unique feature of the model is that the manufacturer can sell raw materials. Meanwhile, the manufacturer has to make inventory decisions of the final product. It is shown that the optimal production and inventory decisions are of base-stock type. Furthermore, several structural properties are developed to further characterize the detailed policy structure. Extensive numerical studies verify the optimal policies and demonstrate how the model parameters affect the optimal decisions.

Key words: price fluctuation; procurement management; inventory decision; base-stock policy