

# 基于活动方法的瓶颈模型与拥挤收费问题研究<sup>①</sup>

李志纯, 丁 晶

(华中科技大学管理学院, 武汉 430074)

**摘要:** Vickrey 提出的基于出行的瓶颈模型以出行作为分析单位, 没有考虑出行与活动之间的相互关联. 本文对 Vickrey 的瓶颈模型进行了拓展, 提出了基于活动的瓶颈模型来研究通勤者早晨上班出发时间决策问题. 模型考虑了通勤者对出行负效用与活动效用之间的权衡. 在基于活动的瓶颈模型的基础上, 分别研究了常数和线性边际活动效用下瓶颈动态拥挤收费和阶梯收费问题, 并与传统的瓶颈模型的解进行比较. 结果表明, 当活动的边际效用为线性函数时, 瓶颈处最优动态收费曲线不再呈分段线性关系, 而是分段二次曲线; 与基于活动的瓶颈模型相比, 传统的基于出行的瓶颈模型将高估瓶颈处的排队延误、阶梯收费水平, 以及早高峰的开始和结束时间; 基于出行的瓶颈模型和常数边际活动效用下的瓶颈模型导致的最优阶梯收费是最优动态收费最大值的一半, 并且刚好消除瓶颈处排队延误的一半; 与线性边际活动效用下的瓶颈模型相比较, 两者低估了阶梯收费能消除的瓶颈排队, 从而低估了阶梯收费的效率.

**关键词:** 瓶颈模型; 基于活动的方法; 动态收费; 阶梯收费

**中图分类号:** F570 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2017)08-0093-09

## 0 引言

1969年, 诺贝尔经济学奖得主 Vickrey 应用确定性排队理论, 首次提出了一个能导致所有出行者具有相同交通费用的内生出发时间选择模型, 这就是著名的瓶颈模型<sup>[1]</sup>. 该模型考虑一条通行能力有限的公路连接生活区和工作区, 出行者每天早晨使用该公路上班, 由于瓶颈能力约束, 必然有一部分人早到或迟到, 从而发生延误惩罚成本. 每个出行者通过选择出发时间来最小化总出行成本, 该成本包括行驶时间(或瓶颈处的排队时间)成本和早到或迟到的延误惩罚成本. 达到均衡时, 所有出行者的总出行成本相等. 关于瓶颈模型的详细描述, 见文献[2, 3].

瓶颈处的排队延误纯粹是一种损失. 研究表明, 可以通过征收社会最优的时变拥挤费来完全

消除瓶颈处排队, 从而提高系统效率. 但由于时变拥挤收费随时间连续变化, 对技术要求很高, 同时公众难以接受, 在现实生活中难以实施. 学者提出多种阶梯收费模型来近似时变收费<sup>[4-7]</sup>. 虽然阶梯收费不能完全消除排队, 但收费结构简单, 在实际中容易实施, 而且决策者可以通过优化阶梯收费时间区间来最大程度的减少瓶颈处的排队延误. 例如, 伦敦市中心城区从早7点至晚6点每进入中心区一次, 收取11.5英镑的通行费; 新加坡实施了多阶梯收费, 高峰期收费价格从0.5新币至3.0新币. 国内一些学者也对拥挤收费问题开展了研究工作. 李斌和黄海军<sup>[8]</sup>研究了新加坡成功实施道路收费的案例, 提出了一些解决我国城市道路拥挤问题的建议. Yang 和 Huang<sup>[9]</sup>运用最优控制理论建立了一个动态的弹性交通需求拥挤收费模型. 黄海军等<sup>[10-12]</sup>对瓶颈模型进行了扩

① 收稿日期: 2015-11-10; 修订日期: 2017-01-06.

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(71525003); 华中科技大学“双一流”建设资助项目(5001300001).

作者简介: 李志纯(1976—), 男, 江西高安人, 博士, 教授, 博士生导师. Email: smzcli@hust.edu.cn

展 将公共交通引入瓶颈模型,并研究了动态瓶颈收费策略.唐毓敏和冯苏苇<sup>[13]</sup>基于博弈论和瓶颈模型,分析了政府实施拥挤收费政策对通勤者行为的影响.魏玉光等<sup>[14]</sup>研究了瓶颈路段上拥挤收费水平和收费时段的优化问题.汪景和张小宁<sup>[15]</sup>考虑了瓶颈路段终点处停车空间不足时,私家车和公交车并存的瓶颈系统中的最优动态收费以及补贴政策.这些研究均是基于 Vickrey 的瓶颈模型开展的.

然而, Vickrey 的瓶颈模型采用的是基于出行的分析方法,它假定出行者早晨出发时间的选择是权衡排队延误和计划延误惩罚成本的结果,没有考虑通勤者早晨在家活动和上班工作活动获得的效用对出发时间决策的影响.最近, Li 等<sup>[16]</sup>提出了基于活动的瓶颈模型,分析了活动效用对出行者上下班出发时间决策的影响,表明传统的基于出行的瓶颈模型会对通勤者出发时间决策的估计产生较大偏差.本文采用基于活动的方法,研究通勤者早晨上班出发时间选择问题以及瓶颈处最优动态收费和阶梯收费问题,研究结果将与传统的基于出行的瓶颈模型进行比较.

### 1 基于活动的瓶颈模型

假设有  $N$  个通勤者每天从家去工作地点上班,连接家和工地之间有一条通行能力有限的瓶颈道路(比如桥梁、隧道等),通行能力最大为单位时间内通过  $s$  辆车.每个通勤者制定出行活动计划,该计划由在家活动、上班工作活动以及从家到上班地点的出行构成.通勤者通过选择早晨上班出发时间使自己的净效用最大.不失一般性,假设从家到上班地点的自由流旅行时间为零,因此,上班途中旅行时间等于瓶颈处的排队时间.通勤者的总出行负效用由旅行时间成本和早到或迟

$$\Psi(t) = U(t) - C(t) = \begin{cases} \int_{t_q}^t u_h(x) dx + \int_{t+T(t)}^{t_q'} u_w(x) dx - (\alpha T(t) + \beta(t^* - t - T(t))), & t + T(t) < t^* \\ \int_{t_q}^t u_h(x) dx + \int_{t+T(t)}^{t_q'} u_w(x) dx - (\alpha T(t) + \gamma(t + T(t) - t^*)), & t + T(t) \geq t^* \end{cases} \quad (4)$$

其中上班出发时间  $t$  为决策变量.通勤者通过权衡在家和工作活动的总效用和出行负效用来选择早晨上班出发时间,以便达到净效用最大.系统到达

到的延误惩罚成本构成.令  $C(t)$  为  $t$  时刻出行者的总出行负效用,表示为

$$C(t) = \begin{cases} \alpha T(t) + \beta(t^* - t - T(t)), & t + T(t) < t^* \\ \alpha T(t) + \gamma(t + T(t) - t^*), & t + T(t) \geq t^* \end{cases} \quad (1)$$

其中  $T(t)$  为  $t$  时刻出行者的行驶时间(或瓶颈处的排队时间),  $t^*$  为准时工作开始时间.  $\alpha$  为旅行时间的价值,  $\beta$  为单位早到时间的成本,  $\gamma$  为单位晚到时间的成本.根据 Small<sup>[17]</sup> 的调查结果,它们之间满足  $\gamma > \alpha > \beta$ ,事实上  $\alpha > \beta$  也是均衡解存在且唯一的基本条件<sup>[18,19]</sup>.

令  $D(t)$  为  $t$  时刻瓶颈处的排队长度,那么瓶颈处的排队等待时间  $T(t)$  为

$$T(t) = \frac{D(t)}{s} \quad (2)$$

出行者在家的活动和工作活动的边际效用取决于活动开始时间和持续时间长度.本文仅考虑早晨上班高峰区间,不失一般性,令  $t_q$  为第一个通勤者的出发时间,  $t_q'$  为最后一个通勤者的出发时间.在区间  $[t_q, t_q']$  内所有通勤者能够完成出行.令  $u_h(t)$  为  $t$  时刻通勤者在家活动的边际效用(即  $t$  时刻单位活动时间获得的效用),  $u_w(t)$  为  $t$  时刻通勤者工作的边际效用.  $t$  时刻离开家去上班的通勤者在早高峰期间  $[t_q, t_q']$  内获得的总的活动效用可以表示为

$$U(t) = \int_{t_q}^t u_h(x) dx + \int_{t+T(t)}^{t_q'} u_w(x) dx \quad (3)$$

其中  $t + T(t)$  表示到达工作地点的时间,即上班开始时间.右边第 1 项表示时间  $[t_q, t]$  内在家活动获得的总效用,第 2 项表示在  $[t + T(t), t_q']$  内工作获得的效用.

通勤者的净效用定义为活动效用与出行负效用的差.令  $\Psi(t)$  为  $t$  时刻离开家去上班的通勤者在早高峰期间获得的净效用,表示为

均衡时,没有人能通过改变出发时间来增加净效用,即到达均衡时,每个通勤者的净效用相等.当边际活动效用为零时(即  $u_h = u_w = 0$ ),式(4)与

统的 Vickrey 瓶颈模型相同,这表明传统的 Vickrey 瓶颈模型是基于活动的瓶颈模型的特例. 基于活动的瓶颈模型(4)有如下的性质.

**性质 1** 早高峰期间(即  $t \in (t_q, t_{q'})$ ) 瓶颈处出现排队当且仅当  $-\beta < u_h(t) - u_w(t) < \gamma$  成立.

命题 1 的证明请参见 Li 等<sup>[16]</sup>. 它表明在考虑活动效用的瓶颈模型中,瓶颈处不一定出现排队,仅仅当边际效用函数满足命题 1 中的条件时,瓶颈处才出现排队. 下文中,如不做特别申明,假定满足该条件,即不收费均衡时瓶颈处存在排队.

**性质 2** 对基于活动的瓶颈模型,第一个通勤者(即  $t = t_q$ ) 和最后一个通勤者(即  $t = t_{q'}$ ) 无需排队.

**证明** 使用反证法. 假定第一个通勤者在瓶颈处需要排队,其出发时间为  $t_q$ ,排队延误为  $T(t_q)$ . 由于第一个通勤者早到工作地点,根据式(4),其获得的净效用为

$$\Psi(t_q) = \int_{t_q+T(t_q)}^{t_{q'}} u_w(x) dx - \alpha T(t_q) - \beta(t^* - t_q - T(t_q)) \quad (5)$$

在  $\alpha > \beta$  下容易得到

$$\Psi(t_q) = \int_{t_q+T(t_q)}^{t_{q'}} u_w(x) dx - \alpha T(t_q) - \beta(t^* - t_q - T(t_q)) \quad (6)$$

式(6)表明第一个通勤者选择的出发时间  $t_q$  不能使其净效用最大,这与出发时间选择的净效用最大化原理相矛盾. 因此,第一个通勤者在瓶颈处无需排队,同理可以证明最后一个通勤者也无需排队.

## 2 社会最优动态收费

为研究考虑活动效用下的社会最优瓶颈收费问题,首先给出如下定理.

**定理 1** 以拥挤收费直接取代瓶颈处不收费均衡时的排队延误成本(即  $T(t) = 0$ ),瓶颈系统自动到达社会最优状态.

**证明** 仅仅需要证明  $T(t) = 0$  时边际社会净效用等于边际个人净效用. 令  $\tau(t)$  为  $t$  时刻瓶颈

处的拥挤收费. 当  $T(t) = 0$  时,由式(4)得到  $t$  时刻出发的通勤者的净效用为

$$\Psi(t) = \begin{cases} \int_{t_q}^t u_h(x) dx + \int_t^{t_{q'}} u_w(x) dx - \beta(t^* - t) - \tau(t), & t < t^* \\ \int_{t_q}^t u_h(x) dx + \int_t^{t_{q'}} u_w(x) dx - \gamma(t - t^*) - \tau(t), & t \geq t^* \end{cases} \quad (7)$$

注意到第一个通勤者和最后一个通勤者无需排队,即  $T(t_q) = T(t_{q'}) = 0$ ,因此,对应的拥挤收费为 0,即  $\tau(t_q) = \tau(t_{q'}) = 0$ ,代入式(7),得到

$$\begin{cases} \Psi(t_q) = \int_{t_q}^{t_{q'}} u_w(x) dx - \beta(t^* - t_q) \\ \Psi(t_{q'}) = \int_{t_q}^{t_{q'}} u_h(x) dx - \gamma(t_{q'} - t^*) \end{cases} \quad (8)$$

在均衡条件下,有

$$\Psi(t) = \Psi(t_q) = \Psi(t_{q'}), \forall t \in [t_q, t_{q'}] \quad (9)$$

将式(7)和式(8)代入式(9),得到  $t$  时刻瓶颈处的收费  $\tau(t)$  为

$$\tau(t) = \begin{cases} \int_{t_q}^t u_h(t) dt + \int_t^{t_{q'}} u_w(t) dt + \beta(t - t_q), & \forall t \in [t_q, t^*] \\ \int_{t_q}^t u_h(t) dt + \int_t^{t_{q'}} u_w(t) dt + \gamma(t_{q'} - t), & \forall t \in [t^*, t_{q'}] \end{cases} \quad (10)$$

式(10)表明存在一个拥挤收费使得所有通勤者的净效用相等,且为  $\Psi(t_q)$  或  $\Psi(t_{q'})$ . 结果系统中所有通勤者总的净效用为  $N\Psi(t_q)$  或  $N\Psi(t_{q'})$ ,因此,边际社会净效用等于边际个人净效用  $\Psi(t_q)$  或  $\Psi(t_{q'})$ ,表明拥挤收费驱使系统从均衡状态自动到达社会最优状态.

对于 Vickrey 的基于出行的瓶颈模型,已经表明在社会最优收费下,瓶颈处的排队延误为 0<sup>[2,11]</sup>. 定理 1 表明该结论对基于活动的瓶颈模型仍然成立. 下面讨论两种特殊情形,即边际活动效用分别为常数和线性函数下的动态收费策略.

### 2.1 常数边际活动效用情形

当早晨在家活动和上班工作的边际效用为常数时,即  $u_h(t) = u_h$  和  $u_w(t) = u_w$ ,代入式(10),得到常数边际活动效用下的社会最优动态收费策略为

$$\tau(t) = \begin{cases} (u_h - u_w + \beta)(t - t^* + \frac{u_w - u_h + \gamma}{\beta + \gamma} \times \frac{N}{s}), \forall t \in [t_q, t^*] \\ (u_w - u_h + \gamma)(t^* - t + \frac{u_h - u_w + \beta}{\beta + \gamma} \times \frac{N}{s}), \forall t \in [t^*, t_q'] \end{cases} \quad (11)$$

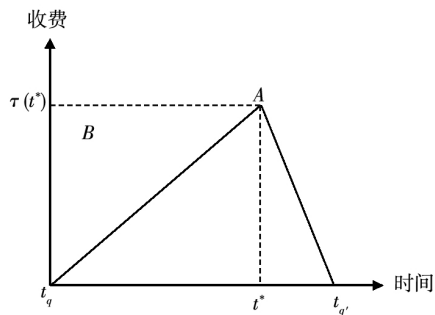


图1 常数边际活动效用下的动态收费

Fig. 1 Time-varying tolls under constant marginal activity utility

图1描述了式(11)所表示的常数边际活动效用下的动态收费,它是一条起于 $t_q$ ,止于 $t_q'$ ,在 $t^*$ 时达到最大值的三角形.三角形 $t_q A t_q'$ 的面积等于通过动态收费消除的瓶颈处的总排队延误,收取的费用可以用来改扩建道路基础设施,从而提高社会福利.由式(11)可计算出早高峰的起始时间、结束时间和最高收费分别为

$$\begin{cases} t_q = t^* - \frac{u_w - u_h + \gamma}{\beta + \gamma} \times \frac{N}{s} \\ t_q' = t^* + \frac{u_h - u_w + \beta}{\beta + \gamma} \times \frac{N}{s} \end{cases} \quad (12)$$

$$\tau(t^*) = \frac{N(u_w - u_h + \gamma)(u_h - u_w + \beta)}{s(\beta + \gamma)} \quad (13)$$

当边际活动效用为零( $u_h = u_w = 0$ )时,式(11)~式(13)与传统的 Vickrey 瓶颈模型的解相同.为使通勤者有上班动机,必须满足 $u_w > u_h$ .因此,由式(12)计算得到的 $t_q$ 和 $t_q'$ 的值以及由式(13)计算得到的 $\tau(t^*)$ 的值分别小于由 Vickrey 瓶颈模型计算得到的对应的值,即 Vickrey 瓶颈模型高估 $t_q$ 、 $t_q'$ 和 $\tau(t^*)$ 的值.

### 2.2 线性边际活动效用情形

对于线性边际活动效用情形,为使通勤者有上班出行动机,工作的边际效用 $u_w(t)$ 一定会在某个时间点 $\hat{t}$ ( $\hat{t} \in (t_q, t_q')$ )超过在家活动的边际效用.根据 Tseng 和 Verhoef 的实证研究<sup>[20]</sup>,早晨在家活动的边际效用通常随时间递减,早晨工

作的边际效用通常随时间递增,并且当 $t \in (t_q, \hat{t})$ 时 $u_h(t) > u_w(t)$ ,当 $t \in (\hat{t}, t_q')$ 时, $u_h(t) < u_w(t)$ ,如图2所示.两种活动的线性边际效用函数表示为

$$\begin{cases} u_h(t) = g_0 + g_1 t, g_1 < 0 \\ u_w(t) = h_0 + h_1 t, h_1 > 0 \end{cases} \quad (14)$$

其中 $g_1$ 和 $h_1$ 分别为在家活动和工作活动效用的变化率,满足 $g_1 < 0$ 和 $h_1 > 0$ .线性边际活动效用函数的假设也被一些其他的相关研究所采用,例如 Li 等<sup>[16]</sup>和 Jenelius 等<sup>[21]</sup>.

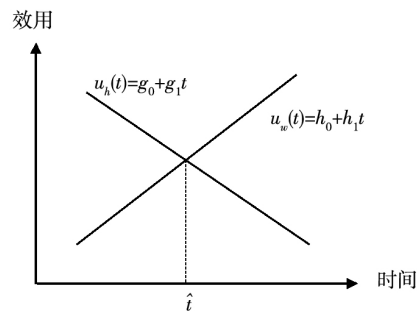


图2 线性边际活动效用

Fig. 2 Linear marginal activity utilities of being at home and at work

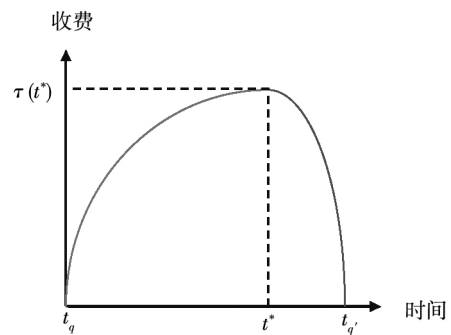


图3 线性边际活动效用下的动态收费曲线

Fig. 3 Time-varying tolls under linear marginal activity utility

将式(14)代入式(10),得到线性边际活动效用下的最优动态收费为

$$\tau(t) = \begin{cases} \frac{k_1}{2} t^2 + (k_2 + \beta)t - (\frac{k_1}{2} (t_q)^2 + (k_2 + \beta)t_q), \forall t \in [t_q, t^*] \\ \frac{k_1}{2} t^2 + (k_2 - \lambda)t - (\frac{k_1}{2} (t_q')^2 + (k_2 - \lambda)t_q'), \forall t \in [t^*, t_q'] \end{cases} \quad (15)$$

其中 $k_1 = g_1 - h_1$ ,  $k_2 = g_0 - h_0$ .显然有 $k_1 < 0$ .

式(15)表示的动态收费曲线由两条二次函数曲线的一部分组合而成,如图3所示.它表明当边际活动效用为线性函数时,动态收费曲线不再是分段线性函数(如图1),而是分段二次曲线,最高收费点仍然在  $t^*$  时刻取得.由于式(15)中的两个表达式在  $t^*$  时刻相等,因此,可以计算出排队开始时间和结束时间分别为

$$\begin{cases} t_q = \frac{(\beta + \gamma)t^* + \frac{1}{2}k_1(N/s)^2 + (k_2 - \gamma)(N/s)}{(\beta + \gamma) - k_1(N/s)} & (16) \\ t_{q^-} = t_q + N/s \end{cases}$$

### 3 阶梯收费

定理1表明通过用收费取代排队,瓶颈系统可达到社会最优状态.但由于社会最优收费随时间连续动态变化,对技术要求很高,而且公众难以接受,在实际中实施难度大,所以通常采用阶梯收费策略来代替动态收费策略,例如伦敦和新加坡的拥挤收费就是如此.

关于瓶颈模型中阶梯收费的研究可分为三类,ADL模型<sup>[2,3]</sup>,Laih模型<sup>[4,5]</sup>和刹车模型<sup>[6,7]</sup>.Laih模型假设缴纳拥挤费的用户和到达瓶颈时收费时间结束从而避免缴纳拥挤费的用户在不同的车道上分开排队.虽然Laih模型的假设很严格,但计算简单,可以方便地用来估算阶梯收费方案的效率.ADL模型假设大量的通勤者在阶梯收费结束之后才出行.刹车模型考虑了阶梯收费时间快结束时,驾驶员有动机在收费结束之前在收费点停车等候,直至收费结束,从而避免缴纳拥挤费.与其他两种方法相比,Laih模型提供了一种简单的推导最优阶梯收费的方法,因此采用该建模方法.

阶梯收费问题将确定最优的收费水平  $\rho$ ,收费开始时间  $t^+ \in [t_q, t^*]$  和收费结束时间  $t^- \in [t^*, t_{q^-}]$ ,以便最大程度地消除瓶颈处的排队.收费水平和收费时间点之间满足  $\rho = \tau(t^+) = \tau(t^-)$ .图4和图5分别描述了常数和线性边际活动效用下的阶梯收费机制.动态收费曲线  $t_q A t_{q^-}$  围成的面积表示瓶颈处的总排队延误,长方形  $t^+ B C t^-$  围成的面积表示实施阶梯收费后消除的排队延误.阶梯收费不能完全消除排队,最优的阶梯收费将最

大程度地消除排队,即最大化长方形  $t^+ B C t^-$  的面积.

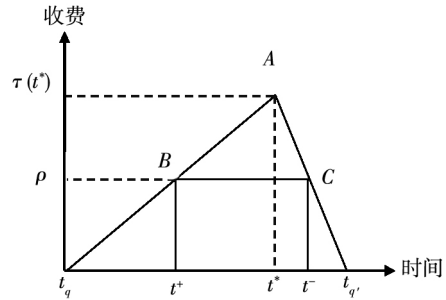


图4 常数边际活动效用下的阶梯收费  
Fig. 4 Step toll under constant marginal utility

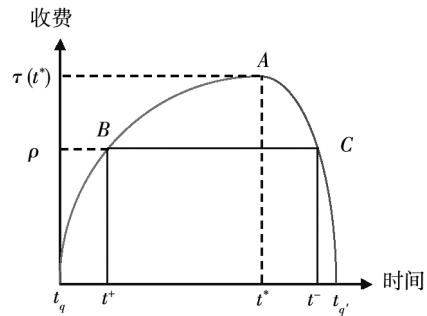


图5 线性边际活动效用下的阶梯收费  
Fig. 5 Step toll under linear marginal utility

给定阶梯收费水平  $\rho$ ,当系统达到均衡时,高峰期每一个通勤者的净效用相等,即

$$\begin{cases} \Psi^S(t^+) = \Psi^S(t_q) \\ \Psi^S(t^-) = \Psi^S(t_{q^-}) \end{cases} \quad (17)$$

其中上标“S”表示阶梯收费.由于第一个和最后一个通勤者无需排队,从而拥挤费为0,因此,  $\Psi^S(t_q)$  和  $\Psi^S(t_{q^-})$  可表示为

$$\begin{cases} \Psi^S(t_q) = \int_{t_q}^{t_{q^-}} u_w(x) dx - \beta(t^* - t_q) \\ \Psi^S(t_{q^-}) = \int_{t_q}^{t_{q^-}} u_h(x) dx - \gamma(t_{q^-} - t^*) \end{cases} \quad (18)$$

此外,在收费开始时间  $t^+$  和收费结束时间  $t^-$  处,收费正好取代排队,从而排队延误为0,即  $T(t^+) = T(t^-) = 0$ .因此,通勤者在  $t^+$  和  $t^-$  处的净效用为

$$\begin{cases} \Psi^S(t^+) = \int_{t_q}^{t^+} u_h(x) dx + \int_{t^+}^{t_{q^-}} u_w(x) dx - \beta(t^* - t^+) - \rho \\ \Psi^S(t^-) = \int_{t_q}^{t^-} u_h(x) dx + \int_{t^-}^{t_{q^-}} u_w(x) dx - \gamma(t^- - t^*) - \rho \end{cases} \quad (19)$$

下面建立模型来设计阶梯收费水平  $\rho$ 。如前所述,阶梯收费不能完全消除排队,最优的阶梯收费将最大程度地消除排队,即最大化  $t^+ B C t^-$  的面积,表示为

$$\max \Theta(\rho, t^+, t^-) = (t^- - t^+) \rho s \quad (20)$$

其中  $(t^- - t^+)s$  表示阶梯收费期间通过的总交易量,  $(t^- - t^+) \rho s$  表示阶梯收费的总收入。根据定理 1 拥挤收费的思想就是用收费代替瓶颈处排队,最大化阶梯收费的总收入等于最大程度消除的排队。式(20)的解可通过一阶最优性条件  $d\Theta/d\rho = 0$  得到。下面分别讨论常数和线性边际活动效用下的阶梯收费。

### 3.1 常数边际活动效用下的阶梯收费

当  $u_h(t) = u_h, \mu_w(t) = u_w$  时,将式(18)和式(19)代入式(17),可求得阶梯收费的开始和结束时间分别为

$$\begin{cases} t^+ = t_q + \frac{\rho}{u_h - u_w + \beta} \\ t^- = t_q - \frac{\rho}{u_w - u_h + \gamma} \end{cases} \quad (21)$$

将式(21)代入式(20),由一阶最优性条件  $d\Theta/d\rho = 0$  得到最优的阶梯收费水平为

$$\begin{aligned} \rho &= \tau(t^+) = \tau(t^-) \\ &= \frac{N}{2s} \times \frac{(u_h - u_w + \beta)(u_w - u_h + \lambda)}{(\beta + \lambda)} \end{aligned} \quad (22)$$

由式(13)和式(22)得到

$$\rho = \frac{1}{2} \tau(t^*) \quad (23)$$

式(23)表明在常数边际活动效用下,最优阶梯收费水平恰好是最优动态收费最大值的二分之一。

此外,由式(22)可知  $\rho < \frac{N}{2s} \times \frac{\beta\lambda}{(\beta + \lambda)}$  (右边为

Vickrey 瓶颈模型下的最优阶梯收费,见文献[23, 11])表明与常数边际活动效用下的瓶颈模型相比,基于出行的瓶颈模型过高估计阶梯收费的水平。

将式(21)和式(22)代入式(20),得到  $t^+ B C t^-$  的面积(即最优阶梯收费消除的排队延误)为

$$\Theta = (t^- - t^+) \rho s = \frac{N\rho}{2} \quad (24)$$

三角形  $t_q A t_q$  的面积表示瓶颈处总的排队延误,等于

$$\frac{1}{2}(t_q^- - t_q) s \tau(t^*) = N\rho \quad (25)$$

式(24)和式(25)表明,在常数边际活动效用下,最优的阶梯收费可以消除瓶颈处排队延误的一半。归纳起来,常数边际活动效用下的阶梯收费有如下的结论。

**定理 2** 对常数边际活动效用情形,最优阶梯收费水平是最优动态收费最大值的一半,它将消除瓶颈处排队延误的一半。

定理 2 的结论与 Laih 得到的 Vickrey 的基于出行的瓶颈模型的阶梯收费结论一致<sup>[4]</sup>。

### 3.2 线性边际活动效用下的阶梯收费

当边际活动效用为如图 2 所示的线性函数时,由式(17)~式(19)可得到阶梯收费的开始时间  $t^+$ 、结束时间  $t^-$ ,以及收费水平  $\rho$  之间满足如下的方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{2}k_1(t^+)^2 + (k_2 + \beta)t^+ - (\frac{1}{2}k_1(t_q)^2 + (k_2 + \beta)t_q + \rho) = 0 \\ \frac{1}{2}k_1(t^-)^2 + (k_2 - \gamma)t^- - (\frac{1}{2}k_1(t_q)^2 + (k_2 - \lambda)t_q + \rho) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

由式(26)可以解得阶梯收费的开始和结束时间为

$$\begin{cases} t^+ = \frac{-(k_2 + \beta) + \sqrt{\Delta_1}}{k_1} \\ t^- = \frac{-(k_2 - \gamma) - \sqrt{\Delta_2}}{k_1} \end{cases} \quad (27)$$

其中  $\Delta_1 = (k_2 + \beta + k_1 t_q)^2 + 2k_1 \rho$  和  $\Delta_2 = (k_2 - \gamma + k_1 t_q)^2 + 2k_1 \rho$ 。将式(27)代入式(20),根据一阶最优性条件  $d\Theta/d\rho = 0$ ,得到线性边际活动效用下最优的阶梯收费水平  $\rho$  是如下方程的解

$$(\sqrt{\Delta_1} + \sqrt{\Delta_2}) \left(1 + \frac{\rho k_1}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}}\right) - (\beta + \gamma) = 0 \quad (28)$$

通过求解式(28),可以得到最优的阶梯收费水平  $\rho$ ,然后将  $\rho$  代入式(27)可得到阶梯收费开始时间  $t^+$  和结束时间  $t^-$  的值。

## 4 算例分析

算例输入参数如表 1 所示,这些参数来自文

献 [16]. 通勤者总数  $N$  为 5 000 辆车, 瓶颈的通行能力  $s$  为每小时 2 000 辆车, 因此, 整个早高峰期的持续时间  $N/s$  为 2.5 h.

图 6 给出了 Vickrey 基于出行的瓶颈模型、常数边际活动效用下的瓶颈模型和线性边际活动效用下的瓶颈模型的最优动态收费曲线. 由图 6 可以看出, 传统的基于出行的瓶颈模型预测的早高峰开始时间(即第一个通勤者的出发时间)和结束时间(即最后一个通勤者的出发时间)分别比

基于活动的瓶颈模型预测的结果要晚. 其次, 比较三个瓶颈模型发现, 基于出行的瓶颈模型下的最优动态收费曲线围成的面积最大, 表明其高估了拥挤收费和瓶颈处的排队延误. 此外, 基于出行的瓶颈模型和常数边际活动效用下的瓶颈模型对应的最优收费曲线是分段线性的, 而线性边际活动效用下的瓶颈模型的最优收费曲线不是线性的(是二次的), 这进一步验证了最优动态收费曲线的性质(见式(11)和式(15)).

表 1 算例输入参数

Table 1 Input data for numerical example

$N$ 车辆	$S$ 辆/h	$t^*$ h	$\alpha$ 元/h	$\beta$ 元/h	$\gamma$ 元/h	$u_w$ 元/h	$u_h$ 元/h	$g_1$ 元/h	$g_0$ 元	$h_1$ 元/h	$h_0$ 元
5 000	2 000	9:00	10.0	6.0	19.0	11.0	8.0	10.0	-1/2	2.0	5/6

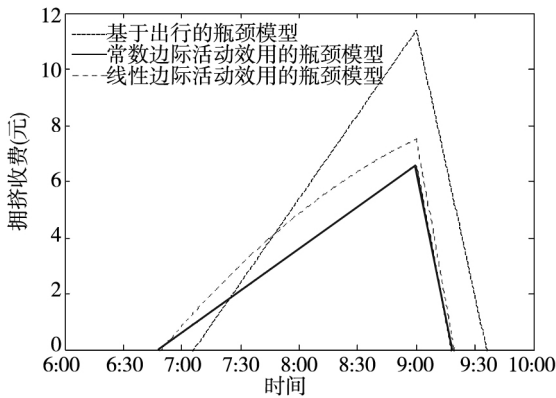


图 6 不同瓶颈模型下最优动态收费的比较

Fig. 6 Comparison of optimal time-varying tolls for different bottleneck models

表 2 比较了不同瓶颈模型下的阶梯收费解. 表中  $p_1$  表示阶梯收费与最优动态收费最大值的比值, 即  $p_1 = \rho/\tau(t^*)$ .  $p_2$  表示阶梯收费消除的瓶颈排队延误与不收费下瓶颈排队延误的比值, 即  $p_2 = t^+BCt^-/t_qAt_q'$ . 表 2 表明, 前两个模型的阶梯

收费时间长度相同, 均为 1.25 h, 后一个模型的阶梯收费时间区间要长一些, 为 1.35 h. 在最优动态收费或阶梯收费下, 传统的基于出行的瓶颈模型的收费水平最高, 表明基于出行的瓶颈模型过高估计拥挤收费水平. 在现实生活中, 虽然拥挤收费可以提高出行效率, 然而公众对该政策或多或少持反对态度. 在基于活动的瓶颈模型中, 阶梯收费  $\rho$  远低于传统的基于出行的瓶颈模型的阶梯收费水平, 相比之下更容易被公众接受. 表 2 也表明, 基于出行的瓶颈模型和常数边际活动效用下的瓶颈模型的  $p_1$  和  $p_2$  值均为 0.5, 表明对这两个瓶颈模型, 阶梯收费是最优动态收费最大值的一半, 并且刚好消除瓶颈处排队延误的一半. 而线性边际活动效用下的瓶颈模型的  $p_1$  和  $p_2$  值均大于 0.5, 表明基于出行的瓶颈模型和常数边际活动效用下的瓶颈模型都低估了阶梯收费能消除的瓶颈排队, 从而低估了阶梯收费的效率.

表 2 不同瓶颈模型下阶梯收费解的比较

Table 2 Comparison of optimal step-toll solutions for different bottleneck models

模型解	基于出行的 瓶颈模型	常数边际活动效 用下的瓶颈模型	线性边际活动效 用下的瓶颈模型
最优动态收费最大值 $\tau(t^*)$ (元)	11.40	6.60	7.51
最优阶梯收费 $\rho$ (元)	5.70	3.30	4.17
阶梯收费开始时间 $t^+$	8:03	7:54	7:48
阶梯收费结束时间 $t^-$	9:18	9:09	9:09
阶梯收费时间长度 ( $t^- - t^+$ ) (h)	1.25	1.25	1.35
$p_1 = \rho/\tau(t^*)$	0.50	0.50	0.56
$p_2 = t^+BCt^-/t_qAt_q'$	0.50	0.50	0.53

## 5 结束语

在瓶颈模型中,排队等待时间作为一种纯粹的损失可以转化为以拥挤收费为表现形式的收益.在 Vickrey 的基于出行的瓶颈模型的基础上,提出了基于活动的瓶颈模型.研究了常数和线性边际活动效用下的最优动态收费和阶梯收费问题,并将其与传统的基于出行的瓶颈模型的结果进行了比较.研究结果表明线性边际活动效用下的动态瓶颈收费曲线不再是分段线性函数,而是分段二次曲线;与基于活动的瓶颈模型

相比,传统的基于出行的瓶颈模型将高估拥挤收费的水平.

还可以从多个方面进行拓展.1) 研究了早晨上班问题,未来可以拓展到研究晚上下班问题,以及全天上下班出行链问题<sup>[16,22]</sup>.2) 研究了单阶梯收费,可以进一步拓展到多阶梯收费情形<sup>[4-6]</sup>.3) 文中模型仅考虑了小汽车,未来可以考虑多种竞争的交通工具,如巴士、地铁和换乘方式<sup>[23,24]</sup>等.4) 文中模型是确定性的,但实际中,瓶颈的通行能力、交通需求等可能发生随机扰动,因此,随机情境下的拥挤收费问题<sup>[25]</sup>也是一个重要的研究方向.

### 参考文献:

- [1] Vickrey W S. Congestion theory and transport investment[J]. *American Economic Review*, 1969, 34: 414-431.
- [2] Arnott R, De Palma A, Lindsey R. Economics of a bottleneck[J]. *Journal of Urban Economics*, 1990, 27: 111-130.
- [3] Arnott R, De Palma A, Lindsey R. A structural model of peak-period congestion: A traffic bottleneck with elastic demand[J]. *American Economic Review*, 1993, 83: 161-179.
- [4] Laih C H. Queuing at a bottleneck with single and multi-step tolls[J]. *Transportation Research Part A*, 1994, 28(3): 197-208.
- [5] Laih C H. Effects of the optimal step toll scheme on equilibrium commuter behavior[J]. *Applied Economics*, 2004, 36(1): 59-81.
- [6] Lindsey R, Van den Berg V A C, Verhoef E T. Step tolling with bottleneck queuing congestion[J]. *Journal of Urban Economics*, 2012, 72(1): 46-59.
- [7] Xiao F, Shen W, Zhang H M. The morning commute under flat toll and tactical waiting[J]. *Transportation Research Part B*, 2012, 46(10): 1346-1359.
- [8] 李斌, 黄海军. 新加坡道路收费系统的实践和经验[J]. *公路交通与科技*, 2000, 17(3): 59-62.  
Li Bin, Huang Haijun. The practice of Singapore road pricing system[J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 2000, 17(3): 59-62. (in Chinese)
- [9] Yang H, Huang H J. Analysis of the time-varying pricing of a bottleneck with elastic demand using optimal control theory[J]. *Transportation Research Part B*, 1997, 31(6): 425-440.
- [10] 黄海军, Bell M G H, 杨海. 公共与个体竞争交通系统的定价研究[J]. *管理科学学报*, 1998, 1(2): 17-23.  
Huang Haijun, Bell M G H, Yang Hai. Pricing and modal split in a competitive system of mass transit and highway[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 1998, 1(2): 17-23. (in Chinese)
- [11] 吴子啸, 黄海军. 瓶颈道路使用收费的理论与模型[J]. *系统工程理论与实践*, 2000, 20(1): 130-135.  
Wu Zixiao, Huang Haijun. The pricing theory and models in a highway with bottleneck[J]. *System Engineering: Theory & Practice*, 2000, 20(1): 130-135. (in Chinese)
- [12] Huang H J. Fares and tolls in a competitive system with transit and highway: The case with two groups of commuters[J]. *Transportation Research Part E*, 2000, 36: 267-284.
- [13] 唐毓敏, 冯苏苇. 政府博弈下的道路交通拥挤定价[J]. *管理科学学报*, 2008, 11(4): 76-81.  
Tang Yumin, Feng Suwei. Model of traffic behavior based on game theory under road-pricing regulation of government[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2008, 11(4): 76-81. (in Chinese)
- [14] 魏玉光, 薛莹, 任华玲. 瓶颈路段上拥挤收费水平与收费时段的优化问题[J]. *交通运输系统工程与信息*, 2014, 14(3): 179-185.  
Wei Yuguang, Xue Ying, Ren Hualing. Optimization of the tolling level and tolling period for bottleneck model[J]. *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology*, 2014, 14(3): 179-185. (in Chinese)
- [15] 汪景, 张小宁. 停车受限条件下多模式交通网络动态拥挤收费[J]. *系统工程理论与实践*, 2015, 35(12): 3182-3191.



- Wang Jing ,Zhang Xiaoning. Dynamic congestion pricing in multi-modal transportation networks with parking restraint [J]. System Engineering: Theory & Practice ,2015 ,35( 12) : 3182-3191. ( in Chinese)
- [16]Li Z C ,Lam W H K ,Wong S C. Bottleneck model revisited: An activity-based perspective [J]. Transportation Research Part B ,2014 ,68: 262-287.
- [17]Small K A. The scheduling of consumer activities: Work trips [J]. American Economic Review ,1982 ,72: 467-479.
- [18]Smith M J. The existence of a time dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck [J]. Transportation Science ,1984 ,18: 385-394.
- [19]Daganzo C F. The uniqueness of a time dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck [J]. Transportation Science ,1985 ,19: 29-37.
- [20]Tseng Y Y ,Verhoef E T. Value of time by time of day: A stated-preference study [J]. Transportation Research Part B ,2008 ,42( 7-8) : 607-618.
- [21]Jenelius E ,Mattsson L G ,Levinson D. Traveler delay costs and value of time with trip chains ,flexible activity scheduling and information [J]. Transportation Research Part B ,2011 ,45( 5) : 789-807.
- [22]卢晓珊,黄海军,刘天亮,等. 考虑早晚高峰出行链的出行方式选择均衡与定价机制 [J]. 系统工程理论与实践 ,2013 ,33( 1) : 167-174.
- Lu Xiaoshan ,Huang Haijun ,Liu Tianliang ,et al. Mode choice equilibrium and pricing mechanisms considering peak trip chain [J]. System Engineering: Theory & Practice ,2013 ,33( 1) : 167-174. ( in Chinese)
- [23]田 琼,黄海军,杨 海. 瓶颈处停车换乘随机均衡选择模型 [J]. 管理科学学报 ,2005 ,8( 1) : 1-6.
- Tian Qiong ,Huang Haijun ,Yang Hai. Mode choice models based on logit stochastic equilibrium in transportation systems with park-and-ride option [J]. Journal of Management Sciences in China ,2005 ,8( 1) : 1-6. ( in Chinese)
- [24]Liu P ,Liao F X ,Huang H J ,et al. Dynamic activity-travel assignment in multi-state supernetworks under transport and location capacity constraints [J]. Transportmetrica A ,2016 ,12( 7) : 572-590.
- [25]鲍 月,徐 猛,高自友. 基于均值-超量系统总阻抗的随机拥挤收费模型 [J]. 管理科学学报 ,2015 ,18( 1) : 32-40.
- Bao Yue ,Xu Meng ,Gao Ziyu. Stochastic model of congestion pricing based on mean-excess total travel time [J]. Journal of Management Sciences in China ,2015 ,18( 1) : 32-40. ( in Chinese)

## Activity-based bottleneck model and congestion toll pricing issues

LI Zhi-chun , DING Jing

School of Management , Huazhong University of Science and Technology , Wuhan 430074 , China

**Abstract:** The Vickrey's bottleneck model adopted a trip-based approach , which cannot consider the linkage between the commuter's activity schedule and trip. This paper extends the Vickrey's bottleneck model to address the departure time choice in the morning peak by introducing an activity-based bottleneck model. This model explicitly considers the commuter's trade-off between the utility received by activities at home and at work and the disutility of travel between activity locations. The optimal time-varying toll and step toll are then investigated by using the activity-based bottleneck models with constant and linear marginal activity utility functions. The optimal toll solutions are also compared with the traditional Vickrey's bottleneck model. The results show that the curve of the optimal solution for the time-varying toll is not piecewise linear but piecewise quadratic when the marginal activity utility is linear. The traditional Vickrey's bottleneck model overestimates the queuing delay at the bottleneck , the step toll level , and the start time and end time of the morning peak period. The optimal step tolls under the trip-based bottleneck model and the bottleneck model with constant marginal activity utility are half of the maximum value of the optimal time-varying tolls and exactly eliminate half of the total queuing delay at the bottleneck. The trip-based bottleneck model and the bottleneck model with constant marginal activity utility underestimate the role of step tolls in removing the bottleneck queues compared to the bottleneck model with the linear marginal activity utility.

**Key words:** bottleneck model; activity-based approach; time-varying toll; step toll