

# 考虑规整性的露天开采调度问题研究<sup>①</sup>

刘文博<sup>1,2</sup>, 孙德峰<sup>1</sup>, 唐立新<sup>1</sup>

(1. 东北大学工业与系统工程研究所, 沈阳 110819; 2. 辽宁省交通高等专科学校, 沈阳 110122)

**摘要:** 露天开采调度问题的相关研究通常采用块状矿床模型将露天矿体离散为块矿进行考虑, 该模型是在给定的技术和经济条件下, 以经济效益最大为目标, 对露天矿中处于不同地理坐标位置的块矿的开采顺序及开采时间进行优化决策. 本文根据实际生产过程特点, 将开采过程中的规整性目标加入到经典块状矿床模型中进行考虑, 进而建立了一个新的0-1整数规划模型. 文章提出了一种拉格朗日松弛(LR)算法进行求解. 首先利用优先级约束背包结构, 根据块选择规则构建了有效不等式, 使得求解时间明显缩短; 其次, 基于有向无环图结构设计了快速的可行解获得策略, 还利用最早开始时间和最迟开始时间两种算法进行变量消除, 减小问题求解规模; 最后, 通过真实的数值算例验证了文中算法的有效性, 结果显示与标准求解软件CPLEX相比, 本文设计的有效不等式和获得可行解的算法策略在求解时间上占有优势, 同时能够在满足优先级顺序约束、生产约束以及开采的块矿所获净现值尽可能大的前提下, 保证开采的过程是规整的.

**关键词:** 露天开采调度问题; 0-1整数规划; 拉格朗日松弛算法; 有向无环图

**中图分类号:** TP301 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2017)12-0072-15

## 0 引言

露天开采是一个高层次、复杂的系统工程, 有其特殊的工艺要求, 且其开采规划合理与否与矿山的利润密切相关, 因此在露天开采过程中不仅需要合理应用现代化的自动化设备以及开发新的工艺, 还要对开采过程进行合理规划与调度, 从而使得矿山企业最大程度上获利. 现实中由于矿山的利润空间越来越小, 矿山工作者们开始越来越多地把关注度放在了露天开采调度上, 即决策位于不同地理坐标位置的各个矿体的开采顺序以及开采时间, 从而在整个矿山开采生命周期内合理安排开采顺序以获得最大利润.

地壳中的矿产资源是不可再生资源, 开采往往是一次性的, 且开采活动不能像生产车间那样

有固定的场所, 它必须要随着矿物质的存在而不停地移动, 同时在开采过程中还要受到自然条件的限制, 需要不断探测新的开采储量, 才能保证开采的顺利进行. 露天开采最大的特点之一就是必须始终保持一定的动态时空发展顺序, 这一顺序决定了矿床开采的各道工序及工艺.

在矿床开采过程中, 一般要将整个矿床分为各个阶段, 再把阶段划分为块矿(或采区), 块矿(或采区)是矿床开采的基本单元. 在当今主流研究和应用中, 露天开采调度问题大多采用块状矿床模型来进行建模和处理. 该模型是对矿床属性在空间分布上的数字化描述. 它是品位和矿量估计、境界设计、开采计划与矿石质量控制等多项工作的基础. 首先对地质数据进行综合分析, 将矿床离散成一个个单元块, 然后对钻孔取样的化验数

<sup>①</sup> 收稿日期: 2016-06-24; 修订日期: 2017-01-16.

基金项目: 国家自然科学基金资助创新研究群体项目(71321001).

作者简介: 刘文博(1980—), 女, 辽宁沈阳人, 博士生, 副教授. Email: wenbo-315@163.com

据进行插值估算,估算出每一个单元块的属性值,包括金属品位、岩性、地质构造、物理性质、净现值等。单元块的大小是综合考虑开采、加工以及地质特征等因素确定的。

根据块状矿床模型的用途及灵活性要求的不同,每一个单元块需要赋予多个属性变量值。Kim<sup>[1]</sup>认为,块状矿床模型可以大体分为五类:即规则三维等块模型、三维可变块状模型、网状矿脉模型、二维不规则块状模型和三维不规则块状模型。尽管不同类型的矿床可能需要使用不同的块状模型来描述,但应用最广的是规则三维等块模型。这种模型是将矿床离散成固定尺寸的规则块(一般为长方形)形成的,它具有下列优点:

1) 由于其规则性,模型便于计算机处理,同时在计划与调度方面有助于优化算法的开发;

2) 该模型能在实践中随着已知信息量的增加而不断更新。

本文出现的块状矿床模型是指规则三维等块模型。

基于块状矿床模型,露天开采调度优化问题是指在盈利最大化的目标下决策块矿的开采时间和顺序,因此本问题又称为露天开采块排序(open pit block sequencing, OPBS)问题。为了满足最大帮坡角和最小工作平盘宽度等要求,开采过程要考虑开采顺序约束,以保证开采过程中遵循一定的坡度规则从而防止矿山塌陷,同时还需要考虑各种与开采有关的资源消耗量的限制。

现有的露天矿山,根据开采规模不同,涉及到的单元块(块矿)的数目通常有几万块甚至几十万块,问题规模巨大,计算相当困难,导致很难找到一个最优的开采顺序,甚至在一个可接受时间内也很难找到一个满意的解决方案,因此矿山工作者们是很难针对矿石价值的市场变化迅速做出反应的。基于开采现实性的考虑,本文建立了考虑规整性的露天开采调度问题模型,其求解是采用了拉格朗日松弛算法和启发式算法相结合的技术,并对来自于实际矿山参数标准的大、中、小规模算例进行快速求解,其结果可以帮助矿山工作者们精确而快速地规划矿山开采顺序,在整个开采周期满足规整开采的同时还可获得最大的利润。

块状矿床模型的出现,使数学优化方法在露

天开采上得到了广泛应用。Newman 等<sup>[2]</sup>提出早在 1960 年就已将运筹学应用到了矿山领域,通过最优化方法和模拟仿真技术解决了一些露天和地下的矿山开采计划和调度问题。现有的研究中,与露天开采调度问题相关的数学模型与经典块排序问题相似,但有一部分研究为了降低问题难度在模型中去掉了一些约束(如与块矿开采有关的最小资源消耗量限制约束)。以往研究中求解该类问题的方法主要有:基于分解的精确算法如分支定界方法、基于数学规划的近似算法如拉格朗日松弛算法等、智能优化算法如遗传算法<sup>[3]</sup>、蚁群算法<sup>[4]</sup>等以及根据问题特点构造的启发式算法等,这些方法遇到的最大障碍就是在实际的大规模情境下计算相当困难,当力求解决此难题。

Caccetta 等<sup>[5]</sup>是用分支定界方法来求解露天开采调度问题;Dagdelen<sup>[6]</sup>及 Dagdelen 和 Johnson<sup>[7]</sup>采用拉格朗日松弛算法求解多周期的开采计划与调度问题,他是将每个时间周期的辅助约束(指开采能力、选厂能力、入选品位等)松弛掉,得到一个多周期开采顺序优化子问题,子问题采用 LG(Lerchs-Grossmann)图论法求解;Hochbaum 等<sup>[8]</sup>在 Dagdelen 和 Johnson 的基础上对 Lerchs-Grossman 算法进行了改进;Akaike 等<sup>[9]</sup>同样采用拉格朗日松弛算法,他是把具有网络流结构特点的复杂约束放到目标函数中,松弛子问题采用最大闭包算法来求解;Cai<sup>[10]</sup>也是采用拉格朗日松弛算法,由于问题的复杂性,他所提出的方法无法保证找到可行解;Chicoisne 等<sup>[11]</sup>的模型中没有考虑与块矿开采有关的最小资源消耗量限制约束,通过线性规划松弛算法来求解该问题,并采用基于拓扑排序的快速凑整算法找到整数可行解;Lambert 等<sup>[12]</sup>采用的是一种 Tailored Lagrangian Relaxation(TLR)算法求解该问题,最大的算例规模是 25 000 个块和 10 个周期的情形。

Denby 等<sup>[13]</sup>基于自主学习的遗传算法获得最终的开采境界以及块矿的开采顺序,但该算法的结果无法保证最优;Cullenbine 等<sup>[14]</sup>提出了一种称之为“滑动时间窗”的启发式算法来求解这个开采调度问题,可以得到一个近优解;Samavati 等<sup>[15]</sup>提出了一种局部分支启发式算法求解该调度问题;Lamghari 等<sup>[16]</sup>与 Chicoisne 的模型相同,其贡献是提出了一个两阶段混合启发式方法;

Bley 等<sup>[17]</sup>也与 Chicoisne 的模型相同,通过启发式算法最大规模只能求解到 420 个块矿和 10 个周期的算例; Ramazan<sup>[18]</sup>开发出了一个新的“根树”算法来求解该问题; Liu 等<sup>[19]</sup>利用问题特征提出了基于网络流并结合图论的一种新的算法来有效求解大规模的露天开采调度问题; Martinez 等<sup>[20]</sup>用一个混合整数规划模型来描述矿山的开采调度问题,提出了一个基于分解的启发式算法.

在以往的露天开采调度问题的研究中,模型大多是以经济价值为目标,主要考虑开采顺序约束,同时在开采过程中满足开采工艺的相关要求.但该模型求出的优化结果应用在实际的开采活动中仍然是不可行的或者开采成本过高,原因是优化结果中开采的块矿是不连续的,尤其是在同一周期内开采的块矿不集中,导致采掘工作面不够连续平滑,开采设备难以作业,甚至无法作业,或者会出现开采设备频繁移动,这样不但会降低设备的作业效率,还会增加额外的生产成本.为了开采的现实可行性,在模型中除了要考虑经济效益目标,还应考虑开采的规整性,规整性的含义是指开采的块矿越集中,则开采区域越规整.以往文献中,李建祥等<sup>[21]</sup>在露天矿单周期调度模型中将基于投影的规整性测度加入到目标函数里,其规整性测度的形式是非线性的,经过线性转化后模型通过 LINDO 软件求解.

与以往文献研究露天开采调度问题不同,本文在数学模型和求解算法上有一些创新,主要体现在如下:

1) 模型中考虑了规整性目标.与前人不同,本文所建的多周期露天开采调度问题数学模型新增了规整性目标,分别用每个周期内已开采块矿之间的空间距离之和与整个开采周期结束后所有已开采块矿之间的空间距离之和进行刻画,这样设置的意义既有利于求解又能使开采的块矿尽量集中,保证安全开采,由于其与开采成本有关,所以都可用经济指标来刻画,由此可建成一个新的 0-1 整数规划模型.

2) 有效不等式的获得.研究块矿的优先开采顺序约束与每个周期和块矿开采相关的最大资源消耗量限制的特点,利用背包问题的原理和有效的块选择规则提出了两类有效不等式;同时基于块矿的开采顺序约束与每个周期和块矿开采相关

的最小资源消耗量限制的特点也提出了一类有效不等式,能够加速算法收敛速度.

3) 基于有向无环图寻求可行解.子问题得到的解无法全部满足原问题的约束,本文基于有向无环图的结构设计出了一种启发式算法,实验结果表明可以找到原问题的可行解.

## 1 数学模型

### 1.1 问题描述

将露天矿山离散成若干独立的块矿  $i$ , 决策在什么时间开采哪些块矿. 本模型假定块矿  $i$  只能在一个周期内被开采, 不允许拆分,  $x_i^t$  表示在时间  $t$  开采块矿  $i$ . 受矿山的地理条件限制, 各块矿的开采是有先后顺序的,  $B_i$  是块矿  $i$  之前开采的直接先行块集合. 开采块矿  $i$  的资源消耗量为  $C_i$ , 根据开采的能耗限制和企业的生产计划, 在每个周期消耗总量要控制在一定范围内(即  $C_{\min}$  和  $C_{\max}$  之间). 目标是在整个开采周期开采出来的块矿获得的净现值最大, 以及整个开采周期结束和某个时间周期内开采不满足规整性所导致的惩罚成本最小.

### 1.2 符号及变量定义

以下建立的是考虑规整性的露天开采调度问题的 0-1 整数规划模型. 首先给出模型中参数和决策变量的定义.

参数:

$B$ ——所有块矿的集合;

$T$ ——开采时间周期集合;

$v_i^t$ ——时间  $t$  开采块矿  $i$  所获得的净现值;

$C_i$ ——与开采块矿  $i$  有关的资源消耗量;

$C_{\min}$ ——每个周期矿床开采的资源消耗量最小值;

$C_{\max}$ ——每个周期矿床开采的资源消耗量最大值;

$B_i$ ——根据地理条件限制, 在块矿  $i$  之前必须要开采出来的直接先行块的集合;

$d_{ij}$ ——根据块矿的坐标求得的块矿  $i$  与块矿  $j$  的距离;

$\alpha \beta$ —— $\alpha \beta > 0$ , 分别表示在某周期内开采的块矿不满足规整性以及整个开采周期结束后所

有已开采的块矿不满足规整性所带来的惩罚费用系数,其惩罚费用系数与开采成本有关.

变量:

$$x_i^t = \begin{cases} 1 & \text{矿块 } i \text{ 在时间 } t \text{ 被开采出来;} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$w_i^t = \begin{cases} 1 & \text{矿块 } i \text{ 在时间 } t \text{ 及 } t \text{ 之前被开采出来;} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$x_i^t$  与  $w_i^t$  有下面的推导公式  $x_i^t = w_i^t - w_i^{t-1}, \forall t \in T$ , Gaupp<sup>[22]</sup> 详细介绍了应用 at 公式(即采用决策变量  $x_i^t$ ) 和 by 公式(即采用决策变量  $w_i^t$ ) 的联系与区别,并证明了用 by 公式更易于求解,所以本文的数学模型也采用 by 公式.

$$G_{ij}^t = \begin{cases} 1 & \text{矿块 } i \text{ 和矿块 } j \text{ 均在时间 } t \text{ 内被开采出来} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$Z_{ij}^T = \begin{cases} 1 & \text{矿块 } i \text{ 和矿块 } j \text{ 在时间 } T \text{ 及 } T \text{ 之前被开采出来} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

### 1.3 考虑规整性的露天开采调度的建模

采用上述参数和决策变量,建立的 0-1 整数规划模型表示如下

$$\max F = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^B v_i^t (w_i^t - w_i^{t-1}) - \alpha \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^B d_{ij} G_{ij}^t - \beta \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^B d_{ij} Z_{ij}^T \quad (1)$$

s. t.

$$w_i^{t-1} \leq w_i^t, \forall i \in B, \forall t = 1; \dots; T \quad (2)$$

$$w_i^0 = 0, \forall i \in B \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^T (w_i^t - w_i^{t-1}) \leq 1, \forall i \in B \quad (4)$$

$$G_{ij}^t \geq (w_i^t - w_i^{t-1}) + (w_j^t - w_j^{t-1}) - 1, \forall i \in B, \forall j \in B, \forall t = 1; \dots; T \quad (5)$$

$$Z_{ij}^T \geq w_i^T + w_j^T - 1, \forall i \in B, \forall j \in B \quad (6)$$

$$w_i^t \leq w_i^t, \forall i \in B, \forall i' \in B_i, \forall t = 1; \dots; T \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^B c_i (w_i^t - w_i^{t-1}) \leq C_{\max}, \forall t = 1; \dots; T \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^B c_i (w_i^t - w_i^{t-1}) \geq C_{\min}, \forall t = 1; \dots; T \quad (9)$$

$$w_i^t \in \{0, 1\}, \forall i \in B, \forall t = 1; \dots; T \quad (10)$$

$$G_{ij}^t \in \{0, 1\}, \forall i \in B, \forall j \in B, \forall t = 1; \dots; T \quad (11)$$

$$Z_{ij}^T \in \{0, 1\}, \forall i \in B, \forall j \in B, \forall t = 1; \dots; T \quad (12)$$

模型中的目标函数(1)分为三项:第一项是指开采出来的块矿所能获得的净现值,每个块矿的净现值是由该块矿的市场价值减去开采和加工矿石的成本得出;第二项是指开采过程中每个时间周期与开采规整性相关的惩罚成本;第三项是指在整个开采周期结束后整个矿体的规整性惩罚成本,后面两项的目的是要保证开采过程中矿床尽量规整,并在某个时间周期内能集中开采,以便开采设备的搬运和运输,其规整性指标主要是用块矿之间的空间距离来衡量.由于是最大化问题,所以后面两项的前面都加上了负号.其中  $\alpha$   $\beta$  两个参数的选取是要使得后面两项的值在数量级上与第一项保持一致,且  $\beta$  的取值要小于  $\alpha$ .

约束(2)表示如果块矿  $i$  在时间  $t-1$  及  $t-1$  之前开采出来,那么该块矿  $i$  在时间  $t$  及  $t$  之前肯定也被开采出来.约束(3)为初始化约束,表示当  $t=0$  时,  $w_i^0 = 0$ .本模型中块矿不允许拆分,即约束(4)表示每个块矿最多只能在一个且唯一一个时间周期内被开采出来.约束(5)表示任意两个块矿是否在时间  $t$  内同时被开采出来.约束(6)表示任意两个块矿是否在时间  $T$  及  $T$  之前都被开采出来.约束(7)表示块矿的开采顺序.约束(8)和(9)是从开采的流程工艺和企业管理角度要确保在任一个时间周期内,矿石开采所需的资源消耗总量要控制在一个最大值和最小值之间.约束(10)~约束(12)是变量的取值范围.

与以往文献不同的是模型目标函数中除了净现值目标以外还增加了规整性这一具有现实意义的目标,由于矿山开采是否规整是与开采成本相关的,与传统模型单纯考虑经济指标相比肯定是有变化的,但本文的新目标是将原有的净现值和与规整性相关的成本全部纳入进来,考虑的是整体利润最大化,同时还要满足块矿的开采优先级顺序以及与块矿开采有关的资源消耗量的限制,这样使得该问题的求解愈加复杂.

## 2 算法求解

如前所述,求解经典块状矿床模型的方法有很多,就本模型而言,智能优化算法或启发式算法

难以保证解的质量 标准软件包如 CPLEX 难以在可接受时间内求解大规模算例.

本文采用拉格朗日松弛算法进行求解,他是求解大规模复杂问题的一种有效技术,其基本原理就是利用拉格朗日乘子<sup>[23]</sup> 松弛掉原问题中难以处理的约束,通过求解拉格朗日对偶问题而逐步逼近原问题的最优解. 松弛后的对偶函数的目标值是原问题的下界,通过启发式算法可以将松弛问题的解变成可行解,可行解的目标值为原问题提供了一个上界,解的质量通过相对的对偶间隙来衡量. 该算法需要解决三个问题:子问题求解、拉格朗日乘子更新和原问题可行解的获得.

在求解原问题时,基于最早的开始时间和最迟的开始时间提出了一种变量消除技术,可以加快求解速度.

### 2.1 算法加速策略

文中采用最早的开始时间和最迟的开始时间思想,对一些变量进行消除. 根据问题特点,由所有比某块矿优先开采的集合以及最大的资源消耗量限制就可以求得该块矿最早开采的时间,同理,考虑被某块矿限制开采的那些块矿集合以及最小的资源消耗量的限制可以求出该块矿最迟必须开采的时间. 这个技术可以减少变量的数量,加快求解时间.

#### 1) 基于最大的资源消耗量的最早开始时间

每个块矿的最早开始时间是指基于每个块矿在矿井中的地理位置和最大的资源消耗量限制计算出最早能什么时间开采到这个块矿. 通过下面的启发式算法可以求得矿山中每个块矿的最早开始时间.

符号定义:

$TB_i$ ——基于优先级顺序约束在块矿  $i$  之前开采的所有块矿的集合;

$TPO_i$ ——开采块矿  $i$  和块矿集合  $TB_i$  所需要的资源消耗量;

$ES_i$ ——基于最大资源消耗量求得的块矿  $i$  的最早开始时间.

算法:

对于任一个块矿  $i$ , 计算  $TPO_i = c_i + \sum_{j \in TB_i} c_j$ ,  $ES_i = \left\lfloor \frac{TPO_i}{C_{max}} \right\rfloor + 1$ , 从而得到每个块矿  $i$  的  $ES_i$ .

#### 2) 基于最小的资源消耗量的最迟开始时间

与前面最早的开始时间相类似,该启发式算法也可以计算出每个块矿  $i$  最迟的开始时间,是指基于每个块矿在矿井中的地理位置和最小的资源消耗量限制计算出最晚要什么时间开采到这个块矿.

符号定义:

$TO$ ——开采整个矿山所有块矿所需要的资源消耗量;

$H_i$ ——基于优先级顺序约束所有阻挡块矿  $i$  开采的块矿集合;

$THO_i$ ——开采块矿  $i$  和块矿集合  $H_i$  所需要的资源消耗量;

$LS_i$ ——基于最小资源消耗量限制求得的块矿  $i$  的最迟开始时间.

算法:

对于任一个块矿  $i$ , 计算  $THO_i = c_i + \sum_{j \in H_i} c_j$ ,

$LS_i = \left\lfloor \frac{TO - THO_i}{C_{min}} \right\rfloor + 1$ , 从而得到每个块矿  $i$  的  $LS_i$ .

### 2.2 拉格朗日松弛算法

由于该模型考虑了规整性目标,使得原来的问题更加复杂,在大规模的情况下求解时间过长或者因为内存超出而得不到解. 本文根据不同算例分别采用三种松弛策略,其子问题均由 CPLEX 软件求解.

将该问题的目标函数等价转换为求最小化问题,即

$$\min F = - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^B v_i^t (w_i^t - w_i^{t-1}) + \alpha \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^B d_{ij} G_{ij}^t + \beta \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^B d_{ij} Z_{ij}^T$$

将拉格朗日松弛原理用于开采调度问题中,分别采用三种松弛策略,第一种策略是只松弛约束(9),即资源消耗量的最小值限制约束;第二种策略是只松弛约束(8),即资源消耗量的最大值限制约束;第三种策略是将约束(8)和约束(9)都松弛掉.

在第一种松弛中,引入拉格朗日乘子向量  $\mu_t > 0, t = \{1, 2, \dots, T\}$  得到下面的松弛问题 ( $LR^1$ )

$$L_1 = \min \left\{ \begin{aligned} & - \sum_{i=1}^T \sum_{i=1}^B v_i^t (w_i^t - w_i^{t-1}) + \\ & \alpha \sum_{i=1}^T \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^B d_{ij} G_{ij}^t + \beta \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^B d_{ij} Z_{ij}^t + \\ & \left[ \sum_{i=1}^T \mu_i \left[ - \sum_{i=1}^B c_i (w_i^t - w_i^{t-1}) + C_{\min} \right] \right] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

满足约束(2) ~ 约束(8) 约束(10) ~ 约束(12) .

进一步,得到相应的拉格朗日对偶问题 (LD<sup>1</sup>)

$$LD_1 = \max_{\{\mu_i\}} \{L_1\} \quad (14)$$

满足约束(2) ~ 约束(8) 约束(10) ~ 约束(12) .

在第二种松弛中,引入拉格朗日乘子向量  $\omega_i > 0$   $\mu = \{1, 2, \dots, T\}$  得到下面的松弛问题 (LR<sup>2</sup>)

$$L_2 = \min \left\{ \begin{aligned} & - \sum_{i=1}^T \sum_{i=1}^B v_i^t (w_i^t - w_i^{t-1}) + \\ & \alpha \sum_{i=1}^T \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^B d_{ij} G_{ij}^t + \beta \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^B d_{ij} Z_{ij}^t + \\ & \left[ \sum_{i=1}^T \omega_i \left[ \sum_{i=1}^B c_i (w_i^t - w_i^{t-1}) - C_{\max} \right] \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

满足约束(2) ~ 约束(7) 约束(9) ~ 约束(12) .

进一步,得到相应的拉格朗日对偶问题 (LD<sup>2</sup>)

$$LD_2 = \max_{\{\omega_i\}} \{L_2\} \quad (16)$$

满足约束(2) ~ 约束(7) 约束(9) ~ 约束(12) .

在第三种松弛策略中,引入拉格朗日乘子向量  $\lambda_i > 0$  和  $u_i > 0$  松弛掉约束(8) 和约束(9) 得到下面的松弛问题(LR<sup>3</sup>)

$$L_3 = \min \left\{ \begin{aligned} & - \sum_{i=1}^T \sum_{i=1}^B [v_i^t (w_i^t - w_i^{t-1})] + \\ & \alpha \sum_{i=1}^T \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^B d_{ij} G_{ij}^t + \beta \sum_{i=1}^B \sum_{j=1}^B d_{ij} Z_{ij}^t + \\ & \left[ \sum_{i=1}^T \lambda_i \left[ \sum_{i=1}^B c_i (w_i^t - w_i^{t-1}) - C_{\max} \right] + \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^T u_i \left[ - \sum_{i=1}^B c_i (w_i^t - w_i^{t-1}) + C_{\min} \right] \right] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

并满足约束(2) ~ 约束(7) ,约束(10) ~ 约束(12) .

同理,得到相应的拉格朗日对偶问题(LD<sup>3</sup>)

$$LD_3 = \max_{\{\lambda_i, \mu_i\}} \{L_3\} \quad (18)$$

满足约束(2) ~ 约束(7) 约束(10) ~ 约束(12) .

由于第三种松弛策略比第一种和第二种松弛策略分别多松弛掉约束(9) 和约束(8) ,其算法原理一样,这里只阐述具有代表性的第三种松弛策略算法步骤.具体步骤表述如下:

**步骤 1** 拉格朗日松弛算法的初始化. 令  $m = 0$  , $UB = 0$   $LB = -\infty$  , $\lambda^{(0)} = 0$   $\mu^{(0)} = 0$  ,其中  $m$  为迭代次数编号, $\lambda^{(m)}$   $\mu^{(m)}$  为在第  $m$  代中的拉格朗日乘子,  $LB$  是当前问题的最大下界.

**步骤 2** 求解子问题. 给定拉格朗日乘子,所有的子问题采用 CPLEX 软件求解,可以得到问题 LD<sup>3</sup> 的最优解和相应的目标函数值,  $g_{LR^3}^{(m)}$  . 如果  $g_{LR^3}^{(m)} > LB$  ,用  $g_{LR^3}^{(m)}$  更新  $LB$  .

**步骤 3** 可行解的构造. 基于 LD<sup>3</sup> 的解,通过 2.5.2 节中的启发式算法构造原问题的可行解,将构造出的可行解记为  $X$  ,对应的目标函数值记为  $g_{LD^3}^{(m)}$  . 如果  $g_{LD^3}^{(m)} < UB$  ,用  $g_{LD^3}^{(m)}$  更新  $UB$  ,用  $X$  更新  $X^*$  ,其中  $X^*$  是原问题的当前最好解.

**步骤 4** 如果满足下面的停止准则之一,算法停止.

1) 对偶间隙  $gap = |(UB - LB) / LB| < \varepsilon$  ,其中  $\varepsilon$  是一个较小的正数.

2)  $m$  大于预先给定的迭代次数上限.

**步骤 5** 按照 2.4 节中的描述更新拉格朗日乘子,令  $m = m + 1$  转到步骤 2.

### 2.3 子问题求解

子问题通过 CPLEX 软件求解,针对第一种和第二种松弛策略根据问题特点找到了一些有效不等式,将这些有效不等式作为约束条件嵌入到 CPLEX 程序中进行求解.

分析模型特点,发现约束(8) 的数学结构与 0-1 背包问题极为相似,于是可以利用 0-1 背包问题的特点找到有效不等式.为了描述方便,下面定义中的变量用  $x_i^t$  来表示,  $x_i^t$  与  $w_i^t$  的数学关系在 1.1 节中已经介绍过.

定义一个 0-1 背包问题集合  $P = \{x \in \{0, 1\}^n$

1}:  $\sum_{i \in N} c_i x_i^t \leq C_{\max}, \forall t$  , 这里  $c_i > 0, i = \{1, 2, \dots, B\}$  ,  $C_{\max} > 0, N = \{1, 2, \dots, B\}$  . 对集合  $Q \subseteq N$  如果对  $P$  满足  $\sum_{i \in Q} c_i > C_{\max}$  , 那么称集合  $Q$  为一个覆盖. 如果对于任意覆盖  $Q, Q \setminus \{j\}_{j \in Q}$  不再是一个覆盖, 那么称  $Q$  为最小覆盖.

**定理 1** 如果  $Q \subseteq N$  是一个覆盖, 那么覆盖不等式  $\sum_{i \in Q} x_i^t \leq |Q| - 1, \forall t$  为  $P$  的有效不等式, 这里  $|Q|$  为覆盖  $Q$  中元素的个数.

**证明** 对于一个覆盖  $Q$ , 假设上述覆盖不等式对  $P$  不成立, 即  $\sum_{i \in Q} x_i^t > |Q| - 1$  , 那么显然  $\sum_{i \in Q} c_i x_i^t \geq \sum_{i \in Q} c_i > C_{\max}$  ; 又因为  $Q \subseteq N$  , 所以  $\sum_{i \in N} c_i x_i^t \geq \sum_{i \in Q} c_i x_i^t$  , 于是可以得到  $\sum_{i \in N} c_i x_i^t > C_{\max}$  , 这与集合  $P$  的定义相矛盾. 因此定理 1 成立.

**定理 2** 如果  $Q \subseteq N$  是一个覆盖, 那么扩展的覆盖不等式  $\sum_{i \in E(Q)} x_i^t \leq |Q| - 1, \forall t$  也是  $P$  的有效不等式, 这里  $E(Q) = Q \cup \{j: c_j \geq c_i, i \in Q\}$  .

**证明** 同上.

定义一个表示优先级顺序约束的弧集合  $\mathfrak{R} = \{(i, j) | i \in \{1, \dots, B\}, j \in B_i\}$  , 其中  $B_i$  表示块矿  $i$  的直接先行块的集合, 用  $\Psi$  表示  $\mathfrak{R}$  的传递闭包, 对于每个块矿  $i$ , 包括其在内的所有必须要优先开采的块矿集合用  $QB_i$  来表示, 即  $QB_i = \{i\} \cup \{j: (i, j) \in \Psi\}$  . 以下面两个图为例, 图 1 中  $B_{13} = \{7, 8, 9\}$  , 图 2 中  $QB_{13} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 13\}$  .

本文考虑覆盖  $Q$  中元素的个数为 1 和 2 的情形, 找到了三类有效不等式.

**第一类有效不等式:** 如果  $Q \subseteq N$  是一个最小覆盖,  $|Q| = 1$  , 且  $\sum_{j \in QB_i} c_j > tC_{\max}$  , 那么  $\sum_{\tau=1}^t x_i^\tau = 0$  , 也即  $w_i^t = 0$  , 该式也可称作“变量固定”.

**第二类有效不等式:** 如果  $Q \subseteq N$  是一个最小覆盖,  $|Q| = 2$  , 且  $\sum_{k \in \{QB_i \cup QB_j\}} c_k > tC_{\max}$  , 那么  $w_i^t + w_j^t \leq 1$  .

在覆盖  $Q$  中元素为 2 的情形中, 最多有  $TB(B-1)/2$  种组合, 在不影响原问题最优解的前提下, 本文采用一种合理的块选择规则来产生有

效的覆盖不等式.

定义两个块选择规则参数  $Percent_{ES}^i$  和  $Percent_{LS}^i$  , 其他符号的定义同前面的描述.

$$Percent_{ES}^i = \frac{c_i}{ES_i \times C_{\max}} \tag{19}$$

$$Percent_{LS}^i = \frac{c_i}{TO - (LS_i - 1) \times C_{\min}} \tag{20}$$

**举例说明:** 以图 2 为例, 假设  $c_i = 10, C_{\max} = 40$  . 块矿 7 的直接先行块集合为  $B_7 = \{1, 2, 3\}$  , 块矿 8 的直接先行块集合为  $B_8 = \{2, 3, 4\}$  , 块矿 9 的直接先行块集合为  $B_9 = \{3, 4, 5\}$  , 开采包括块矿 7 和 8 及其所有优先开采的块矿集合  $QB_{7,8} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$  , 开采包括块矿 7 和 9 及其所有优先开采的块矿集合  $QB_{7,9} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$  . 根据第二类有效不等式的定义, 可有  $w_7^1 + w_8^1 \leq 1$  和  $w_7^1 + w_9^1 \leq 1$  成立.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

图 1 块矿 13 的直接先行块

Fig. 1 The immediate predecessor set of ore block 13

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

图 2 块矿 13 的所有优先开采集合 ( $QB_{13}$ )

Fig. 2 The entire predecessor set of ore block 13 ( $QB_{13}$ )

根据式 (19), 可知块选择规则参数  $Percent_{ES}^{i \in B_7 \cup B_8} = 75\%$  ,  $Percent_{ES}^{i \in B_7 \cup B_9} = 87.5\%$  , 那么相对于块矿 7 而言, 块矿 9 要比块矿 8 更适合与块矿 7 构造有效不等式. 因此, 在构造有效不等式时, 本文会选择规则参数比率大的值作为合适的待选块矿. 块选择规则参数  $Percent_{LS}^i$  的计算原理与其类似, 可参见下面的算例.

**第三类有效不等式:** 基于上述思想, 通过约束 (9) 可知在一个时间周期内矿石开采所需的资源消耗量必须要大于等于规定的资源消耗量最小值, 考虑两个元素的情形, 可以推出某两个块矿中的其中一个块矿必须要某个时间周期之前必须被开采出来. 因此, 可以用下面的式子表示, 即:

$w_i^t + w_j^t \geq 1$ , 其中  $i$  和  $j$  是根据块选择规则选出来的。

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21

图 3 块矿 10 和 12 的“支撑”集合

Fig. 3 The holding sets of ore blocks 10 and 12

以图 3 为例, 假设  $c_i = 10, C_{\min} = 20$ . 块矿 16 的直接先行块集合  $B_{16} = \{8, 9, 10\}$ , 同理  $B_{17} = \{9, 10, 11\}, B_{18} = \{10, 11, 12\}$ , 由此可以推出要想开采块矿 16, 17, 18 必须要先开采出块矿 10, 定义块矿 10 的“支撑”集合(包括其本身)为:  $H_{10} = \{10, 16, 17, 18\}$ , 同理可以推出块矿 12 的“支撑”集合(包括其本身)为:  $H_{12} = \{12, 18, 19, 20\}$ , 块矿 10 和 12 的组合“支撑”集合(包括其本身)为:  $H_{10,12} = H_{10} \cup H_{12} = \{10, 12, 16, 17, 18, 19, 20\}$ , 由 3.5.2 节描述的计算公式可分别求得块矿 10、块矿 12 以及块矿 10 和块矿 12 组合的最迟开采时间为:  $LS_{10} = 9, LS_{12} = 9, LS_{10,12} = 8$ , 由于  $LS_{10,12} < \min(LS_{10}, LS_{12})$ , 于是可以得到一个有效不等式  $w_{10}^8 + w_{12}^8 \geq 1$ , 其含义就是指在时间周期 8 之前, 块矿 10 和块矿 12 中至少要有一个块矿必须被开采出来. 同理也可以得到一个有效不等式  $w_{10}^8 + w_{11}^8 \geq 1$ . 根据式(20), 可知块选择规则参数  $Percent_{LS}^{i \in H_{10} \cup H_{12}} = 100\%$ ,  $Percent_{LS}^{i \in H_{10} \cup H_{11}} = 85.7\%$ , 那么相对于块矿 10 而言, 块矿 12 要比块矿 11 更适合与块矿 10 构造有效不等式。

上述的三类有效不等式可以根据规则通过启发式算法获得, 将这些有效不等式作为约束嵌入到 CPLEX 程序中. 在求解原问题和前两种松弛子问题中添加有效不等式后, 可以加快求解时间, 具体求解结果可见 3.2 中的表 4。

### 2.4 拉格朗日乘子更新

拉格朗日乘子更新采用的是次梯度算法<sup>[24]</sup>求解与式(14)、式(16)和式(18)相关的对偶问题. 第三种松弛策略分别比前两种松弛策略多松弛了一个约束, 乘子更新方法都是一样的, 为具代表性, 这里只阐述第三种松弛策略的乘子更新算法。

求解对偶问题(18)的次梯度算法步骤如下:

步骤 1 初始化. 令迭代次数  $h = 1$ , 乘子  $\{\lambda_i\}$  和  $\{u_i\}$  初始化为 0。

步骤 2 求解子问题并计算对偶函数值和次梯度. 利用 CPLEX 软件求解所有子问题, 根据式(17)计算对偶函数值, 并计算次梯度

$$g_1(\lambda^h) = \sum_i c_i (w_i^t - w_i^{t-1}) - C_{\max},$$

$$g_2(u^h) = - \sum_i c_i (w_i^t - w_i^{t-1}) + C_{\min} \quad (21)$$

其中  $\lambda^h$  是第  $h$  次迭代中由  $\{\lambda_i\}$  组成的乘子向量,  $u^h$  是第  $h$  次迭代中由  $\{u_i\}$  组成的乘子向量。

步骤 3 更新乘子. 根据下式计算下次迭代要使用的乘子

$$\lambda^{h+1} = \lambda^h + s_1^h g_1(\lambda^h) \text{ 和 } u^{h+1} = u^h + s_2^h g_2(u^h) \quad (22)$$

第  $h$  代步长  $s_1^h$  和  $s_2^h$  计算如下

$$s_1^h = \omega \frac{L^U - L^h}{\|g_1(\lambda^h)\|^2}, 0 < \omega < 2,$$

$$s_2^h = \omega \frac{L^U - L^h}{\|g_2(u^h)\|^2}, 0 < \omega < 2 \quad (23)$$

其中  $L^U$  为最优目标函数值, 即等于历史上得到的最好可行目标值,  $L^h$  是第  $h$  次迭代的对偶函数目标值. 参数  $\omega$  的初始值设为 0.5。

步骤 4 检查停止条件. 若达到最大迭代次数或对偶间隙小于 1%, 程序停止; 否则, 令  $h = h + 1$ , 返回步骤 2。

### 2.5 基于有向无环图的启发式算法构造上界

拉格朗日松弛子问题求得的结果对原问题来说通常是不可行的, 需要设计一些有效方法来找到问题的可行解。

对于该模型, 通过不同算例以及计算时间(参看表 4)可以明显得出: 小规模算例可以用 CPLEX 软件直接求解, 中规模算例可以运用第一种和第二种松弛策略求解, 而大规模算例(如 14 153 个块矿 12 个周期、29 277 个块矿 12 个周期)就要采用第三种松弛策略求解了. 对于第三种松弛策略的子问题, 他是多项式时间可解的. 由于这个子问题求得的解不满足原问题约束(8)和约束(9), 本文就设计了一个启发式算法以寻找原问题的可行解. 其基本思想是: 将某周期内开采出来的块矿所消耗的资源消耗量总和超出最大量限制的“多余”块矿移走, 或者是在某周期内开采



出来的块矿所耗费的资源消耗量总和低于最小量限制的时候移进来其他周期开采的块矿,问题难点是移哪些块矿和移多少个块矿,同时在“移动”的过程中必须要满足优先级顺序约束(7),所以块矿选择的规则以及块矿移动的个数是最重要的,即选择“移动”哪些块矿以及“移动”多少块矿。

根据优先级顺序约束特点,本文利用有向无环图结构构造了块矿移动策略。

2.5.1 有向无环图

1) 获得表示优先级顺序关系的有向无环图

有向无环图(directed acyline graph)就是一个无环的有向图,简称 DAG 图。下面用有向无环图来刻画问题中块矿之间的优先级顺序关系。

以图 4 为例,有编号为 0 到 9 的 10 个块矿。将每个块矿与他的直接先行块连接起来,作为有向无环图的一个边。图 4 中共有 12 条边,分别是 0→3, 1→3, 2→4, 3→5, 3→6, 4→6, 4→7, 6→7, 6→9, 7→8, 7→9, 8→9, 其含义是指箭尾处块矿是箭头处块矿的直接先行块。

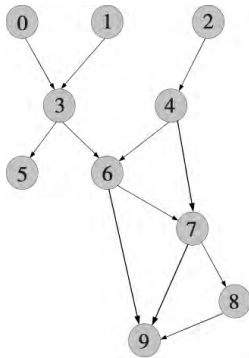


图 4 10 个块矿的表示优先顺序关系的有向无环图

Fig.4 Directed acyline graph denoting precedence sequence relationship of ten ore blocks

2) 利用有向无环图确定各块矿所处的层数

在给定的有向无环图中,设定其中没有直接先行块的块矿为顶点,如图 4 中的块矿 0,1 和 2,记为集合 A。将图中所有块矿的集合记为 G。根据上面的有向无环图,根据狄克斯特拉算法原理可以计算出某个块矿 i 到某个能够与其连通的顶点块矿 j 的权距离  $E_{ij}$ 。对任意块矿  $i \in G$ ,记块矿 i 的层数为  $L_i = \max\{E_{ij} | j \in A\}$ 。图 4 中,块矿 0,块矿 1 和块矿 2 所在的层数是 0,块矿 3 和块矿 4 所在的层数是 1,块矿 5 和块矿 6 所在的层数是 2,块矿 7 所在的层数是 3,块矿 8 所在的层数是

4,块矿 9 所在的层数是 5。

2.5.2 构造可行解的策略

求解不同算例分别采用了三种松弛策略。以下步骤是构造可行解的过程。第一种松弛策略是通过步骤 1~步骤 2,步骤 4~步骤 9,步骤 11 来构造可行解;第二种松弛策略是通过步骤 1~步骤 3,步骤 5~步骤 8,步骤 10~步骤 11 来构造可行解;而第三种松弛策略是通过步骤 1~步骤 11 来构造可行解。具体步骤阐述如下:

步骤 1 对于时间 t,设有一个块矿集合  $LR_t$ ,检查由拉格朗日松弛算法得到的解,若对于满足  $\sum_{e=0}^{t-1} w_i^e = 0$  块矿 i 有  $w_i^t = 1$  则将块矿 i 加入集合  $LR_t$  中;

步骤 2 若对于满足  $\sum_{e=0}^t w_k^e = 0$  块矿 k 有  $w_k^{t+1} = 1$ ,则将块矿 k 加入集合  $LR_{t+1}$  中,若  $\sum_{i \in LR_t} c_i(w_i^t - w_i^{t-1}) > C_{max}$ ,则转到步骤 3;若  $\sum_{i \in LR_t} c_i(w_i^t - w_i^{t-1}) < C_{min}$ ,则转到步骤 4;否则,转到步骤 5;

步骤 3 将  $LR_t$  中块矿按 2.5.1 节中所描述的根据有向无环图中块矿 i 所处的层数  $L_i$  大小降序排列,按次序将块矿剔除出集合  $LR_t$  并加入到集合  $LR_{t+1}$  中,直到满足最大资源消耗限制约束  $\sum_{i \in LR_t} c_i(w_i^t - w_i^{t-1}) \leq C_{max}$  为止。移动期间若出现层级相同的不同块矿,计算  $\sum_{j \in W} d_{ij}$  按其升序依次进行移动,其中 W 为时间 t+1 已开采的块矿 j 的集合。移动结束后,令  $w_i^t = 0$  转到步骤 5;

步骤 4 将  $LR_{t+1}$  中的块矿按 2.5.1 节中所描述的根据有向无环图中块矿 i 所处的层数  $L_i$  大小升序排列,按次序将块矿剔除出集合  $LR_{t+1}$  并加入集合  $LR_t$  中,直到满足最小资源消耗限制约束  $\sum_{i \in LR_t} c_i(w_i^t - w_i^{t-1}) \geq C_{min}$  为止。移动期间若出现层级相同的不同块矿,计算  $\sum_{j \in W} d_{ij}$  按其升序依次进行移动,其中 W 为时间 t 已开采的块矿 j 的集合。移动结束后,令  $w_i^t = 1$  转到步骤 5;

步骤 5 令  $t = t + 1$ ,若  $t = T$  转到步骤 6,否则转到步骤 1;

步骤 6 检查时间  $t$  的解, 如果满足  $C_{\min} \leq \sum_{i \in LR_t} c_i (w_i^t - w_i^{t-1}) \leq C_{\max}$ , 则停止; 否则转到步骤 7;

步骤 7 对于时间  $t$ , 设有一个块矿集合  $LR'_t$ , 检查此时修正后的解, 对于满足  $\sum_{e=0}^{t-1} w_i^e = 0$  且  $w_i^t = 1$ , 则将块矿  $i$  加入集合  $LR'_t$  中;

步骤 8 若对于满足  $\sum_{e=0}^{t-2} w_k^e = 0$  且  $w_k^{t-1} = 1$ , 则将块矿  $k$  加入集合  $LR'_{t-1}$  中, 若  $\sum_{i \in LR'_t} c_i (w_i^t - w_i^{t-1}) < C_{\min}$ , 则转到步骤 9; 若  $\sum_{i \in LR'_t} c_i (w_i^t - w_i^{t-1}) > C_{\max}$ , 则转到步骤 10;

步骤 9 将  $LR'_{t-1}$  中的块矿按  $L_i$  大小降序排列, 按次序将块矿剔除出集合  $LR'_{t-1}$  并加入集合  $LR'_t$  中, 直到满足约束  $C_{\min} \leq \sum_{i \in LR'_t} c_i (w_i^t - w_i^{t-1}) \leq C_{\max}$  为止, 移动期间若出现层级相同的不同块矿, 计算  $\sum_{j \in W'} d_{ij}$ , 按其升序依次进行移动, 其中  $W'$  为时间  $t$  已开采的块矿  $j$  的集合, 移动过程结束后, 令  $w_i^{t-1} = 0$ , 转到步骤 11;

步骤 10 将  $LR'_t$  中块矿按  $L_i$  大小升序排列,

按次序将块矿剔除出集合  $LR'_t$  并加入集合  $LR'_{t-1}$  中, 直到满足  $C_{\min} \leq \sum_{i \in LR'_t} c_i (w_i^t - w_i^{t-1}) \leq C_{\max}$  为止, 移动期间若出现层级相同的不同块矿, 计算  $\sum_{j \in W'} d_{ij}$ , 按其升序依次进行移动, 其中  $W'$  为时间  $t-1$  已开采的块矿集合; 移动结束后, 令  $w_i^{t-1} = 1$ , 转到步骤 11;

步骤 11 令  $t = t - 1$ , 若  $t = 1$  结束; 否则转步骤 7.

### 3 实验结果与分析

#### 3.1 规整性算例

本文所建模型与传统经典的块状矿床模型最大的区别是考虑了规整性目标, 为了说明其含义, 截取块矿集合中的 14 个块矿(为表达清楚将其从 0 至 13 进行编号), 4 个时间周期来进行阐述. 假定这 14 个块矿的  $c_i$  都是 10 个单位, 对于每个开采周期  $C_{\min}$  是 30 个单位,  $C_{\max}$  是 60 个单位. 其他参数的相关信息见表 1. 在这个算例中,  $\alpha$  取值为 1,  $\beta$  取值为 0.2.

表 1 块的相关参数

Table 1 Related parameters of block

块的编号	坐标 - X	坐标 - Y	坐标 - Z	$v_i^0$	$v_i^1$	$v_i^2$	$v_i^3$	$B_i$
0	2	1	1	9	7	5	3	—
1	2	1	2	22	21	20.5	19	0
2	1	1	2	18	16	14	13	0
3	2	2	2	15	13	12	11	0
4	3	1	2	17	15	13	11.5	0
5	2	0	2	13	12	11.5	10	0
6	2	1	3	29	27	25	23	1 2 3 4 5
7	5	1	1	10	8	6	4	—
8	5	1	2	19	17	15	13	7
9	4	1	2	20	19	18	17	7
10	5	2	2	18.5	17	16.5	15	7
11	6	1	2	17	15	13	12	7
12	5	0	2	20	18	17	16	7
13	5	1	3	35	32	30	28	8 9 10 11 12

表2 未考虑规整性的结果

Table 2 The result not with regularity

块	周期一	周期二	周期三	周期四
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
2	1	1	1	1
3	0	0	0	1
4	1	1	1	1
5	0	0	1	1
6	0	0	0	1
7	1	1	1	1
8	0	1	1	1
9	0	1	1	1
10	0	0	1	1
11	0	1	1	1
12	1	1	1	1
13	0	0	1	1

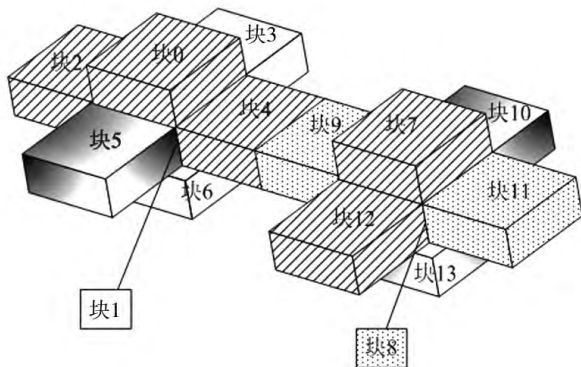


图5 未考虑规整性的开采顺序

Fig. 5 The mining sequencing without regularity

注: 同样图案的块矿在同一时间周期被开采.

表3 考虑规整性的结果

Table 3 The result with regularity

块	周期一	周期二	周期三	周期四
0	0	1	1	1
1	0	0	1	1
2	0	1	1	1
3	0	1	1	1
4	0	1	1	1
5	0	0	1	1
6	0	0	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1	1	1
9	0	0	0	1
10	0	0	0	1
11	1	1	1	1
12	1	1	1	1
13	0	0	0	1

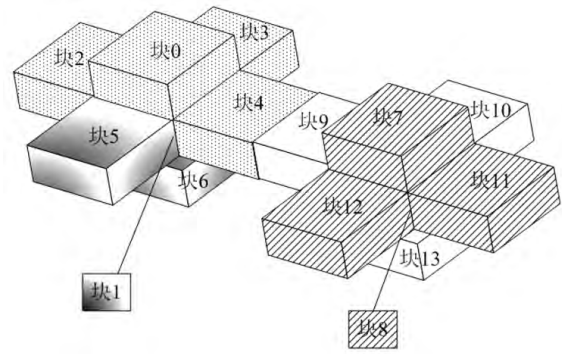


图6 考虑规整性的开采顺序

Fig. 6 The mining sequencing with regularity

注: 同样图案的块矿在同一时间周期被开采.

表2和表3分别表示未考虑和考虑规整性目标的决策变量  $w_i^t$  的结果,  $x_i^t$  表示块矿  $i$  在时间周期  $t$  被开采. 根据推导公式  $x_i^t = w_i^t - w_i^{t-1}, \forall t \in T$ , 由表2计算可得: 块矿 0, 2, 4, 7, 12 在周期一被开采; 块矿 8, 9, 11 在周期二被开采; 块矿 5, 10, 13 在周期三被开采; 块矿 1, 3, 6 在周期四被开采, 上述块矿开采顺序如图5所示. 同理, 由表3计算可得: 块矿 7, 8, 11, 12 在周期一被开采; 块矿 0, 2, 3, 4 在周期二被开采; 块矿 1, 5, 6 在周期三被开采; 块矿 9, 10, 13 在周期四被开采, 上述块矿开采顺序如图6所示.

通过上面的小算例, 明显可以得出: 在考虑规整性这一目标后, 这些块矿的开采顺序是有变化的. 经上面两个图比较, 虽然都满足优先级顺序约束, 但未考虑规整性的情形在同一周期开采的块矿比较零散, 而考虑规整性目标的情形, 在同一周期内开采的块矿相对集中, 这样有利于采掘设备的移动与作业, 从而能真正体现出优化开采的现实意义.

### 3.2 算例结果与分析

实验所使用的数据来自于国外矿山实验室网站(网址: <http://mansci-web.uai.cl/minelib>)上提供的真实数据. 其中对 10 819 个块矿的情况有 7 种不同的参数设定, 表4的实验结果求得的是平均值.

本文算法是在 Windows 7 环境下利用 Visual Studio 2010 编写, 在 CPU 主频 3.1GHz, 物理内存 4GB 的计算机进行测试. 其中小规模算例和大规

模算例的子问题是用 CPLEX 软件进行求解. 不同规模算例的计算结果如表 4 所示, 本文对未考虑规整性的块状矿床经典模型和考虑规整性目标的块状矿床模型这两个问题分别进行了算例测试.

对于小规模算例(算例 1 ~ 算例 4), 可以用 CPLEX 软件直接求解, 加入有效不等式和变量消除后 CPLEX 求解时间明显缩短(如表 4 “CPLEX + VE + VI<sup>1</sup> + VI<sup>2</sup> + VI<sup>3</sup>”列所示); 对于中规模算例(算例 5 ~ 算例 9), 对第一种松弛策略(即 LR<sup>1</sup>)的子问题求解中将第一类有效不等式和第二类有效不等式作为约束嵌入 CPLEX 中求解(如表 4 “LR<sup>1</sup> + VI<sup>1</sup> + VI<sup>2</sup>”列所示), 第二种松弛策略(即 LR<sup>2</sup>)的

子问题将第三类有效不等式嵌入 CPLEX 中求解(如表 4 “LR<sup>2</sup> + VI<sup>3</sup>”列所示), 他比第一种松弛策略求解时间长些, 但仍快于 CPLEX; 对于大规模算例(算例 10 ~ 算例 12), CPLEX 和前两种松弛策略的拉格朗日松弛算法都无法求到最优解, 只能通过第三种松弛策略(即 LR<sup>3</sup>)的拉格朗日松弛算法(如表 4 “LR<sup>3</sup>”列所示)进行求解. 这三种松弛策略的可行解都是通过基于有向无环图的启发式算法获得, 最终的算例结果能体现出开采的现实可行性. 本文将算例 5 ~ 算例 9 的对偶间隙设定在 1% 以内、将算例 10 ~ 算例 12 的对偶间隙设定在 3% 以内来测算 CPU 运行时间.

表 4 露天开采调度问题的求解时间的比较结果

Table 4 Comparison of solution time for block sequence problem

算例编号	算例 block / period	未考虑规整性的开采调度问题( sec)					考虑规整性的开采调度问题( sec)					第一类有效不等式(即变量固定)的个数	第二类有效不等式的个数	第三类有效不等式的个数
		CPLEX	CPLEX + VE <sup>②</sup> + VI <sup>1③</sup> + VI <sup>2③</sup> + VI <sup>3③</sup>	LR <sup>1</sup> + VI <sup>1</sup> + VI <sup>2</sup>	LR <sup>2</sup> + VI <sup>3</sup>	LR <sup>3</sup>	CPLEX	CPLEX + VE + VI <sup>1</sup> + VI <sup>2</sup> + VI <sup>3</sup>	LR <sup>1</sup> + VI <sup>1</sup> + VI <sup>2</sup>	LR <sup>2</sup> + VI <sup>3</sup>	LR <sup>3</sup>			
1	56/6	2.01	0.52	/	/	/	29.81	2.97	/	/	/	49	16	14
2	56/10	13.11	4.39	/	/	/	116.73	62.41	/	/	/	92	41	38
3	304/6	1 015.74	321.13	/	/	/	2 144.26	1 437.95	/	/	/	37	21	19
4	304/10	1 289.57	501.82	/	/	/	3 456.86	2 063.62	/	/	/	103	39	35
5	1 060/6	1 698.43	734.74	168.26	184.37	226.82	6 265.73	5 163.98	894.34	989.15	994.85	1 789	63	59
6	1 060/10	1 936.27	932.51	330.35	405.15	427.31	>24h	5 923.75	1 468.05	1 704.82	1 959.04	3 015	74	68
7	1 980/7	2 014.26	1 495.04	238.47	274.28	300.32	>24h	7 905.81	1 178.74	1 346.37	1 503.72	5 839	75	73
8	2 880/7	1 489.24	982.18	883.79	980.52	1 018.53	>24h	>24h	1 869.63	2 053.92	2 560.36	7 316	146	138
9	9 400/10	>24h	>24h	1 376.31	1 842.89	1 894.26	>24h	>24h	—	—	8 348.94	15 748	276	263
10	10 819/10	>24h	>24h	—	—	2 572.61	>24h	>24h	—	—	8 832.71	21 856	292	285
11	14 153/12	>24h	>24h	—	—	4 235.57	>24h	>24h	—	—	12 904.23	30 432	485	472
12	29 277/12	>24h	>24h	—	—	8 566.29	>24h	>24h	—	—	15 872.88	58 935	985	943

由表 4 可以得出结论:

1) 在求解原问题和松弛子问题中加入几类有效不等式后, 未考虑规整性的传统问题和考虑规整性的露天开采调度问题的求解时间均比单纯

用 CPLEX 软件求解在时间上有较大优势, 其求解时间分别平均下降了 31.90% 和 48.27%, 这说明有效不等式(变量固定是其特殊形式)的添加有助于快速求解;

② VE 表示 variable elimination, 即变量消除

③ VI<sup>1</sup> 表示 valid inequalities, 即第一类有效不等式, VI<sup>2</sup> 表示第二类有效不等式, VI<sup>3</sup> 表示第三类有效不等式.

2) 计算结果表明,考虑了规整性目标后使得原来的经典开采调度问题变得更加难以求解,但是其结果更具有现实可行意义,即能保证在每个周期内块矿的开采和整个开采周期结束后该矿床是规整的,从而能保证采掘工作面连续平滑,有利于采掘设备的装卸与运输,也使得开采作业有安全上的保障,同时避免了设备不必要的频繁移动;

3) 针对中规模算例,本文采用三种松弛策略对较难处理的约束进行了松弛,子问题仍用 CPLEX 软件求解. 针对未考虑规整性目标的经典开采调度数学模型,与加入有效不等式的 CPLEX 软件直接求解时间相比,采用第一种松弛策略的求解时间比他平均减少了 58.94%,采用第二种松弛策略的求解时间比他平均减少了 53.32%,采用第三种松弛策略的求解时间比他平均减少了 49.88%;而对考虑规整性目标的开采调度数学模型来说,与加入有效不等式的 CPLEX 软件求解时间相比,采用第一种松弛策略的求解时间比他平均减少了 80.99%,采用第二种松弛策略的求解时间比他平均减少了 78.35%,采用第三种松弛策略的求解时间比他平均减少了 76.21%.

4) 针对大规模算例,CPLEX 软件无法快速求到最优解,甚至添加了几类有效不等式之后仍无法在合理时间内(超过 24h)获得.采用第三种松弛策略可以在接受时间内获得可行解.

## 4 结束语

本文所建的数学模型做了一些假设并且将有些参数设为已知,这样的处理是主流研究上便于求解的必要手段,为了能求解现实的露天开采调度问题,块矿的净现值应该用随机函数表达才更合理.本文假设采用固定的边界品位,而现实中应考虑可变品位对开采顺序的影响.传统的块

状矿床模型中只考虑了经济价值,未从露天开采的作业过程考虑,采掘工作面是否连续平滑会影响采掘设备的使用,进而影响开采成本,所以考虑现实可行性,本文的模型目标中考虑了规整性.

合理高效的露天开采调度除了要保证开采过程中采掘面平滑和规整,还要使矿山企业获得更多的净利润,所以找到一些行之有效的快速求解方法极为必要.通过实际算例本文提出的方法和策略具有现实意义,并且对大规模的算例可以快速求解.

基于现实的矿山考虑,矿山工程技术人员更倾向于使用较小的模块尺寸,较小的模块能更好地定义地质数据以及矿岩属性,同时还为矿山设计和计划编制提供更高的灵活性和分辨率,但是却给计算机存储空间和计算时间带来了巨大的挑战,所以如何减少求解时间是今后研究的主要方向.利用智能优化算法的快速求解的优势,可以尝试与之相结合的方法以达到减少求解时间的目的.

在有效不等式的获得上,本文只考虑了块矿元素小于或等于两个的三类形式,而多个块矿元素的有效不等式组合形式将是今后研究的重点.

在拉格朗日松弛算法中,本文采用的是次梯度算法进行乘子更新,未来的研究可以考虑用其他方法对乘子进行更新.

对于可行解的获得方面期待有所突破,尝试选择一些不同于拉格朗日松弛子问题的解的修复策略,即“移动”哪些块矿的方法值得深入研究.

在市场经济环境下,露天开采调度就是在已有的技术和经济水平条件下寻求经济效益最好的开采方案,在激烈的市场竞争中,能对市场的变化做出迅速反应并及时结合最新的矿山数据做出最佳决策是保证矿山企业盈利的关键所在.

## 参 考 文 献:

- [1] Kim Y C. Ultimate pit limit design methodologies using computer models: The state of the art [J]. Mining Engineering, 1978, 10: 1454 - 1459.
- [2] Newman A M, Rubio E, Caro R, et al. A review of operations research in mine planning [J]. Interfaces, 2010, 40(3):

222 – 245.

- [3] 窦润亮, 郭均鹏, 田祥龙, 等. 面向客户个性化需求的交互式遗传算法[J]. 管理科学学报, 2016, 19(1): 24 – 34.  
Dou Runliang, Guo Junpeng, Tian Xianglong, et al. Interactive genetic algorithm based on customer demand[J]. Journal of Management Sciences in China, 2016, 19(1): 24 – 34. (in Chinese)
- [4] 刘长石, 寇纲, 刘导波. 震后应急物资多方式供应的模糊动态 LRP[J]. 管理科学学报, 2016, 19(10): 61 – 72.  
Liu Changshi, Kou Gang, Liu Daobo. Fuzzy dynamic LRP for post-earthquake multimodal relief delivery[J]. Journal of Management Sciences in China, 2016, 19(10): 61 – 72. (in Chinese)
- [5] Caccetta L, Hill S. An application of branch and cut to open pit mine scheduling[J]. Journal of Global Optimization, 2003, 27(2): 349 – 365.
- [6] Dagdelen K. Optimum Multi Period Open Mine Production Scheduling [D]. Colorado: Colorado School of Mines, Golden: 1985.
- [7] Dagdelen K, Johnson T. Optimum open pit mine production scheduling by Lagrangian parameterization [J]. Proceedings, 19th APCOM, 1986: 127 – 141.
- [8] Hochbaum D, Chen A. Performance analysis and best implementations of old and new algorithms for the open-pit mining problem[J]. Operations Research, 2000, 48(6): 894 – 914.
- [9] Akaike A, Dagdelen K. A strategic production scheduling method for an open pit mine [J]. Society for Mining Metallurgy and Exploration, 1999, 64(5): 729 – 738.
- [10] Cai W. Design of open-pit phases with consideration of schedule constraints[J]. 29th APCOM, 2001, 217 – 221.
- [11] Chicoisne R, Espinoza D, Goycoolea M, et al. A new algorithm for the open-pit mine production scheduling problem [J]. Operations Research, 2012, 60(3): 517 – 528.
- [12] Lambert W B, Newman A M. Analyzing solutions of the open pit block sequencing problem obtained via Lagrangian techniques [J]. Mining Engineering, 2013, 65(2): 39 – 45.
- [13] Denby B, Schofield D. Open-pit design and scheduling by use of genetic algorithms [J]. Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy (Section A: Mining Industry), 1994, 103(1): A21 – A26.
- [14] Cullenbine C, Wood R, Newman A M. A sliding time window heuristic for open pit mine block sequencing [J]. Optimization Letters, 2011, 5(3): 365 – 377.
- [15] Samavati M, Essam D, Nehring M, et al. A local branching heuristic for the open pit mine production scheduling problem [J]. European Journal of Operational Research, 2017, 257(1): 261 – 271.
- [16] Lamghari A, Dimitrakopoulos R, Ferland J. A hybrid method based on linear programming and variable neighborhood descent for scheduling production in open-pit mines [J]. Journal of Global Optimization, 2014, 4: 1 – 28.
- [17] Bley A, Boland N, Fricke C, et al. A strengthened formulation and cutting planes for the open pit mine production scheduling problem [J]. Computers & Operations Research, 2013, 37(9): 1641 – 1647.
- [18] Ramazan S. The new fundamental tree algorithm for production scheduling of open pit mines [J]. European Journal of Operational Research, 2007, 177(2): 1153 – 1166.
- [19] Liu Shiqiang, Kozan E. New graph-based algorithms to efficiently solve large scale open pit mining optimization problems [J]. Expert Systems With Applications, 2016, 43(C): 59 – 65.
- [20] Martinez M, Newman A M. A solution approach for optimizing long and short-term production scheduling at LKAB's Kiruna mine [J]. European Journal of Operational Research, 2011, 211(1): 184 – 197.
- [21] 李建祥, 唐立新, 吴会江. 露天矿短期生产调度建模研究 [J]. 计算机集成制造系统, 2005, 11(2): 195 – 199.  
Li Jianxiang, Tang Lixin, Wu Huijiang. Research on modeling for short-term production scheduling for open pit mine [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2005, 11(2): 195 – 199. (in Chinese)
- [22] Gaupp M P. Methods for Improving the Tractability of the Block Sequencing Problem for Open Pit Mining [D]. Colorado: Colorado School of Mines, USA, 2008.
- [23] 程琳, 王炜. 拥堵交通网络模型和增强拉格朗日乘子算法 [J]. 管理科学学报, 2006, 9(5): 18 – 27.  
Cheng Lin, Wang Wei. Equilibrium model and augmented Lagrange multiplier solution for congested traffic network [J]. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(5): 18 – 27. (in Chinese)
- [24] Fisher M. The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems [J]. Management Science, 1981, 27(1): 1 – 18.

### Research on open-pit mine production scheduling problem with regularity consideration

LIU Wen-bo<sup>1,2</sup>, SUN De-feng<sup>1</sup>, TANG Li-xin<sup>1</sup>

- 1. Institute of Industrial & Systems Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China;
- 2. Liaoning Provincial College of Communications, Shenyang 110122, China

**Abstract:** Open pit mine production scheduling is to specify the sequence of blocks extraction from the mine so as to obtain the highest NPV satisfying a variety of physical and economical constraints. According to production characteristics in practice, the evaluation of regularity is taken into consideration, and then an integer programming model is established. Lagrangian Relaxation (LR) method is proposed to solve the problem. Valid inequalities are established based on the knapsack structure of priority constraints to accelerate the algorithm without hurting the optimal solution; and then fast feasible solution strategy is constructed based on Directed Acyclic Graph structure; variable reductions are carried out to reduce the problem scale through strategies of earliest start time and latest start time. Computational results indicate that the proposed approach outperforms standard solver CPLEX in computational time. The proposed model and solution can realize the goal of regularity maintaining and profit maximizing while satisfying all production constraints.

**Key words:** open-pit mine production scheduling problem; 0-1 integer programming; Lagrangian relaxation; directed acyclic graph

(上接第 28 页)

其中下标表示矩阵的分区,上标则表示其对应的逆矩阵,例如

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} \tilde{K}_{AA} & \tilde{K}_{AB} \\ \tilde{K}_{BA} & \tilde{K}_{BB} \end{pmatrix}, \quad \tilde{K}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{K}^{AA} & \tilde{K}^{AB} \\ \tilde{K}^{BA} & \tilde{K}^{BB} \end{pmatrix} \tag{9}$$

以此类推,可以得出  $\tilde{H} \cdot \tilde{V} \tilde{H}$

$$\tilde{H} \cdot \tilde{V} \tilde{H} = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} \tilde{V}_{AA} & \tilde{V}_{AB} \\ \tilde{V}_{BA} & \tilde{V}_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{V}_{BB} \tag{10}$$

令  $\gamma = (\gamma_A \quad \gamma_B)$ , 矩阵  $M = \frac{1}{\sqrt{T}}(s_B - K_{BA}K_{AA}^{-1}s_A)$  和  $U = K^{BB}M$  在约束下的极大似然估计  $\tilde{\gamma}$  上的估计值为  $\tilde{M} = \frac{1}{\sqrt{T}}(s_B -$

$\tilde{K}_{BA} \tilde{K}_{AA}^{-1} \tilde{s}_A)$  和  $\tilde{U} = \tilde{K}^{BB} \tilde{M}$ .

因此,可以得到单边金融传染检验量

$$RS_c = \tilde{U} \cdot \tilde{V}_{BB}^{-1} \tilde{U} - \inf_{b>0} \{ (\tilde{U} - b) \cdot \tilde{V}_{BB}^{-1} (\tilde{U} - b) \} \tag{11}$$

在原假设下渐近服从于混合  $\chi^2$  分布.

不同  $\tau$  下的  $p$  值由下式给出

$$p(\tau) = 0.5 \text{Prob}(\chi_1^2 \geq RS_c(\tau)) \tag{12}$$

给定显著性水平  $\alpha$ , 如果  $p(\tau) < \alpha$ , 拒绝原假设  $H_0: \gamma_3(\tau) = 0$ , 也就是说金融传染发生了, 否则接受原假设  $H_0$ .