

厚尾分布情形下的信用资产组合风险度量^①

陈荣达^{1,2,3}, 王 泽¹, 李泽西¹, 王聪聪¹, 余乐安⁴, 何牧原⁵

(1. 浙江财经大学金融学院, 杭州 310018; 2. 浙江财经大学财富管理与量化投资协同创新中心, 杭州 310018;
3. 浙江省政府管制与公共政策研究中心, 杭州 310018; 4. 北京化工大学经济管理学院, 北京 100029;
5. 清华大学经济管理学院, 北京 100084)

摘要: 本文研究风险因子多元厚尾分布情形下的信用资产组合风险度量问题. 用多元 t-Copula 分布来描述标的资产收益率分布的厚尾性, 同时将三步重要抽样技术发展至基多元 t-Copula 分布的资产组合模型中, 拓宽和丰富了信用资产组合风险度量模型. 同时, 并运用了非线性优化技术中的 Levenberg-Marquardt 算法来解决重要抽样技术中风险因子期望向量估计. 模拟结果表明该算法比普通 Monte Carlo 模拟法的计算效率更有效, 且能很大程度上减少所要估计的损失概率的方差, 从而更精确地估计出信用投资组合损失分布的尾部概率或给定置信度下组合 VaR 值.

关键词: 资产组合; 厚尾分布; 结构模型; 重要抽样技术

中图分类号: F830.5 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2017)03-0046-10

0 引言

对信用资产组合的风险度量研究一直以来都是学界、工业界关注的重点. 目前大多数信用资产组合风险度量模型, 如 Morgan Chase 的 CreditMetrics 模型、McKinsey 的 CreditPortfolio View 模型、KMV 的 Portfolio Manager 模型、Credit Suisse First Boston 的 CreditRisk + 模型, 应用 Monte Carlo 模拟技术计算信用投资组合损失分布的尾部概率或给定置信度下总风险 VaR 值, 然而由于信用等级比较高的信用资产违约概率比较低, 计算时通常阈值比较大时, 这时产生组合损失值大于阈值的样本比较稀少, 为了得到精确的估计值需要产生大量的样本, 这增加了计算时间和工作量, 大大影响了模拟效率.

为此, Merino 和 Nyfeler^[1] 提出了一个新的计算组合损失分布的方法: 快速傅里叶变换与 Monte Carlo 方法相结合, 这种方法能够快速又准

确地计算整个组合损失分布. Grundke^[2] 基于 CreditMetrics 模型的基础之上, 运用了 Fourier 变换技术度量出信用资产组合损失分布的尾部概率. Glasserman 和 Li^[3] 在多元正态 Copula 的框架下, 为了克服极小概率违约事件发生概率估计的困难, 提出了把两步重要抽样技术发展至信用投资组合度量模型, 第一步, 通过对反映组合风险的多个信用风险因子的联合分布进行概率测度变化, 从而改变多个信用风险因子的期望向量, 在相应区域产生更多的样本, 第二步, 在给定的信用风险因子条件下, 对条件违约概率进行概率测度的指数变化, 使得该情形下不再是稀有事件 Monte Carlo 模拟, 从而减少 Monte Carlo 模拟计算工作量. 在此基础上, 为了进一步减少模拟估计的误差, 又能达到快速模拟的目的, Glasserman 等^[4] 应用非线性优化技术中的背包问题来解决两步重要抽样技术中的信用风险因子的期望向量确定问

① 收稿日期: 2016-10-19; 修订日期: 2016-10-30.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71171176; 71471161; 71433001; 71631005). 本文入选“第十三届全国青年管理科学与系统科学学术会议(2015年, 西安) 优秀论文”.

作者简介: 陈荣达(1971—), 男, 浙江温州人, 博士, 教授. Email: rongdachen@163.com

题.另外, Glasserman^[5]也在多元正态 Copula 的框架下,分别使用了同质的单因子近似方法、启发式鞍点法、数值积分的拉普拉斯变换方法来近似估计信用资产组合损失分布的尾部概率,并指出近似估计尾部概率的精度关键取决于用来刻画不同交易对手相依关系的多元正态 Copula 的相关结构. Grundke^[6]在信用风险因子的联合分布为多元正态分布的框架下,把 Glasserman 和 Li^[3]提出的两步重要抽样技术发展到了 Grundke^[2]的信用资产组合市场风险度量模型中,建立了基于两步重要抽样技术的信用资产组合风险度量模型.

上述这些模型的缺陷在于对于信用资产组合损失分布的尾部概率是基于多元正态 Copula 进行的,然而在两个随机变量之间的线性相关系数小于1的情形下正态 Copula 的尾部相依系数为零,意味着当边际违约概率比较少时,这将导致违约的示性函数是渐近独立的,这和事实上的相关违约不相吻合.而且,大量的实证表明与结构模型中的相关违约有着内在联系的资产收益率的分布尾部经常厚过正态分布的尾部,显示出尖峰厚尾. Heyde 和 Kou^[7]、Aas 和 Haff^[8]、Behr & Pötter^[9]分别运用了不同方法和数据发现这些金融变量表现出高峰和厚尾特征.这意味着传统的正态 Copula 假设不能够真正反映这一特征.

另外, Rosenberg & Schuermann^[10]、Kole 等^[11]研究指出 Copula 函数可以直观容易的描述违约组合的相关性,但是对于小样本的情况下,选择正确的函数形式是不容易的,同时由于违约数据之间往往存在非线性的相关关系,如何刻画组合之间的相关关系至关重要.基于多元正态 Copula 不能够很好地捕获信用风险因子的相依关系,而多元 t-分布可有多元正态分布和 χ^2 分布组成的混合结构来描述,这个特点对风险因子极值相依提供了一个有用的解释(参见文献[12-15]).

此外, Glasserman 等^[16]、Johannes 等^[17]、Kamdem^[18]、Broda^[19]研究发现,度量资产组合市场风险时用 t-分布来刻画风险因子回报的厚尾特征是比较合适的方法.而 Kang 和 Shahabuddin^[12]、Bassamboo 等^[13]、Chan 和 Kroese^[14]、Reitan 和 Aas^[15]、Kostadinov^[20]把以上在多元 t-Copula 框架下度量资产组合市场风险模型的思想运用到信用风险度量,把两步抽样技术推进到三步重要抽样

技术,推导出 t-Copula 两步重要抽样技术下的组合尾部概率的计算公式.

但应用重要抽样技术对信用风险因子进行概率测度变换后,这些模型都会遇到对信用风险因子的期望向量估计优化问题,但如何解决该问题还待完善.本文运用了非线性优化技术中的 Levenberg-Marquardt 算法来解决这个问题,该算法同时具备有牛顿算法、梯度法的优点.

基于以上分析,本文基于 Glasserman 和 Li^[3]把共同风险因子的相依关系转换为不同资产的违约示性函数的相依关系来刻画的思想,用多元 t-Copula 分布来描述标的资产收益率分布的厚尾性,把两步抽样技术推进到三步重要抽样技术,将三步重要抽样技术发展到了基于多元 t-Copula 分布的资产组合模型中,同时,运用了非线性优化技术中的 Levenberg-Marquardt 算法来解决三步重要抽样技术中风险因子期望向量估计.

1 基于 t-Copula 的组合信用风险度量

在评估和管理金融资产的风险时,金融市场上发生的历次金融危机都说明了金融资产之间的那种互相联动性是很有考虑的必要的,独立地分析每个资产的信用风险是远远不够的.因此,用投资组合的视角来考察是信用组合风险管理的核心.一般来说,信用组合可以被分为两种:一种是同质组合,另一种是异质组合.在新巴塞尔协议的资本监管框架下,同一信用级别中的信用资产被认为是同质的,不同信用级别中的信用资产被认为是异质的.即同质组合中的每个债务人的边际违约概率都是一样的,异质组合中的每个债务人的边际违约概率是不相等的.本文研究的重点是异质组合的信用风险.为了更好的描述模型,引入了下面几个变量符号.

m : 表示信用组合中的可违约证券个数.

D_i : 表示示性函数,若第 i 个证券发生违约,则取 1, 否则为 0.

p_i : 表示第 i 个债务人的边际违约概率.

c_i : 表示第 i 个债务人的风险暴露值.

s_i : 表示第 i 个债务人违约损失率.

L : 表示信用组合的总损失值.

假设一个组合中由 m 个债务人组成,那么组合的总损失就为

$$L = \sum_{i=1}^m L_i = \sum_{i=1}^m c_i s_i D_i \tag{1}$$

其中 s_i 违约损失率是指当一旦债务人违约将会给债券人所带来的损失程度,其取值范围介于0到1之间.

建立联合违约模型的最终目的是估计损失分布尾部概率 $P(L > x)$,尤其是当损失阈值 x 比较大时对应的事件 $\{L > x\}$ 是比较稀少,如何估计出此时的损失分布尾部概率 $P(L > x)$ 是本文的研究目标,即估计出

$$P(L > x) = E[I(L > x)] \tag{2}$$

其中 $I(\cdot)$ 是示性函数.

在建立联合违约模型的过程中,需要引入组合中每个债务人之间,即示性指标 Y_i 之间的相关性结构.在正态 Copula 模型中,由经典的关于公司价值的结构模型这种相依性是通过一个多元正态向量 $W = (W_1, \dots, W_m)$ 引入的.设定两个指标

$$W_i^T = \frac{\ln(V_T^i/V_0^i) - m_i T}{\sigma_i} \text{ (标准化收益)} \tag{3}$$

$$B_i = \frac{\ln(L_i) - m_i T}{\sigma_i} \text{ (标准化账面价值)} \tag{4}$$

其中 V_0^i 表示第 i 个债务人所属公司资产在 0 时刻的价值, V_T^i 表示第 i 个债务所属公司资产在 T 时刻的价值, 违约杠杆率 $L_i = \frac{K_i}{V_0}$, K_i 为第 i 个公司的债务 $i = 1, 2, \dots, m$.

然后,每个违约示性函数就可以表示成

$$D_i = I[W_i < B_i] \tag{5}$$

则违约概率

$$P(D_i = 1) = P(W_i < B_i) = p_i \tag{6}$$

这就是说,如果 $W_i \leq \Phi^{-1}(p_i)$ (其中 p_i 是第 i 个债务人的边际违约概率),那么第 i 个债务人就视作是违约的.通过这种关系的构建, W_i 之间的相关关系决定了 Y_i 之间的相关关系.而 W_i 之间潜在的相关性可以通过如下形式的因子模型来设定

$$W_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} Z_k + b_i \varepsilon_i \tag{7}$$

其中 Z_k 是系统公共风险因子, ε_i 是第 i 个债务人的特殊风险因子. a_{i1}, \dots, a_{in} 是第 i 个债务人的因子载荷系数 $b_i = \sqrt{1 - (a_{i1}^2 + \dots + a_{in}^2)}$. 系风险

因子一般代表了一些经济含义,例如市场因素,行业因子以及区域分类等.假设系统性因子均相互独立,并且系统因子和非系统因子均服从 $N(0, 1)$. 令 $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ 在 $Z = z$ 的条件下,违约因子是相互独立的,第 i 个债务人条件违约概率为

$$p_i(z) = P(D_i = 1 | Z = z) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sum_{k=1}^n a_{ik} Z_k}{b_i}\right) \tag{8}$$

正态 Copula 模型中,违约因子之间的相关性通过多元正态向量 (W_1, \dots, W_m) 建立. 如果

$$W_i \leq \Phi^{-1}(p_i) \tag{9}$$

债务人 i 将发生违约,其中 p_i 是第 i 个债务人的边际违约概率.那么 W_i 之间的相关关系就通过以下形式连接而成

$$W_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} Z_k + b_i \varepsilon_i \tag{10}$$

鉴于运用多元正态 Copula 来描述相关违约的缺陷,进一步,违约因子之间的相关性通过多元 t -分布向量 (W_1, \dots, W_m) 建立.利用多元 t -分布可有多元正态分布和 χ^2 分布组成的混合结构来描述,式(10)多元正态的模型变为

$$W_i = \sqrt{\frac{v}{V}} \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} Z_k + b_i \varepsilon_i \right) \tag{11}$$

其中 $a_{ik}, Z_k, b_i, \varepsilon_i$ 和式(7)中定义的一样,其中 $V \sim \chi_v^2$ 是一个服从自由度为 v 的卡方分布的变量.因此如果

$$W_i \leq t_v^{-1}(p_i) \tag{12}$$

那么第 i 个债务人违约将发生违约,其中 t_v^{-1} 为自由度为 v 的 t -分布的累积分布函数.在 $Z = z, V = v$ 的条件下,违约因子相互独立,第 i 个债务人条件违约概率为

$$p_i(z) = P(D_i = 1 | Z = z, V = v) = \Phi\left(\frac{\sqrt{\frac{V}{v}} t_v^{-1}(p_i) - \sum_{k=1}^n a_{ik} Z_k}{b_i}\right) \tag{13}$$

1.1 基于重要抽样技术的 Monte Carlo 模拟

Monte Carlo 模拟方法经常被用来估算式(2)中的损失分布尾部概率 $P(L > x)$,然而由于 VaR 值的估计(对应的尾部概率的估计的阈值)是在

极小概率事件发生情形下进行的, 计算时通常阈值比较大时, 会导致 $I(L > x) = 0$ 出现比较高的频率, 事件 $\{L > x\}$ 比较稀少, 即这时产生组合损失值大于阈值的样本比较稀少. 为了取得理想的模拟效果, 需要产生大量的样本, 大大影响了模拟效率.

而重要抽样技术是特别适合稀有事件模拟, 文献 Glasserman 等^[21]、Glasserman 等^[16]、Glasserman 和 Li^[3]、Grundke^[6] 关于重要抽样技术有详细的讨论.

运用重要抽样技术估计组合损失分布的尾部概率的关键, 就是如何选择一个合适违约概率, 使得稀少事件 $\{L > x\}$ 更有可能发生, 不再是稀少事件. 运用重要抽样技术时, 模拟计算时违约概率是从这个合适违约概率 q_i 取样, 而不是从原来的违约概率 p_i 取样. 在重要抽样技术情形下, 式 (2) 变为

$$P(L > x) = \tilde{E} \left[I(L > x) \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{q_i} \right)^{D_i} \left(\frac{1-p_i}{1-q_i} \right)^{1-D_i} \right] \quad (14)$$

其中 \tilde{E} 表示取样在新的违约概率 q_i 下的期望, $\prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{q_i} \right)^{D_i} \left(\frac{1-p_i}{1-q_i} \right)^{1-D_i}$ 为原来的分布 (D_1, D_2, \dots, D_n) 与概率测度变换后新的分布的似然比. 因此, 当违约示性函数从新的违约概率 q_i 取样时, $I(L > x) \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{q_i} \right)^{D_i} \left(\frac{1-p_i}{1-q_i} \right)^{1-D_i}$ 是 $P(L > x)$ 的一个无偏估计.

1.2 指数扭曲

指数扭曲和对应的重要抽样技术经常出现在稀有事件模拟中 (参见文献 [22] 和文献 [5]). 对式 (1) 的组合损失 L 进行指数扭曲, 假设 θ 是所有 i 的指数扭曲参数, 定义

$$q_i = p_{i,\theta} = \frac{p_i e^{\theta c_i}}{1 + p_i (e^{\theta c_i} - 1)} \quad (15)$$

如果 $\theta > 0$, 那么新的分布函数值将大于原先的 p_i ; 若 $\theta = 0$, 那么违约概率没有发生变化. 经过指数扭曲之后对应的似然比 $\prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{q_i} \right)^{D_i} \times \left(\frac{1-p_i}{1-q_i} \right)^{1-D_i}$ 就可以变为

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{q_{i,\theta}} \right)^{D_i} \left(\frac{1-p_i}{1-q_{i,\theta}} \right)^{1-D_i} = \exp(-\theta L + \psi(\theta)) \quad (16)$$

其中 $\psi(\theta) = \ln E(e^{\theta L}) = \sum_{i=1}^m \ln(1 + p_i(e^{\theta c_i} - 1))$. 那么若 L 均从 $p_{i,\theta}$ 中抽样产生, 对于任何指数扭曲参数 θ , 估计值 $I\{L > x\} e^{-\theta L + \psi(\theta)}$ 都是 $P\{L > x\}$ 的无偏估计. 式 (16) 意味着对式 (15) 中的违约概率进行指数扭曲和对组合损失 L 进行指数扭曲是等价的.

1.3 方差减少分析和指数扭曲参数确定

下面将分析指数扭曲后的 $P(L > x)$ 的估计值方差如何减少以及如何确定指数扭曲参数 θ .

为了减少 $P(L > x)$ 的估计值方差, 自然想到可最小化在重要抽样下 $I\{L > x\} e^{-\theta L + \psi(\theta)}$ 的二阶矩

$$\begin{aligned} m_2(x, \theta) &= E_\theta [(e^{-\theta L + \psi(\theta)} I(L > x))^2] \\ &= E_\theta [e^{-2\theta L + 2\psi(\theta)} I(L > x)] \leq e^{-2\theta x + 2\psi(\theta)} \end{aligned} \quad (17)$$

其中 E_θ 表示重要抽样情形下指数扭曲参数为 θ 的期望. 然而, 直接找一个 $\theta (\theta \geq 0)$ 最小化 $m_2(x, \theta)$ 是比较困难的. 虽然直接最小化 $m_2(x, \theta)$ 是困难的, 但最小化式 (17) 的上确界是比较容易的. 而且由于 θ 的选取是减少方差, 因此当 $m_2(x, \theta)$ 最小, 对应的 θ 最优. 根据前面分析, 可以通过计算其上确界最小值求得对应的 θ . 这等价于最小化 $\psi(\theta) - \theta x (\theta \geq 0)$. 由于 $\psi(\theta)$ 是严格凸函数且经过原点, 因此通过最小化式 (17) 的上确界可以确定指数扭曲参数 θ , 即

$$\theta_x = \begin{cases} \text{非线性方程 } \psi'(\theta) = x \text{ 的解, } x > \psi'(0) \\ 0, & x \leq \psi'(0) \end{cases} \quad (18)$$

另外, 由式 (18) 得到的 θ_x 在稀有事件模拟时还有另外一层的含义. 由于 L 的累积量母函数 (矩母函数的对数) $\psi(\theta) = \ln E(e^{\theta L})$, $E[\exp(\theta L)] = \exp[\psi(\theta)]$ 及概率测度的指数扭曲的定义, 则有

$$\begin{aligned} \psi'(\theta) &= \frac{E[L \exp(\theta L)]}{E[\exp(\theta L)]} = \frac{E[L \exp(\theta L)]}{\exp(\psi(\theta))} \\ &= E[L \exp(\theta L - \psi(\theta))] \\ &= E_\theta [L \exp(\theta L - \psi(\theta)) \exp(-\theta L + \psi(\theta))] \\ &= E_\theta [L] \end{aligned} \quad (19)$$

结合式(18)和式(19),在 $\theta = \theta_x$ 情形下, $E_{\theta}[L]$ 的期望为 x ,说明在经过概率测度变换后 L 的期望为 x ,说明运用重要抽样技术时组合损失的期望值接近阈值 x ,这进而说明在重要抽样情形下,事件 $\{L > x\}$ 不再为稀少事件,而且又能减少 $P(L > x)$ 的估计值的方差($\theta = \theta_x$ 情形下 θ_x 最小化了二阶矩的上界 $\psi_x(\theta)$),同时 $\{L > x\} e^{-\theta L + \psi(\theta)}$ 又是 $P(L > x)$ 的一个无偏估计.

1.4 三步重要抽样

为了进一步减少方差,在基于t-Copula的信用资产组合风险度量模型中,本文进行三步重要抽样,即从对违约概率 p_i 进行指数扭曲延伸到对系统因子 Z 和卡方分布的随机变量 V 进行指数扭曲.

第一步重要抽样,对违约概率 p_i 进行概率测度变换.在 $Z = z, V = z$ 的条件下,违约示性函数 D_1, D_2, \dots, D_n 是相互独立,第 i 个债务人条件违约概率 $p_i(Z, V)$ 由式(13)给出.因此,应用 $p_i(Z, V)$ 替换 p_i 来求解非线性方程(18)的 $\theta_x(Z, V)$,然后分别把指数扭曲后的条件违约概率 $p_i(Z, V)$ 和指数扭曲参数 $\theta_x(Z, V)$ 和代入式(15),可得

$$p_{i, \theta_x}(Z, V) = \frac{p_i(Z, V) e^{\theta_x(Z, V) c_i}}{1 + p_i(Z, V) (e^{\theta_x(Z, V) c_i} - 1)} \quad (20)$$

由式(16),违约概率经指数扭曲后对应的似然比变为

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \prod_{i=1}^m \left(\frac{p_i(Z, V)}{p_{i, \theta_x}(Z, V)} \right)^{D_i} \left(\frac{1 - p_i(Z, V)}{1 - p_{i, \theta_x}(Z, V)} \right)^{1 - D_i} \\ &= \exp[-\theta_x(Z, V)L + \psi(\theta_x(Z, V))] \end{aligned} \quad (21)$$

第二步重要抽样,对系统因子 Z 进行概率测度变换.经过指数扭曲后系统因子 Z 变成期望向量为 μ (期望向量估计优化问题下节说明)和协方差矩阵为单位矩阵为 I 的多元正态分布.即系统因子 Z 从多元正态分布 $N(\mu, I)$ 取样,而且系统因子 Z 经概率测度变换后对应的似然比为

$$\begin{aligned} \ell_Z &= \frac{(2\pi)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}Z^T Z\right)}{(2\pi)^{-\frac{d}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(Z - \mu)^T (Z - \mu)\right]} \\ &= \exp\left(-\mu^T Z + \frac{\mu^T \mu}{2}\right) \end{aligned} \quad (22)$$

第三步重要抽样,对随机变量 V 进行概率测度变换.由于在模拟中要产生随机变量 Y 的随机数,本文先研究 V 经过概率测度的指数变化后的概率密度情况.设 $f(V)$ 为 χ_v^2 分布的概率密度;假设存在指数变化参数 α ,把概率密度 $f(V)$ 转换为 $f_\alpha(V)$,这样随机变量 V 经概率测度变换后对应的似然比为

$$\ell_V = \frac{f(V)}{f_\alpha(V)} = \exp(-\alpha V + \psi_V(\alpha)) \quad (23)$$

其中 $\psi_V(\alpha)$ 为 V 的累积量母函数.

利用 V 的累积量母函数 $\psi_V(\alpha)$ 和 V 的矩母函数 $\phi_V(\alpha)$ 的关系 $\psi_V(\alpha) = \ln[\phi_V(\alpha)]$ 以及 $\phi_V(\alpha) = (1 - 2\alpha)^{-v/2}$,并结合式(23)得

$$\begin{aligned} f_\alpha(V) &= f(V) \exp(\alpha V - \psi_V(\alpha)) \\ &= \frac{V^{v/2-1} \exp(-V/2)}{2^{v/2} \Gamma(v/2)} \exp(\alpha V - \psi_V(\alpha)) \\ &= \frac{V^{v/2-1} \exp\left(-\left(\frac{1-2\alpha}{2}\right)V\right)}{2^{v/2} \Gamma(v/2)} \exp(-\psi_V(\alpha)) \\ &= \frac{V^{v/2-1} \exp\left(-\left(\frac{1-2\alpha}{2}\right)V\right)}{2^{v/2} \Gamma(v/2)} \frac{1}{\phi_V(\alpha)} \\ &= \frac{V^{v/2-1} \exp\left(-\left(\frac{1-2\alpha}{2}\right)V\right)}{2^{v/2} \Gamma(v/2)} (1 - 2\alpha)^{v/2} \\ &= \frac{V^{v/2-1} \exp\left(-\left(\frac{1-2\alpha}{2}\right)V\right)}{\Gamma(v/2)} \left(\frac{1-2\alpha}{2}\right)^{v/2} \\ &= \left(\frac{1-2\alpha}{2}\right)^{v/2} \frac{V^{v/2-1}}{\Gamma(v/2)} \exp\left(-\left(\frac{1-2\alpha}{2}\right)V\right) \\ &= \left(\frac{2}{1-2\alpha}\right)^{-v/2} \frac{V^{v/2-1}}{\Gamma(v/2)} \times \\ &\quad \exp\left(-\frac{V}{2/(1-2\alpha)}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

可见 $f_\alpha(V)$ 为尺度参数为 $\frac{2}{1-2\alpha}$ 、形状参数为 $v/2$ 的伽玛(Gamma)分布概率密度,即 V 经过概率测度的指数变化后变成了伽玛(Gamma)分布.因此进行重要抽样和分层抽样相结合情形模拟时,通过伽玛(Gamma)分布产生 Y 的随机数.

应用式(21)、式(22)、式(23),可得到组合损失分布尾部概率

$$\begin{aligned}
P(L > x) &= p(Y_1 = 1, Y_2 = 1, \dots, Y_n = 1) \\
&= E(p[Y_1 = 1, Y_2 = 1, \dots, Y_n = 1 | Z, V]) \\
&= E(p[L > x | Z, V]) \\
&= E_{\theta_x(Z, V)} [I(L > x) \frac{L}{Z} \frac{V}{V}] \\
&= E_{\theta_x(Z, V)} \{ I(L > x) e^{[-\theta_x(Z, V) L + \psi(\theta_x(Z, V))] } \times \\
&\quad e^{-\mu^T Z + \mu^T \mu / 2} e^{(-\alpha V + \psi_V(\alpha))} \} \quad (25)
\end{aligned}$$

因此,

$I(L > x) \times e^{[-\theta_x(Z, V) L + \psi(\theta_x(Z, V))] } e^{-\mu^T Z + \mu^T \mu / 2} e^{(-\alpha V + \psi_V(\alpha))}$ 是 $P(L > x)$ 的一个无偏估计且指数扭曲参数为 $\theta_x(Z, V)$.

1.5 期望向量估计优化方法

应用三步重要抽样技术对系统因子进行概率测度变换后,最关键一步是对系统因子的期望向量估计,即如何估计系统因子经概率测度变换后对应的多元正态 Z 的期望向量 μ .

根据方差分解定理,可以得到

$$\begin{aligned}
Var(\hat{p}_x) &= E(Var[\hat{p}_x | Z, V]) + \\
&\quad Var(E[\hat{p}_x | Z, V]) \quad (26)
\end{aligned}$$

其中 \hat{p}_x 为 $P(L > x)$ 的估计量.

根据上面的分析,本文已经最小化了重要抽样情形下式(17)中的二阶矩上界,即 $Var(E[\hat{p}_x | Z, V])$ 已经取得了最小值,因此为了使得方差最小,应该使得方差分解中的第二项 $Var(E[\hat{p}_x | Z, V])$ 取得最小.

由于 $E[\hat{p}_x | Z, V] = P(L > x | Z, V)$, 由全期望公式可得

$$\begin{aligned}
P(L > x) &= \iint P(L > x | Z, V) \times \\
&\quad f_Z(Z) f_V(V) dZ dV \quad (27)
\end{aligned}$$

其中 $f_Z(Z)$ 是 Z 的概率密度函数, $f_V(V)$ 是 V 的概率密度函数. 从式(27)可以看出,对 Z 和 V 选择合适的重要抽样分布可减少 $P(L > x | Z, V)$ 估计方差.

根据零方差重要抽样技术, Z 取样的密度函数比例于式(27)中被积函数,即 Z 从以下密度函数中抽样: $Z | \rightarrow P(L > x | Z, V) e^{-Z^T Z / 2} \times \frac{1}{2^{v/2} \Gamma(v/2)} V^{v/2-1} e^{-V/2}$. 由于 Z 和 V 相互独立,根据 Juneja 和 Shahabuddin^[23] 研究成果, Z 等价于从以下密度函数中抽样: $Z | \rightarrow P(L > x | Z,$

$V) e^{-Z^T Z / 2}$. 这样,为了求得最优的 Z 的期望向量,等同于求以下优化问题

$$\max_Z P(L > x | Z, V) e^{-Z^T Z / 2} \quad (28)$$

想得到式(28)的精确解是比较困难的,但 Kang 和 Shahabuddin^[12]、Kostadinov^[24]、Bassamboo 等^[13]、Chan & Kroese^[14]、Reitan 和 Aas^[15] 分别运用了如高斯牛顿法等数值方法把这个问题简单化,从而近似计算出 Z 的期望向量. 然而,这些算法在计算时有收敛速度比较慢的缺点,本文运用了非线性优化技术中的 Levenberg-Marquardt 算法来解决这个问题,该算法归属于非线性最小二乘算法,而且该算法同时具备有高斯牛顿算法、梯度法的优点,他不但具有最小误差逼近优点同时还以其计算的高精度著称,是通过梯度求极值的一类算法,被形象描述为“爬山”法的一种. 因此,本文在求解最优的 Z 的期望向量时,采用了 Levenberg-Marquardt 算法来求解 (Levenberg-Marquardt 算法具体步骤可参见文献 [25] 和文献 [26]).

1.6 t-Copula 组合风险重要抽样的算法

步骤 1 求解得出最优的 Z 的期望向量 u .

步骤 2 从尺度参数为 $\frac{2}{1-2\alpha}$ 、形状参数为 $v/2$ 的伽玛分布中随机产生样本.

步骤 3 从 $N(u, I)$ 中随机产生出样本值.

步骤 4 通过式(18)求解最优的 $\theta_x(Z, V)$.

步骤 5 计算旋转的条件违约概率值

$$p_{i, \theta_x}(Z, V) = \frac{p_i(Z, V) e^{\theta_x(Z, V) c_i}}{1 + p_i(Z, V) (e^{\theta_x(Z, V) c_i} - 1)} \text{, 并}$$

确定示性函数值.

步骤 6 计算 $L = \sum_{i=1}^m L_i = \sum_{i=1}^m c_i \times s_i \times D_i$ 以及估算值

$$I(L > x) e^{[-\theta_x(Z, V) L + \psi(\theta_x(Z, V))] } e^{-\mu^T Z + \mu^T \mu / 2} e^{(-\alpha V + \psi_V(\alpha))} \quad (29)$$

2 基于 t-Copula 的组合信用风险度量的数值模拟

这节将通过数值计算讨论和比较在正态 Copula 和 t-Copula 情形下采用普通 Monte Carlo 模拟和基于重要抽样的 Monte Carlo 模拟之间的

数值比较,即基于正态 Copula 模型和基于 t-Copula 模型下组合损失分布尾部概率的比较,并且将对计算效率进行相互比较.

2.1 普通 Monte Carlo 模拟

可以通过 Monte Carlo 模拟得到组合的信用风险损失分布,具体步骤如下

1) 正态 Copula 模型下的 Monte Carlo 模拟.

步骤 1 随机产生服从 $N(0, 1)$ 公共因子值.

步骤 2 计算条件违约概率 $p_i(z)$.

步骤 3 根据违约概率求得组合的损失值

$$L = \sum_{i=1}^m L_i = \sum_{i=1}^m c_i \times s_i \times D_i.$$

步骤 4 计算估计值 $1\{L > x\}$

步骤 5 重复上述步骤 1 ~ 410 000 次,最后求得平均值.

2) t-Copula 模型下的 Monte Carlo 模拟

步骤 1 随机产生服从 $t(v)$ 的公共因子值.

步骤 2 计算条件违约概率 $p_i(z)$.

步骤 3 根据违约概率求得组合的损失值

$$L = \sum_{i=1}^m L_i = \sum_{i=1}^m c_i \times s_i \times D_i.$$

步骤 4 计算估计值 $1\{L > x\}$.

步骤 5 重复上述步骤 1 ~ 410 000 次,最后求得平均值.

2.2 数值模拟结果

本文采用了 Glasserman 和 Li^[3] 的模型,假设

$$p_i = 0.01 \times (1 + \sin(16\pi i/m)),$$

$$i = 1, \dots, 1000$$

$$c_i = \left(\frac{5i}{m}\right)^2, i = 1, \dots, m$$

$$a_{ik} \sim U(0, 1/\sqrt{n}), n = 10$$

其中公共因子系数 a_{ik} 服从 0 到 $1/\sqrt{n}$ 的均匀分布,把样本分为五组,每组风险暴露值分别为 1, 4, 9, 16, 25.

在正态 Copula 情形下,进行了 1 000 次重要抽样技术下的模拟资产组合的损失分布,同时利用普通 Monte Carlo 模拟 10 000 次,并且得到两者结果如下图.

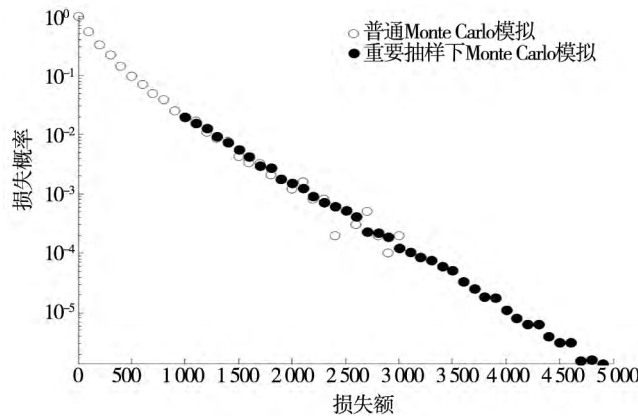


图 1 基于正态 Copula 的普通 Monte Carlo 模拟和重要抽样技术的模拟结果

Fig. 1 Simulation performance for general Monte Carlo simulation and importance sampling technique based on normal copula model

从模拟计算过程及上图可知,重要抽样技术可以快速的简化计算时间,相比于普通 Monte Carlo 模拟 10 000 次,基于 1 000 次重要抽样技术下的模拟快速准确的拟合了正态 Copula 组合的 VaR 值.当损失额超过 3 000 时,普通 Monte Carlo 由于模拟次数为 10 000,因此其无法计算得到损失额较大情况下的概率,而重要抽样技术却解决了此问题.

假设组合之间的自由度为 5,其他参数同上,在 t-Copula 情形下,本文同样进行了 1 000 次重要抽样技术下的模拟资产组合的损失分布,同时利

用普通 Monte Carlo 模拟 10 000 次,并且得到两者 t-Copula 组合的风险值结果如下图.

从模拟计算过程及上图可知,重要抽样技术也可以快速的简化 t-Copula 组合的风险值的计算时间,通过与普通 Monte Carlo 模拟结果比较,重要抽样技术准确的拟合了 VaR 值.针对稀有事件的情况下,普通 Monte Carlo 模拟在模拟次数 10 000 次的限制下,无法计算得到损失值 3 000 以后的概率,而重要抽样技术下的 Monte Carlo 模拟则不存在此类问题.

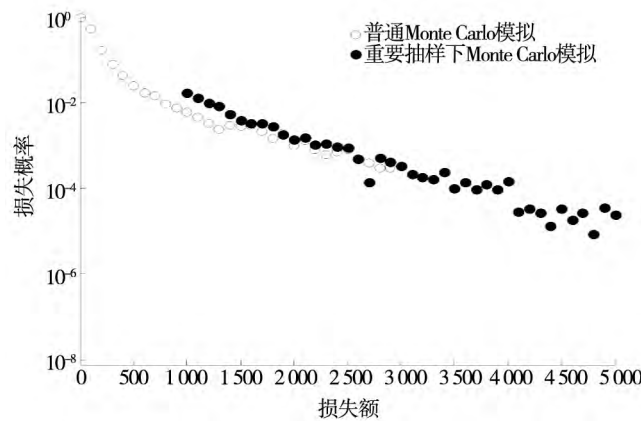


图 2 基于 t-Copula 的普通 Monte Carlo 模拟和重要抽样技术的模拟结果

Fig. 2 Simulation performance for general Monte Carlo simulation and importance sampling technique based on t-copula model

2.3 模型检验

由于重要抽样技术的概率值是无偏的, 本文还需检验统计量的有效性. 通过方差减少系数检验重要抽样是否可以方差减少进而检测其有效性.

$$V.R = \frac{\hat{p} - \hat{p}^2}{\hat{m}_2(x; \theta) - \hat{p}^2} \quad (30)$$

其中 $V.R$ 表示方差减少系数, 式(30)中分子表示为常用 Monte Carlo 的方差估计值, 分母表示为重要抽样分布情形下的方差估计值 $\hat{m}_2(x; \theta)$, M 表示在重要抽样下二阶矩的估计值. 当 $V.R$ 取值越大时, 说明方差减少的越多, 表明重要抽样技术越有效.

表 1 正态 Copula 重要抽样下的方差减少系数

Table 1 Variance reduction ratios using IS based on normal copula model

y (损失值或 VaR 值)	$P(L > y)$	方差减少系数
1 000	0.020 1	19.95
1 300	0.009 5	36.10
1 600	0.004 3	57.05
1 900	0.001 7	138.15
2 200	0.000 9	243.88
2 500	0.000 5	481.25
2 800	0.000 2	949.27

表 2 t-Copula 重要抽样下的方差减少系数

Table 2 Variance reduction ratios using IS based on t-Copula model

y (损失值或 VaR 值)	$P(L > y)$	方差减少系数
1 000	0.016 8	5.38
1 300	0.008 5	9.44
1 600	0.003 3	44.84
1 900	0.001 7	154.26
2 200	0.001 0	266.76
2 500	0.000 9	1 601.12
2 800	0.000 5	1 764.51

由表 1 和表 2 可知, 随着损失值的增加, 方差减少系数值逐渐增加, 说明在稀有事件下, 重要抽样技术下的 Monte Carlo 模拟相对于普通

Monte Carlo 模拟而言, 模拟的方差大大减少, 可以更快更准确的测度稀有事件下的信用资产组合风险.

3 结束语

由于信用资产组合的风险度量不仅需要考
虑资产组合样本数量成千上万所导致的计算速度减
缓问题,同时还需要测算资产之间的非线性相关
关系,通过重要抽样技术和分解组合的公共因子
和特殊因子,可以解决以上问题. 本文在基于正
态 Copula 的重要抽样思想下,利用条件概率以及
概率测度变换等方法,推导给出了 t-Copula 重要

抽样技术下的计算公式. 同时针对重要抽样中系
统因子期望向量均值估计的这一重要环节,在解
决该类问题一些学者所提出的高斯牛顿算法上改
用了 Levenberg-Marquardt 算法,该算法不仅拥有
高斯牛顿算法的优点,同时兼有梯度法的智能.

最后,基于正态 Copula 和 t-Copula 函数下,本
文进行了风险值的 Monte Carlo 数值的模拟. 通过比较
重要抽样技术下的 Monte Carlo 模拟和普通的 Monte
Carlo 模拟,得到方差减少系数表明重要抽样技术下
的模拟可以更快、更准确的测量组合的风险值.

参 考 文 献:

- [1] Merino S, Nyfeler M. Calculating portfolio loss[J]. *Journal of Risk*, 2002, 15(8): 82–86.
- [2] Grundke P. Computational aspects of integrated market and credit portfolio models[J]. *OR Spectrum*, 2007, 29(2): 259–294.
- [3] Glasserman P, Li J Y. Importance sampling for portfolio[J]. *Management Science*, 2005, 51(11): 1643–1656.
- [4] Glasserman P, Kang W, Shahabuddin P. Fast simulation of multifactor portfolio credit risk[J]. *Operational Research*, 2008, 56(5): 1200–1217.
- [5] Glasserman P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering[M]. New York: Springer-Verlag, 2004.
- [6] Grundke P. Importance sampling for integrated market and credit portfolio models[J]. *European Journal Operational Research*, 2009, 194(1): 206–226.
- [7] Heyde C C, Kou S G. On the controversy over tailweight of distributions[J]. *Operations Research Letters*, 2004, 32: 399–408.
- [8] Aas K, Haff I H. The generalized hyperbolic skew student's t-distribution[J]. *Journal of Financial Econometrics*, 2006, 4(2): 275–309.
- [9] Behr A, Pötter U. Alternatives to the normal model of stock returns: Gaussian mixture, generalised logF and generalised hyperbolic models[J]. *Annals of Finance*, 2009, 5(1): 49–68.
- [10] Rosenberg J V, Schuermann T. A general approach to integrated risk management with skewed, fat-tailed risks[J]. *Journal of Financial Economics*, 2006, 79(3): 569–614.
- [11] Kole E, Koedijk K, Verbeek M. Selecting copulas for risk management[J]. *Journal of Banking and Finance*, 2007, 31(8): 2405–2423.
- [12] Kang W, Shahabuddin P. Fast Simulation for Multifactor Portfolio Credit Risk in the t-Copula Model[D]. Proceedings of the 37th Conference on Winter Simulation, December 04–07, 2005, Orlando, Florida, Kuhl M E, Steiger N M, Armstrong F B, et al(eds), 1859–1867.
- [13] Bassamboo A, Juneja S, Zeevi A. Portfolio credit risk with extremal dependence: A asymptotic analysis and efficient simulation[J]. *Operations Research*, 2008, 56(3): 593–606.
- [14] Chan J C C, Kroese D P. Efficient estimation of large portfolio loss probabilities in t-Copula models[J]. *European Journal Operational Research*, 2010, 205(2): 361–367.
- [15] Reitan T, Aas K. A new robust importance-sampling method for measuring value-at-risk and expected shortfall allocations for credit portfolios[J]. *Journal of Credit Risk*, 2010, 6(4): 113–149.
- [16] Glasserman P, Heidelberger P, Shahabuddin P. Portfolio value-at-risk with heavy-tailed risk factors[J]. *Mathematical Finance*, 2002, 12(3): 239–269.
- [17] Johannes V S, Jeffrey T L, Anna S H. Value-at-Risk computation by Fourier inversion with explicit error bounds[J]. *Finance Research Letters*, 2009, 6(2): 95–105.
- [18] Kamdem J S. Δ -VaR and Δ -TVaR for portfolios with mixture of elliptic distributions risk factors and DCC[J]. *Insurance:*

- Mathematics and Economics ,2009 ,44(3) : 325 – 336.
- [19] Broda S A. The expected shortfall of quadratic portfolios with heavy-tailed risk factors [J]. Mathematical Finance ,2012 , 22(4) : 710 – 728.
- [20] Kostadinov K. Tail approximation for credit risk portfolios with heavy-tailed risk factors [J]. Journal of Risk ,2006 ,8(2) : 187 – 210.
- [21] Glasserman P , Heidelberg P , Shahabuddin P. Variance reduction techniques for estimating value-at-risk [J]. Management Science ,2000 ,46(10) : 1349 – 1364.
- [22] Huang Z , Shahabuddin P. New Simulation Methodology for Risk Analysis: Rare-event , Heavy-tailed Simulations Using Hazard Function Transformations , with Applications to Value-at-risk [D]. Proceedings of the 35th Conference on Winter Simulation: Driving Innovation. New Orleans: Winter Simulation Conference ,2003 ,276 – 284.
- [23] Juneja S , Shahabuddin P. Rare-event simulation techniques: An introduction and recent advances [J]. Handbooks in Operations Research and Management Science ,2006 ,13: 291 – 350.
- [24] Kostadinov K. Tail approximation for credit risk portfolios with heavy-tailed risk factors [J]. Journal of Risk ,2006 ,8(2) : 187 – 210.
- [25] Levenberg K. A method for the solution of certain problems in least squares [J]. Quarterly of Applied Mathematics ,1944 , 2: 164 – 168.
- [26] Marquardt D W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters [J]. Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics ,1963 ,11(2) : 431 – 441.

Risk measurement for portfolio credit risk with risk factors with heavy-tailed distribution

CHEN Rong-da^{1,2,3} , *WANG Ze*¹ , *LI Ze-xi*¹ , *WANG Cong-cong*¹ , *YU Le-an*⁴ , *HE Mu-yuan*⁵

1. School of Finance , Zhejiang University of Finance and Economics , Hangzhou 310018 , China;
2. Coordinated Innovation Center of Wealth Management and Quantitative Investment of Zhejiang University of Finance and Economics , Hangzhou 310018 , China;
3. Center for Research of Regulation and Policy of Zhejiang Province , Hangzhou 310018 , China;
4. School of Economics and Management , Beijing University of Chemical Technology , Beijing 100029 , China;
5. School of Economics and Management , Tsinghua University , Beijing 100084 , China

Abstract: This paper develops an efficient simulation method to calculate credit portfolio risks when the risk factors have heavy-tailed distributions. In modeling heavy tails , the features of return on the underlying assets are captured by multivariate t-copula. Moreover , a three-step importance sampling (IS) technique is developed in the t-copula credit portfolio risk measure model for further variance reduction. This broadens and enriches credit portfolio risk measure models. Simultaneously , the Levenberg-Marquardt algorithm associated with nonlinear optimal technique is applied to estimate the mean-shift vector of the systematic risk factors after the probability measure changes. Numerical results show that IS technique based on t-copula is more efficient and accurate than plain Monte Carlo simulation in calculating the tail probability of distribution of portfolio loss (or VaR of credit portfolio risk under a given confidence level) and that the IS technique can decrease the variance of estimation on the tail probability to a great degree.

Key words: portfolio; heavy-tailed distribution; structure model; importance sampling technique