

基于平均电价的在线电动汽车充电排程定价机制^①

周 健¹, 华中生¹, 尹建伟², 吴晓波¹, 林旭东¹

(1. 浙江大学管理学院, 杭州 310058; 2. 浙江大学计算机科学与技术学院, 杭州 310058)

摘要: 考虑在一个区域内单个充电站为多辆电动汽车(充电顾客)提供充电服务的排程与定价问题. 充电顾客的排程(排序)有三种可选择的机制,即从高到低将待充电顾客按下列准则进行排序: 1) 顾客充电的总报价; 2) 顾客充电的单位报价; 3) 顾客在当前时间点之前已充电量的价值. 基于上述充电排程机制,提出了一种基于顾客已充电量的平均电价且不依赖未来充电需求的定价机制,证明了所提出的排程定价机制具有个体理性和激励兼容特性. 与已有的按顾客获得的最后一单位待充电价格进行定价的方法相比,研究发现:在第 1) 或第 2) 种排程机制下,所提出的定价机制顾客充电最终支付价格的期望相同,但方差减小;在第 3) 种排程机制下,所提出的定价机制顾客最终支付价格的期望和方差均减小. 算例结果展示了所提出定价机制在减小充电顾客最终支付价格不确定性方面的作用与效果.

关键词: 在线充电排程; 定价机制; 个体理性; 激励兼容

中图分类号: C934 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2018)01-0001-12

0 引 言

为应对气候变暖问题的挑战,我国政府在“十二五”期间规定了单位 GDP 能耗下降 16%、主要污染物排放总量下降 8%~10% 的节能减排约束性指标^[1],同时大力推动电动汽车行业的发展. 电动汽车是指以车载电源为动力,用电机驱动车轮行驶的车辆. 电动汽车一般可以分为纯电动汽车和混合电动汽车两类. 纯电动汽车只装配电能驱动的电机;混合电动汽车则既安装电机又装有以汽油或天然气等为能源的发动机. 由于混合电动汽车对及时充电的需求不迫切,故本文所说的电动汽车主要指纯电动汽车. 电动汽车相对于化石燃料汽车具有能源利用率高、环保等优点^[2],不足之处在于满电量行驶距离有限且充电耗时长. 因此电动汽车的充电问题始终是电动汽车发展与广泛应用的一个关键问题.

按照目前已有的技术方案,电动汽车充电主要有两种模式:一是换电池模式,二是充电模式. 换电池模式是将电动汽车开到换电站,把耗尽的电池卸下,换上已经充满的电池;充电模式是将汽车开到充电站进行充电. 由于电动汽车电池造价较高且缺少统一的行业标准^[3]等原因,目前充电模式仍是主导模式,换电池模式发展相对落后^[4].

充电模式工作的一般过程是,顾客通过手机或网络等实时通信手段向充电站提交自己的需求信息,包括到达充电站时间、需要的充电量、充电截止时间和充电完成后愿意支付的最高金额(即充电总报价). 充电站根据自己的充电能力约束和顾客需求信息,决定要为哪些电动汽车(顾客)充电、充电顺序及充电价格. 本文研究在某个区域内单个充电站为多辆电动汽车提供充电服务的充电排序与定价问题. 由于电动汽车的行驶距离有

① 收稿日期: 2016-03-03; 修订日期: 2017-07-04.

基金项目: 国家自然科学基金重大国际合作研究资助项目(71320107004); 国家自然科学基金资助项目(71671161).

作者简介: 周 健(1990—), 男, 山东淄博人, 博士生, Email: 454736829@zju.edu.cn

限且城市内充电站呈散点式分布^[5],因此单个充电站的电动汽车充电问题是充电模式应用的一个基本问题.

电动汽车的充电问题包括充电排程和定价两个方面.很多学者已经分别在这两个方面开展了大量的研究.在充电排程方面,Clement等提出了一种协调充电排程机制来最小化电能损失^[6];Vasirani和Ossowski为了确保充电排程的公平性,引入了随机摇号系统来决定是否对电动汽车进行充电^[7];Gan等在分析电动汽车充电弹性的基础上,提出了一种分散式算法,通过填补电网用电波谷来最优化电动汽车充电排程^[8];Arif等在充电站预先知道一整天的电价、充电站只知道实时电价且充电过程不可中断和充电过程可以中断三种情形下,以最小化电费为目标分别提出了三种充电排成方法^[9].

在充电定价问题的研究方面,Flath等提出了一种协调的电动汽车充电机制,并在有限行程及价格信息的基础上提出了一种启发式充电策略来减少电网过载风险^[10];Misra等在智能电网中提出了一种电动汽车充电的动态定价机制来解决智能电网中电动汽车充电的定价问题^[11];Wei和Guan提出了一种最优电能储存控制策略来管理电动汽车充放电活动^[12];杨健维等以充电站期望收益最大为目标,分别通过拉丁超立方采样技术构建电动汽车充电场景、半不变量动态概率潮流得到电压幅值的概率分布,建立主从博弈模型并用双层粒子群算法进行最优定价分析^[13];Hu等在合作和非合作情形下,分别设计了两种定价机制来促使电动汽车车主改变他们的充电时间安排,从而削减电能需求波峰时期的充电量增加波谷时期的充电量^[14].

部分学者研究了同时考虑充电排程和定价两个方面的问题.如,Kim等同时考虑电动汽车充电排程、定价和能源管理三个方面,在保证充电顾客等待时间的同时以充电站利润最大化为目标设计排程算法,并理论证明了其算法求得的解接近最优解^[15].但已有研究较少考虑考虑策略型顾客对电动汽车充电排程和定价策略的影响.策略型顾客是指顾客可能会谎报自己的需求偏好,以期获得优先充电或更高的自身效用等目的,从而对提

交真实需求偏好的顾客造成损失.

对于策略型顾客,充电站需要设计出激励兼容的机制来防止其谎报需求偏好.在已有考虑策略型顾客的少数研究中,Heydenreich等在分布式环境中,考虑策略型顾客来解决机器排程问题^[16];Parkes和Gershkov等对机制的激励兼容性分别做过一些研究^[17,18],但这些研究均依赖于对未来电动汽车电能需求量为已知分布的假设.当未来电能需求未知时,Porter^[19]和Hajiaghayi^[20]做了一些探索,但他们的模型要求拍卖商对每个顾客需求在不考虑其他顾客需求的情况下立刻进行抉择.Nejad等提出了一种基于顾客最后一单位待充电价格的定价机制^[21].Nejad等方法的不足在于,顾客充电完成后最终的支付价格波动较大,导致充电市场的不稳定性增加,且使得充电站资金流不稳定.为此,本文提出了一种基于顾客已充电量的平均电价且不依赖未来充电需求的电动汽车充电排程与定价机制,以克服已有充电排程与定价机制的不足.

1 充电排程和定价机制

1.1 机制描述

考虑在一个区域内由单个充电站和若干辆电动汽车组成的电动汽车充电系统.电动汽车充电顾客通过手机向充电站提交自己的需求偏好 $\beta_i = (a_i, l_i, d_i, v_i)$,括号内参数依次代表充电顾客*i*到达充电站的时间、需要的充电量、充电截止时间和充电完成后愿意支付的最高金额(即充电总报价).不失一般性的,假定一小时充电可以获得一单位的充电量.电动汽车充电顾客为使自己的效用最大化,可能会向充电站谎报自己的需求偏好,以期获得优先充电或更高的效用.顾客*i*的效用 $u_i = V_i - \Pi_i$,其中 $V_i = v_i$ 当且仅当充电站在充电截止时间 d_i 之前满足了顾客*i*的充电需求 l_i ,否则 $V_i = 0$; Π_i 为顾客*i*充电结束后所支付的价格,若充电站在顾客*i*充电截止时间 d_i 之前未能满足顾客*i*的充电需求 l_i ,则 $\Pi_i = 0$.

充电站为电动汽车提供24小时充电服务.充电站对电动汽车未来的充电需求未知.充电站的服务能力有限,在时刻*t*的服务能力记为 C^t .若

充电站由于充电设备故障等原因不能进行充电服务,则充电站将停止对充电顾客充电需求偏好的接收.充电站以自己效用最大化为目标,其效用为所有顾客充电结束后所支付的费用之和.因此,充电站为了获得更大的收益(效用),将对顾客的需求偏好按照一定的规则进行排序,以优先为可能带来高收益的电动汽车顾客进行充电.按照这样的思路,排序函数有三种可能的形式^[21]

$$f_{1i} = v_i \quad (1)$$

$$f_{2i} = v_i/l_i \quad (2)$$

$$f_{3i} = v_i(\lambda_i^t + 1)/l_i \quad (3)$$

式中 λ_i^t 表示在时刻 t 之前,顾客 i 已经获得的充电量.式(1)侧重优先满足充电总报价高的顾客的充电需求,即以顾客充电总报价排序;式(2)侧重优先满足充电单位报价高的顾客的充电需求,即以顾客充电单位报价排序;式(3)侧重优先满足已经获得的充电量高的顾客的充电需求,即以顾客在当前时间点之前已充电量的总价值排序.以下对以式(1)、式(2)和式(3)为排程函数的在线充电排程机制分别简称为机制1、机制2和机制3.

与排程相关的一个重要问题是充电定价问题.根据充电顾客排程结果,充电定价问题是充电站在顾客充电需求被满足后,按照顾客可接受的规则确定充电价格,并使充电站效用最大化.

记顾客全体的集合为 N .社会福利 W 定义为全体顾客的总效用与充电站效用的和,即

$$W = \sum_{i \in N} u_i + \sum_{i \in N} \Pi_i = \sum_{i \in N} V_i \quad (4)$$

由于对组合拍卖找到一个使拍卖者收益最大的问题是一个 NP 完全问题^[22],且未来时间段内的电动汽车的充电需求未知,因此设计最优的定价机制是不可能的.下面将以社会福利最大化为目标,设计不依赖电动汽车顾客未来充电需求的在线电动汽车充电排程定价机制.

1.1.1 充电排程过程

不妨将一个小时作为充电排程与定价的单位时间.不失一般性,将在一个小时内可以充入的电量作为单位电量.因此,充电站每隔一小时进行一次充电排程,决定在一小时内的充电排程计划.充电站24小时营业,超过当日24时的需求与计划转入下一天.充电站会优先选择可以给自己带来

效益高的电动汽车顾客进行充电.沿用 Nejad 等^[21]中所提的排程机制,在任意时间点 $t \in \{1, 2, \dots, 24\}$,充电站对提交需求偏好的电动汽车充电顾客的充电排程方法如下:

1)筛选出在当前时刻 t 还未完成充电且在其规定时间范围内可以满足充电需求的顾客需求偏好集合 $Q^t = \{\beta_i | i \in N, [t \leq d_i] \wedge [\lambda_i^t < l_i] \wedge [l_i - \lambda_i^t \leq d_i - t]\}$,其中符号 \wedge 表示逻辑关系“与”.

2)对 Q^t 中的顾客需求偏好根据排序函数进行从大到小排序,机制1、机制2和机制3下的排序函数分别为式(1)、式(2)和式(3).

3)由于 t 时刻充电站服务能力为 C^t ,在机制1、机制2和机制3下分别选取各自排序函数的前 C^t 个顾客在 t 时刻进行充电;若 t 时刻 Q^t 中顾客总数少于 C^t ,则 t 时刻 Q^t 中所有顾客在 t 时刻获得充电.

1.1.2 充电定价机制

考虑到充电站只有在顾客 i 规定的截止时间 d_i 之前完成顾客 i 的充电需求 l_i 才能收取顾客的充电费用,不同于 Nejad 等^[21]中按顾客获得的最后一单位待充电价格进行定价的方法,简记为 PM1.本文从充电站效用最大化的角度提出一种基于已充电量的平均电价进行充电定价的方法,简记为 PM2.其思路是:充电站对电动汽车获得的每单位电量进行定价,其价格为电动汽车获得该单位电量所给充电站带来的潜在损失.这种定价思路的理由是,由于充电站的服务能力有限;若该电动汽车不获得此单位电量,此单位电量可以分配给其它差一单位电量完成充电的电动汽车以完成充电,从而充电站可以获得该完成充电电动汽车的充电费用.

根据上述思路,充电站对电动汽车顾客的充电定价方法如下:

1)筛选出在当前时刻 t 还差一单位电量就可以完成充电的顾客需求集合 $H^t = \{\beta_i | i \in N, [t \leq d_i] \wedge [\lambda_i^t < l_i] \wedge [\lambda_i^t + 1 \geq l_i]\}$.通过前述充电排程方法可以得到在 t 时刻获得充电的顾客需求偏好集合 K^t ,记新的顾客需求偏好集合 $W^t = H^t \cup K^t$,“ \cup ”为并集运算.

2) 在 W^t 中去掉顾客 i 的需求偏好, 得到新的集合 W'^t , 对 W'^t 中的顾客需求偏好再次进行充电排程, 得到新的在时刻 t 时获得充电的顾客需求集合 K'^t . 对于顾客需求集合 K^t 中任意顾客 i 在 t 时刻获得的该单位电量的定价为: 若 K'^t 中存在 K^t 中不存在的顾客需求, 即 $K'^t - K^t \cap K'^t \neq \emptyset$, 其中“ $-$ ”为差集运算, “ \cap ”为交集运算, “ \emptyset ”为空集, 记其顾客编号为 q , 则顾客 i 在时刻 t 获得该单位电量所需支付的价格在机制 1 和机制 3 下为 f_q , 在机制 2 下为 $f_q l_i$; 若 K'^t 中不存在 K^t 中不存在的顾客, 即 $K'^t - K^t \cap K'^t = \emptyset$, 则顾客 i 对时刻 t 获得该单位电量所需支付的价格为充电站预先设定的固定价格 r (r 是充电站为了弥补固定成本所设的最低价格. 假设任意顾客 i 提交的需求偏好中 $v_i \geq r$).

3) 记顾客需求偏好集合 Z^t 为 t 时刻获得充电的顾客需求集合 K^t 与 t 时刻还差一单位电量充电完成的顾客需求集合 H^t 的交集, 即 $Z^t = K^t \cap H^t$, 则 Z^t 就是 t 时刻结束后完成充电的顾客需求偏好的集合. 对 Z^t 中的需求偏好顾客编号为 i 的顾客最后所需支付的价格定为

$$\Pi_i = \frac{1}{l_i} \sum_{\tau=1}^{l_i} \pi_{i\tau} \tag{5}$$

式中 $\pi_{i\tau}$ 为顾客 i 获得第 τ 份单位电量的价格.

在未来充电需求未知时, 与已有的 PM1 定价机制相比, 式(5)的充电定价机制(PM2)是一种新的定价机制. 如前所述, PM1 定价机制将导致顾客充电价格的波动和高的不确定性. 式(5)的定价方法希望解决这一问题, 而其可行性取决于该方法是否满足顾客的个体理性和激励兼容性.

1.2 机制的性质

一个可行的定价机制需要满足以下两个基本性质:

1) 个体理性. 个体理性表示顾客愿意参与进来, 即参与该机制所带来的效用要大于等于不参与的效用. 因此对任意顾客 i 有 $u_i = V_i - \Pi_i \geq 0$.

2) 激励兼容性. 激励兼容性表示顾客要有动机提交真实的需求偏好. 即对任意顾客 i 来说, 无论其他顾客提交怎样的需求偏好, 顾客 i 提交自

己真实的需求偏好得到的效用总大于等于其提交任何其他需求偏好所得到的效用.

1.2.1 相关定义

定义 1 对任意两个需求偏好 $\beta_i(a_i, l_i, d_i, v_i)$ 和 $\beta'_i(a'_i, l'_i, d'_i, v'_i)$, 若满足条件 $a_i \leq a'_i, l_i \leq l'_i, d_i \geq d'_i, v_i \geq v'_i$, 则称需求偏好 β_i 优于需求偏好 β'_i , 记为 $\beta_i \succeq \beta'_i$.

定义 2 给定充电需求的需求偏好集合 β 和充电排程的结果集合 C , 排程函数 $S: \beta \rightarrow C$ 为根据输入需求偏好映射到充电排程结果的函数.

定义 3 对任意两个需求偏好 $\beta_i(a_i, l_i, d_i, v_i) \succeq \beta'_i(a'_i, l'_i, d'_i, v'_i)$, 若排程函数 S 选择了需求偏好 β'_i 分配电能, 排程函数 S 也一定会选择需求偏好 β_i 分配电能, 则称排程函数 S 是单调的.

定义 4 对于任意单调的排程函数 S 和任意需求偏好 $\beta_i(a_i, l_i, d_i, v_i)$, 若存在唯一的价格 v_i^c 使得对任意需求偏好 $\beta'_i(a'_i, l'_i, d'_i, v'_i)$, 当 $\beta'_i \succeq (a_i, l_i, d_i, v_i^c)$ 时, β'_i 可以获得电能分配; 当 $\beta'_i < (a_i, l_i, d_i, v_i^c)$ 时, β'_i 不能获得电能分配, 则称 v_i^c 为关键支付.

1.2.2 排程与定价机制的性质

定理 1 1.1 中所提出的电动汽车在线充电的排程和定价机制是个体理性的.

证明 见附录 A

定理 1 表明 1.1 中所提出的电动汽车在线充电的排程和定价机制是个体理性的. 也就是说电动汽车充电顾客参与该机制所能获得的效用一定是大于等于 0 的. 因此电动汽车充电顾客会参与到该机制中来, 这是机制可以正常运作的前提.

定理 2 1.1 中所提出的电动汽车在线充电的排程和定价机制是激励兼容的.

证明 见附录 B

定理 2 表明, 根据 1.1 中所提出的电动汽车在线充电的排程和定价机制, 排程函数是单调的, 对顾客的定价为其需求偏好的关键支付. 无论其他电动汽车充电顾客提交怎样的需求偏好, 该电动汽车充电顾客在提交自己真实的需求偏好时所能获得的效用总是大于等于其提交任何其他需求

偏好时所能获得的效用. 即提交自己真实的需求偏好是电动汽车充电顾客的占优策略. 因此所有电动汽车充电顾客均会提交自己真实的需求偏好, 从而防止了某些策略型顾客谎报自己需求偏好影响机制运行情况的发生.

2 机制对比

为说明本文提出的在线充电排程与定价机制的作用, 在充电站的充电能力不变的情况下, 这部分将比较相同的排程机制下本文所提出的定价机制 (PM2) 与 Nejad 等^[21] 提出的定价机制 (PM1) 的差异. 比较的角度为单个顾客支付价格的变动情况.

在对任意顾客 i 按照 1.1.2 中机制进行定价时, 将去掉顾客 i 的需求偏好的集合 W^i 重新进行 1.1.1 的充电排程, 得到新的在时刻 t 时获得充电的顾客需求集合 K^i . 相对于原在时刻 t 时获得充电的顾客需求集合 K^t 来说, 若 K^i 中不存在 K^t 中不存在的顾客需求, 则支付固定价格 r , 并且任意顾客 i 的充电总报价 $v_i > r$. 对于任意随机变量 X 和常数 a , 由于其均值满足 $E(X+a) = E(X) + a$, 方差满足 $D(X+a) = D(X)$, 故总可令 $r = 0$ 而不影响均值方差的比较. 另外, 随着最终支付价格的提升, 愿意支付此价格来充电的顾客数量将越来越少, 即 v_i 的概率密度函数在 $(0, +\infty)$ 上是单调递减的. 因此可以用参数为 1 的指数分布来对 v_i 的分布进行刻画. 为了性质证明的方便, 不妨假设单位时间内到达顾客服从参数为 λ 的泊松分布.

引理 1 若 x_1, x_2, \dots, x_n 是独立同分布的变量, 则变量 x_n 和 $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ 的期望相同, 方差之比为 n .

证明 见附录 C

定理 3 在排程机制 1 和机制 2 下, PM2 定价机制下顾客 i 充电完成所要支付价格 II_i 的期望与 PM1 定价机制下顾客支付价格期望相等; PM2 定价机制下顾客 i 充电完成所要支付价格 II_i 的方差是 PM1 定价机制下顾客支付价格方差的 $1/l_i$.

证明 见附录 D

定理 3 的结果表明在机制 1 和机制 2 的排程方法下, 无论对充电站还是对电动汽车充电顾客而言, 本文提出的 PM2 定价机制是严格优于 PM1 定价机制的. 由于 PM2 定价机制使电动汽车充电顾客最终支付的价格期望不变而方差变小, 因此充电站收益与电动汽车充电顾客支付可以保持不变而增加顾客充电价格的稳定性和充电站收益的稳定性.

定理 4 在排程机制 3 下, PM2 定价机制下顾客 i 充电完成所要支付价格 II_i 的期望比 PM1 定价机制下顾客支付价格的期望减小; PM2 定价机制下顾客 i 充电完成所要支付价格 II_i 的方差小于 PM1 定价机制下顾客支付价格方差的 $1/l_i$.

证明 见附录 E

定理 4 的结果表明在机制 3 的排序方法下, 对电动汽车充电顾客而言, 本文提出的 PM2 定价机制是严格优于 PM1 定价机制的. 因为电动汽车充电顾客最终支付的期望变小的同时方差也变小, 即电动汽车充电顾客可以在减小充电最终支付价格的情况下同时增加最终支付价格的稳定性. 对充电站而言, 本文提出的 PM2 定价机制相对于 PM1 定价机制来说, 充电站通过牺牲了一部分收益换取了收益的稳定性.

定理 3 和定理 4 表明, 在机制 1、机制 2 和机制 3 的排序方法下无论是对电动汽车充电顾客还是对充电站而言, 本文提出的 PM2 定价机制相对于 PM1 定价机制来说, 都增加了电动汽车充电顾客最终支付价格和充电站最终收益的稳定性.

3 实例分析

假设充电站的服务能力不变且恒为 1, 充电站为了弥补固定成本所设的最低价格为 $r = 0$. 在系统中有 5 位等待充电的顾客 E1 - E5, 需求偏好分别为 $\beta_1(0, 2, 4, 3)$ 、 $\beta_2(0, 3, 6, 4)$ 、 $\beta_3(2, 1, 5, 1)$ 、 $\beta_4(3, 4, 9, 8)$ 和 $\beta_5(6, 1, 9, 0.8)$. 不同电动汽车充电顾客的最终支付可以视为同一顾客的多次支付. 在排程机制 1、机制 2 和机制 3 下充电站的排程结果和充电顾客最终支付的方差情况如下表 1、表 2、表 3 和表 4 所示.

表 1 机制 1 下排程结果与最终支付价格

Table 1 The result of scheduling and final payment under mechanism 1

顾客	时间段									最终支付价格	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PM1	PM2
E1											
E2 *	√	√	√							1	1/3
E3											
E4 *				√	√	√	√			0.8	0.7
E5 *								√		0	0

注: √表示该时间段获得充电, * 表示在规定时间内完成顾客的充电需求

表 2 机制 2 下排程结果与最终支付价格

Table 2 The result of scheduling and final payment under mechanism 2

顾客	时间段									最终支付价格	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PM1	PM2
E1 *	√	√								0	0
E2			√								
E3											
E4 *				√	√	√	√			3.2	2.8
E5 *								√		0	0

表 3 机制 3 下排程结果与最终支付价格

Table 3 The result of scheduling and final payment under mechanism 3

顾客	时间段									最终支付价格	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	PM1	PM2
E1 *	√	√								0	0
E2 *			√	√	√					1	1
E3											
E4 *						√	√	√	√	0.8	0.6
E5											

表 4 机制 1、机制 2 和机制 3 下 PM1 和 PM2 定价机制最终支付价格的方差对比

Table 4 The comparison of the variance of final payment between the PM1 and PM2 pricing mechanism under mechanism 1, 2 and 3

	PM1 下支付价格的方差 D1	PM2 下支付价格的方差 D2	D2 相对于 D1 的减小率
机制 1	0.28	0.122 6	56.2%
机制 2	3.413 3	2.613 3	23.4%
机制 3	0.28	0.253 3	9.54%

通过上面实例分析可以看到,在相同的顾客需求偏好和服务能力下,通过不同的排序函数,会得到不同的充电排程计划.将上面电动汽车充电顾客 E1 - E5 的支付视为同一顾客的多次支付,在排程机制 1,机制 2,机制 3 下,PM2 定价机制下电动汽车充电顾客总体支付价格相对于 PM1 定价机制下方差均有明显减小,即电动汽车充电顾客的最终支付价格与充电站最终收益稳定性有明

显提高.

4 时间复杂度

衡量电动汽车排程和定价问题规模大小的主要参数为在当前时刻 t 下系统中的用户总数 N^t 和充电站可用电量数 C^t ,假设 $C^t < N^t$ (当 $C^t \geq N^t$ 时,所有用户均可获得充电,单位电价为充电站为

了弥补固定成本所设的最低价格 r)。随着充电顾客样本数据的增大和充电站单位时间内可用电量的增多, 计算复杂程度会增加。下面给出排程定价机制的时间复杂度估计。

4.1 排程机制的时间复杂度

1) 筛选出在当前时刻 t 还未完成充电且在其规定时间范围内可以满足充电需求的顾客需求偏好集合的时间复杂度为 $O(N^t)$;

2) 对满足充电需求的顾客需求偏好集合 Q^t 中的顾客需求偏好根据排序函数进行从大到小排序的时间复杂度小于等于 $O(N^t \ln N^t)$;

3) 选择 Q^t 中前 C^t 个用户进行充电的时间复杂度为 $O(C^t) \leq O(N^t)$ 。

综上所述, 排程机制的时间复杂度为小于等于 $O(N^t \ln N^t)$ 。

4.2 定价机制的时间复杂度

1) 筛选出在当前时刻 t 还差一单位电量就可以完成充电的顾客需求集合的时间复杂度为 $O(N^t)$, 求新的顾客需求偏好集合 W^t 的时间复杂度小于等于 $O((N^t)^2)$;

2) 在 W^t 中去掉顾客 i 的需求偏好, 得到新的集合 W'^t , 对 W'^t 中的顾客需求偏好再次进行 1.1.1 中的电能排程的时间复杂度小于等于 $O(N^t \ln N^t)$, 计算 $K'^t - K^t \cap K'^t$ 的时间复杂度小于等于 $O((N^t)^2)$;

3) 对 t 时刻结束后完成充电的顾客需求偏好的集合 Z^t 中的顾客定价的时间复杂度小于等于 $O((N^t)^2)$ 。

综上所述, 定价机制的时间复杂度小于等于 $O((N^t)^2)$ 。

因此本文提出的基于平均电价的排程定价机制总体的时间复杂度为 $O((N^t)^2)$ 。

参 考 文 献:

- [1] 张国兴, 张振华, 管 欣, 等. 我国节能减排政策的措施与目标协同有效吗? ——基于 1 052 条节能减排政策的研究[J]. 管理科学学报, 2017, 20(3): 162 - 182.
Zhang Guoxing, Zhang Zhenhua, Guan Xin, et al. Is the synergy between measures and objectives of energy conservation and emission reduction policies in China effective? Research on 1 052 energy conservation and emission reduction policies[J]. Journal of Management Sciences in China, 2017, 20(3): 162 - 182. (in Chinese)
- [2] Li Yifan, Kaewpuang R, Wang Ping, et al. An energy efficient solution: Integrating plug-in hybrid electric vehicle in smart grid with renewable energy[C]. The 1st IEEE INFOCOM Workshop on Communications and Control for Sustainable Energy

5 结 束 语

本文研究了电动汽车在线充电的排程和定价问题。在不依赖于未来电动汽车充电需求模型的情况下, 提出了一种基于平均电价的在线电动汽车充电排程和定价机制来解决该问题, 证明了所提机制是具有个体理性和激励兼容特性的, 即电动汽车充电顾客参与该机制所获得的效用总是大于等于不参加该机制所获得的效用; 无论其他电动汽车充电顾客提交的需求偏好怎样, 电动汽车充电顾客提交自己真实的需求偏好所获得的效用总是大于等于其提交其他任何需求偏好所获得的效用。在充电站服务能力不变的情况下, 以单个电动汽车充电顾客充电完成后的最终支付价格为视角, 将基于平均电价定价机制 (PM2) 同基于顾客最后一单位待充电价格的在线电动汽车定价机制 (PM1) 进行了对比。发现在社会福利不变的情况下, 充电站以顾客的充电总报价和充电单位报价排序时, 本文所提出的 PM2 定价机制顾客 i 充电完成所要支付价格 II_i 的期望与 PM1 定价机制的期望相等, 方差仅为 PM1 定价机制方差的 $1/l_i$; 充电站以顾客在当前时间点之前已充电量的价值排序时, 本文所提出的 PM2 定价机制顾客 i 充电完成所要支付价格 II_i 的期望比 PM1 定价机制的期望小, 方差小于 PM1 定价机制方差的 $1/l_i$ 。从而大大增加了充电顾客支付价格和充电站收益的稳定性。

本文研究结果未来需要进一步思考的问题包括: 本文只考虑了一个充电站的情况, 并未考虑多个充电站竞争时的情形; 在进行机制对比性质的证明时, 本文假设顾客到达服从泊松分布, 实际情况中往往随时间有高峰期和低谷期等。

System: Green Networking and Smart Grids, 2012: 73 – 78.

- [3] 苏 浩. 换电商业模式是纯电动汽车在石油短缺和低碳经济下快速发展的解决方案[J]. 经济视角, 2011(4): 49 – 50.
Su Hao. The exchange business model is a solution to the rapid development of pure electric vehicles under the circumstance of oil shortage and low carbon economy[J]. *Economic Vision*, 2011(4): 49 – 50. (in Chinese)
- [4] 陈良亮, 张 浩, 倪 峰, 等. 电动汽车能源供给设施建设现状与发展探讨[J]. 电力系统自动化, 2011, 35(14): 11 – 17.
Chen Liangliang, Zhang Hao, Ni Feng, et al. Present situation and development trend for construction of electric vehicle energy supply infrastructure[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2011, 35(14): 11 – 17. (in Chinese)
- [5] 熊 虎, 向铁元, 祝勇刚, 等. 电动汽车公共充电站布局的最优规划[J]. 电力系统自动化, 2012, 36(23): 65 – 70.
Xiong Hu, Xiang Tieyuan, Zhu Yonggang, et al. Electricvehicle public charging stations location optimal planning[J]. *Automation of Electric Power Sysetms*, 2012, 36(23): 65 – 70. (in Chinese)
- [6] Clement K, Haesen E, Driesen J. Coordinated charging of multiple plug-in hybrid electric vehicles in residential distribution grids[C]. *IEEE/PES Power Systems Conference and Exposition*, 2009: 1 – 7.
- [7] Vasirani M, Ossowski S. A Computational Monetary Market for Plug-In Electric Vehicle Charging[M]// *Auctions, Market Mechanisms, and Their Applications*. Berlin Heidelberg: Springer, 2011: 88 – 99.
- [8] Gan L, Topcu U, Low S H. Optimal decentralized protocol for electric vehicle charging[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2013, 28(2): 940 – 951.
- [9] Arif A I, Babar M, Ahamed T P I, et al. Online scheduling of plug-in vehicles in dynamic pricing schemes[J]. *Sustainable Energy Grids & Networks*, 2016, 7: 25 – 36.
- [10] Flath C M, Ilg J P, Gottwalt S, et al. Improving electric vehicle charging coordination through area pricing[J]. *Transportation Science*, 2013, 48(4).
- [11] Misra S, Bera S, Ojha T. D2P: Distributed dynamic pricing policy in smart grid for PHEVs management[J]. *IEEE Transactions on Parallel & Distributed Systems*, 2015, 26(3): 702 – 712.
- [12] Wei L, Guan Y. Optimal control of plug-in hybrid electric vehicles with market impact and risk attitude[J]. *Transportation Science*, 2014, 48(4): 467 – 482.
- [13] 杨健维, 黄 宇, 王 湘, 等. 基于动态概率潮流的住宅区电动汽车代理商定价策略[J]. 中国电机工程学报, 2016, 36(21): 5822 – 5830.
Yang Jianwei, Huang Yu, Wang Xiang, et al. A pricing strategy for electric vehicle aggregator in residential area based on dynamic probability power flow[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2016, 36(21): 5822 – 5830. (in Chinese)
- [14] Hu Z, Zhan K, Zhang H, et al. Pricing mechanisms design for guiding electric vehicle charging to fill load valley[J]. *Applied Energy*, 2016, 178: 155 – 163.
- [15] Kim Y, Kwak J, Chong S. Dynamic pricing, scheduling, and energy management for profit maximization in PHEV charging stations[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2017, 66(2): 1011 – 1026.
- [16] Heydenreich B, Müller R, Uetz M. Games and mechanism design in machine scheduling: An introduction[J]. *Production and Operations Management*, 2007, 16(4): 437 – 454.
- [17] Parkes D. Online Mechanisms[M]. In Nisan N, Roughgarden T, Tardos E, et al. (Eds.), *Algorithmic Game Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [18] Gershkov A, Moldovanu B. Efficient sequential assignment with incomplete information[J]. *Games & Economic Behavior*, 2010, 68(1): 144 – 154.
- [19] Porter R. Mechanism Design for Online Real-time Scheduling[C]. In *Proc. of 5th ACM Conf. on Electronic Commerce* ACM, 2004: 61 – 70.
- [20] Hajiaghayi M T. Online Auctions with Re-Usable Goods[C]. In *Proc. of the 6th ACM Conf. on Electronic Commerce* ACM, 2005: 165 – 174.
- [21] Nejad M M, Mashayekhy L, Chinnam R B, et al. Online scheduling and pricing for electric vehicle charging[J]. *IIEE Transactions*, 2017, 49(2): 178 – 193.
- [22] Conitzer V, Sandholm T. Self-interested Automated Mechanism Design and Implications for Optimal Combinatorial Auctions [C]. In *Proc. of the 5th ACM Conf. on Electronic Commerce* ACM, 2004: 132 – 141.

Online scheduling-pricing based on average electricity price for electric vehicle charging

ZHOU Jian¹, HUA Zhong-sheng¹, YIN Jian-wei², WU Xiao-bo¹, LIN Xu-dong¹

1. School of Management, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;

2. School of Computer Science and Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China

Abstract: The scheduling and pricing problem of one charging station serving several electric vehicles in one area. Arrived electric vehicles (customers) are selected and scheduled to serve from high to low sequentially based on 1) customers' total bid price for charging; 2) customers' unit bid price for charging; or 3) customers' total value of the charged electricity before the current time point. Different from the existing pricing mechanism based on the last unit electricity price, we propose the online pricing mechanism based on the average electricity price which does not rely on future electric vehicle's charging demand. We prove that the proposed scheduling-pricing mechanism has the properties of individual rationality and incentive compatible. Compared with the last unit electricity pricing mechanism, it is proved that the proposed scheduling-pricing mechanism has the same expected customers' payment but a smaller variance of customers' payment under scheduling mechanisms 1 and 2, and has a smaller expectation and variance of customers' payment under scheduling mechanism 3. Numerical examples illustrate the effect of the proposed scheduling-pricing mechanism on reducing the uncertainty of customers' final payment for charging.

Keywords: online charging schedule; pricing mechanism; individual rationality; incentive compatible

附录 A 定理 1 证明

证明

在机制 1 下, 对任意在 t 时刻获得第 $\tau \in [1, l_i]$ 份单位电量的顾客 i 来说, 因为机制选择了顾客 i 进行充电而没有选择顾客 q , 可得 $v_q^\tau \leq v_i$ (v_q^τ 表示顾客 q 的充电总报价, 注意对任意 $\tau \in [1, l_i]$, 所对应的顾客 q 并不一定相同. 若不存在顾客 q , 则 $v_q^\tau = r$, 也满足 $v_q^\tau \leq v_i$). 又 $\pi_{i\tau} = v_q^\tau \leq v_i$, 故在 PM2 定价机制下, 充电完成的顾客 i 最后所要支付的价格为

$$\Pi_i = \frac{1}{l_i} \sum_{\tau=1}^{l_i} \pi_{i\tau} \leq v_i;$$

在机制 2 下, 对任意在 t 时刻获得第 $\tau \in [1, l_i]$ 份单位电量的顾客 i 来说, 因为机制选择了顾客 i 进行充电而没有选择顾客 q , 可得 $v_i/l_i \geq v_q^\tau/l_q^\tau$ (l_q^τ 表示顾客 q 的需求电量). 又 $\pi_{i\tau} = v_q^\tau l_i/l_q^\tau \leq v_i l_i/l_i = v_i$, 故在 PM2 定价机制下, 充电完成的顾客 i 最后所要支付的价格为

$$\Pi_i = \frac{1}{l_i} \sum_{\tau=1}^{l_i} \pi_{i\tau} \leq v_i;$$

在机制 3 下, 对任意在 t 时刻获得第 $\tau \in [1, l_i]$ 份单位电量的顾客 i 来说, 因为机制选择了顾客 i 进行充电而没有选择顾客 q , 可得 $(\lambda_i^t + 1)v_i/l_i \geq (\lambda_q^t + 1)v_q^\tau/l_q^\tau$. 又 $\pi_{i\tau} = \frac{\lambda_q^t + 1}{l_q} v_q^\tau \leq \frac{\lambda_q^t + 1}{l_q} v_q^\tau \frac{\lambda_i^t + 1}{l_i} = \frac{(\lambda_q^t + 1)v_q^\tau l_i}{(\lambda_i^t + 1)l_q} \leq v_i$, 故在 PM2 定

价机制下, 充电完成的顾客 i 最后所要支付的价格为 $\Pi_i = \frac{1}{l_i} \sum_{\tau=1}^{l_i} \pi_{i\tau} \leq v_i$.

综上所述, 在三种排程机制下, PM2 定价机制完成充电的顾客 i 所要支付的价格 Π_i 均小于等于其需求偏好中的充电总报价 v_i , 效用 $u_i = V_i - \Pi_i = v_i - \Pi_i \geq 0$. 未完成充电的顾客 i 的支付为 0, 效用 $u_i = V_i - \Pi_i = 0 - 0 = 0$. 因此对参与该机制的顾客 i 均有其效用 $u_i \geq 0$, 因此机制是个体理性的. 证毕.

附录 B 定理 2 证明

证明

1) 先证明改进后机制的排程函数是单调的. 即若排程函数选择 $\beta_i(a_i, l_i, d_i, v_i)$ 为订单赢得的需求偏好, 则对于任意需求偏好 $\beta'_i(a'_i, l'_i, d'_i, v'_i) \geq \beta_i(a_i, l_i, d_i, v_i)$, 则 β'_i 也一定是排程函数所选择的订单赢得的需求偏好.

可以看到, 顾客所提交的需求偏好 $\beta_i(a_i, l_i, d_i, v_i)$ 中, 变量 a_i, d_i 在机制 1, 2, 3 下均不会引起排序函数的变化, 只是起限制充电时间的作用, 因此下面考虑变量 l_i, v_i . 当满足 $\beta'_i \geq \beta_i$ 时, 有 $l'_i \leq l_i, v'_i \leq v_i$, 则在机制 1 下, 由 $f_{1i} = v_i$ 知需求偏好 β'_i 的排序不会低于需求偏好 β_i 的排序; 则在机制 2 下, 由 $f_{2i} = v_i/l_i$ 知需求偏好 β'_i 的排序不会低于需求偏好 β_i 的排序; 则在机制 3 下, 由 $f_{3i} = v_i(\lambda'_i + 1)/l_i$ 知需求偏好 β'_i 的排序不会低于需求偏好 β_i 的排序. 所以若 β_i 为订单赢得时, β'_i 也一定是订单赢得的.

2) 然后证明机制的定价是依赖于关键支付的, 即本文设计的顾客支付 Π_i 是顾客 i 要赢得订单所需要提交的最小的充电总报价 v_i .

假设顾客 i 提交另外一个充电总报价 $v'_i < \Pi_i$ 且是订单赢得的. 则由于在机制 1, 机制 2, 机制 3 下顾客 i 的支付价格均为 $\Pi_i = \frac{1}{l_i} \sum_{\tau=1}^{l_i} \pi_{i\tau}$, 且又有 $v'_i < \Pi_i$, 故必然至少存在一单位电量 $\tau \in [1, l_i]$, 在获得该单位电量的对应时刻上有 $v'_i < \pi_{i\tau}$.

则在机制 1 下有 $\pi_{i\tau} = v'_q > v'_i$, 从而 $f'_{1i} < f'_{1q}$ (f'_{1i} 和 f'_{1q} 分别表示顾客 i 在获得第 τ 单位电量对应时刻时顾客 i 和顾客 q 在机制 1 下的排序函数). 所以顾客 i 提交 $v'_i < \Pi_i$ 后在原来获得第 τ 单位电量的时刻将不再能获得该单位电量, 因此顾客 i 提交 $v'_i < \Pi_i$ 后顾客 i 的需求偏好将不再是订单赢得的需求偏好, 与假设矛盾.

则在机制 2 下有 $\pi_{i\tau} = \frac{v'_q}{l'_q} l_i > v'_i$, 从而 $f'_{2i} = \frac{v'_i}{l_i} < \frac{\pi_{i\tau}}{l_i} = \frac{v'_q}{l'_q} l_i / l_i = f'_{2q}$ (f'_{2i} 和 f'_{2q} 分别表示顾客 i 在获得第 τ 单位电量对应时刻时顾客 i 和顾客 q 在机制 2 下的排序函数). 所以顾客 i 提交 $v'_i < \Pi_i$ 后在原来获得第 τ 单位电量的时刻将不再能获得该单位电量, 因此顾客 i 提交 $v'_i < \Pi_i$ 后顾客 i 的需求偏好将不再是订单赢得的需求偏好, 与假设矛盾.

则在机制 3 下有 $\pi_{i\tau} = \frac{(\lambda'_q + 1)v'_q}{l'_q} > v'_i$, 从而 $f'_{3i} = \frac{(\lambda'_i + 1)v'_i}{l_i} < \frac{(\lambda'_i + 1)\pi_{i\tau}}{l_i} = \frac{(\lambda'_i + 1)(\lambda'_q + 1)v'_q}{l_i l'_q} \leq \frac{(\lambda'_q + 1)v'_q}{l'_q} = f'_{3q}$ (f'_{3i} 和 f'_{3q} 分别表示顾客 i 在获得第 τ 单位电量对应时刻时顾客 i 和顾客 q 在机制 3 下的排序函数). 所以顾客 i 提交 $v'_i < \Pi_i$ 后在原来获得第 τ 单位电量的时刻将不再能获得该单位电量, 因此顾客 i 提交 $v'_i < \Pi_i$ 后顾客 i 的需求偏好将不再是订单赢得的需求偏好, 与假设矛盾.

因此本文设计的顾客支付 Π_i 是顾客 i 要赢得订单所需要提交的最小的 v_i , 即机制的定价是依赖于关键支付的.

由 Parkes 的工作^[17]可知, 若一个机制的排程函数是单调的, 定价函数是依赖于关键支付的, 则该机制就是激励兼容的. 证毕.

附录 C 引理 1 证明

证明 $E[\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)] = \frac{1}{n}[E(x_1 + x_2 + \dots + x_n)]$

又 x_1, x_2, \dots, x_n 是独立同分布的变量, 由均值的性质知

$E(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = E(x_1) + E(x_2) + \dots + E(x_n) = nE(x_n)$

故 $E[\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)] = \frac{1}{n} \times n \times E(x_n) = E(x_n)$

$D[\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)] = \frac{1}{n^2}D(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

又 x_1, x_2, \dots, x_n 是独立同分布的变量, 由方差的性质知

$D(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = D(x_1) + D(x_2) + \dots + D(x_n) = nD(x_n)$

故 $D[\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)] = \frac{1}{n^2} \times n \times D(x_n) = \frac{1}{n}D(x_n)$

综上所述, 若 x_1, x_2, \dots, x_n 是独立同分布的变量, 则变量 x_n 和 $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ 的期望相同, 方差之比为 n .

证毕.

附录 D 定理 3 证明

证明 基于前面的假设,充电站的服务能力是不变的;单位时间内到达顾客服从参数为 λ 的泊松分布,因此单位时间内顾客到达数量是独立同分布的;顾客的需求偏好是独立同分布的,并且在机制 1 和机制 2 下,在任意时刻 t ,顾客 i 的排序函数式(1),式(2)是不变的.故而以任何时间点 t 作为定价点时,顾客 q 的排序函数的分布是相同的,因此需支付价格均是独立同分布的.又由上面引理 1 可知,PM2 定价机制下顾客 i 充电完成所要支付价格 II_i 的期望与 PM1 定价机制下的期望相等,PM2 定价机制下顾客 i 充电完成所要支付价格 II_i 的方差是 PM1 定价机制下的方差的 $1/l_i$. 证毕.

附录 E 定理 4 证明

证明 基于前面的假设,充电站的服务能力是不变的;单位时间内到达顾客服从参数为 λ 的泊松分布,因此单位时间内顾客到达数量是独立同分布的;顾客的需求偏好是独立同分布的.因此,在以任何时间点 t 作为定价点时,全体电动汽车充电顾客的排序函数的分布是相同的,但是在不同的时刻 t ,顾客 i 的排序函数式(3)是根据其在该时刻前已经获得的电量而变化的.所以在对顾客 i 定价时所要找的对应顾客 q 的排序函数 f_q 有了不断变化的上界,因为总有 $f_i \geq f_q$. 在对顾客 i 定价时找到了在顾客 i 参与时不能得到充电,在顾客 i 不参与时恰好能得到充电的顾客 q 的概率为 $1 - p$,则找不到的概率为 p ,并设顾客 i 支付函数的概率密度函数为 $f(x)$. 则有 $p(x = 0) = p, \int_{0+}^{\infty} f(x) dx = 1 - p$.

充电完成最终支付的均值和方差分别可以表示为

$$E(x) = u = \int_0^{\infty} xf(x) dx = \int_0^{0+} xf(x) dx + \int_{0+}^{\infty} xf(x) dx = 0 \times p + \int_{0+}^{\infty} xf(x) dx = \int_{0+}^{\infty} xf(x) dx \tag{6}$$

$$\begin{aligned} D(x) &= \int_0^{\infty} (x - u)^2 f(x) dx = \int_0^{0+} (x - u)^2 f(x) dx + \int_{0+}^{\infty} (x - u)^2 f(x) dx \\ &= pu^2 + \int_{0+}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2u \int_{0+}^{\infty} xf(x) dx + u^2 \int_{0+}^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_{0+}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{0+}^{\infty} xf(x) dx \right)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

因为在找到在顾客 i 参与时不能得到充电,在顾客 i 不参与时恰好能得到充电的顾客 q 时顾客 i 的支付函数即为顾客 q 的排序函数,因此其概率分布为 $f_{3q} = (\lambda'_q + 1)v_q/l_q = v_q$.再考虑到随着顾客 i 获得电量增加后不断增加的 f_{3q} 的上限 f_{3i} ,设顾客 i 每获得一单位电量时其排序函数分别为 a_1, a_2, \dots, a_n . 先将这里的 a_1, a_2, \dots, a_n 看成连续变量 a ,则顾客 i 支付函数的方差随 a_1, a_2, \dots, a_n 的变化的表达式可以表示为一个关于 a 的表达式,顾客 i 最终支付函数的概率密度函数 $f(x)$ 及变量 a 如下图 1 所示:

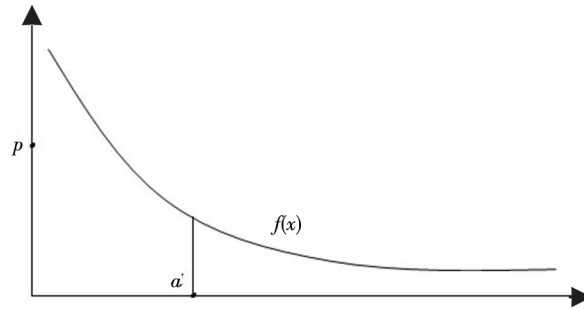


图 1 顾客最终支付函数的概率密度函数 $f(x)$ 及变量 a 关系

Fig. 1 Relationship between the probability density function of customer final payment function $f(x)$ and variable a

因为总有 $f_{3q} \leq f_{3i}$,故顾客 i 的最终支付价格分布为 a 左边的区域,即 a 左边的区域变为全概率空间,由式(6)可得 a 为参数期望为

$$E_a(X) = \int_{0+}^a x \frac{f(x)}{\int_{0+}^a f(x) dx} dx = (1 - p) \frac{\int_{0+}^a xf(x) dx}{\int_{0+}^{\infty} f(x) dx} \tag{8}$$

式(8)对 a 求导有

$$E'_a(X) = (1 - p) \frac{f(a) (a \int_{0+}^a f(x) dx - \int_{0+}^a xf(x) dx)}{(\int_{0+}^a f(x) dx)^2} \tag{9}$$

由积分中值定理知 $\int_{0+}^a xf(x) dx < a \int_{0+}^a f(x) dx$, 故 $E'_a(X) > 0$, $E_a(X)$ 是 a 的单调递增函数. 即随着电动汽车获得电量的不断增加, 其获得每单位电量所支付价格的期望是递增, 所以有 $E(X_{l_i}) > E((X_1 + X_2 + \dots + X_{l_i})/l_i)$, 即 PM2 定价机制下顾客 i 充电完成所要支付价格 Π_i 的期望比 PM1 定价机制下的期望减小.

以 a 为参数的方差可表示为

$$D_a(X) = \int_{0+}^a x^2 \frac{f(x)}{\int_{0+}^a f(x) dx} dx - \left(\int_{0+}^a x^2 \frac{f(x)}{\int_{0+}^a f(x) dx} \right)^2$$

$$= (1 - p) \frac{\int_{0+}^a x^2 f(x) dx}{\int_{0+}^a f(x) dx} - (1 - p)^2 \frac{(\int_{0+}^a xf(x) dx)^2}{(\int_{0+}^a f(x) dx)^2} \tag{10}$$

式(10)对 a 求导有

$$D'_a(X) = (1 - p) \frac{a^2 f(a) \int_{0+}^a f(x) dx - f(a) \int_{0+}^a x^2 f(x) dx}{(\int_{0+}^a f(x) dx)^2} -$$

$$(1 - p)^2 \frac{2af(a) \int_{0+}^a xf(x) dx (\int_{0+}^a f(x) dx)^2 - 2f(a) \int_{0+}^a f(x) dx (\int_{0+}^a xf(x) dx)^2}{(\int_{0+}^a f(x) dx)^4} \tag{11}$$

由于由中值定理知 $2af(a) \int_{0+}^a xf(x) dx (\int_{0+}^a f(x) dx)^2 - 2f(a) \int_{0+}^a f(x) dx (\int_{0+}^a xf(x) dx)^2 > 0$, 且 $1 - p \leq 1$, 故

$$D'_a(X) \leq (1 - p) \left(\frac{a^2 f(a) \int_{0+}^a f(x) dx - f(a) \int_{0+}^a x^2 f(x) dx}{(\int_{0+}^a f(x) dx)^2} - \right.$$

$$\left. \frac{2af(a) \int_{0+}^a xf(x) dx (\int_{0+}^a f(x) dx)^2 - 2f(a) \int_{0+}^a f(x) dx (\int_{0+}^a xf(x) dx)^2}{(\int_{0+}^a f(x) dx)^4} \right)$$

$$= \frac{(1 - p)f(a)}{(\int_{0+}^a f(x) dx)^3} (a^2 (\int_{0+}^a f(x) dx)^2 - \int_{0+}^a x^2 f(x) dx \int_{0+}^a f(x) dx - 2a \int_{0+}^a xf(x) dx \int_{0+}^a f(x) dx + 2(\int_{0+}^a xf(x) dx)^2) \tag{12}$$

又 $f(x) = e^{-x}$, 代入式(12)有

$$D'_a(X) \geq \frac{af(a)}{(\int_{0+}^a f(x) dx)^3} ((a + 2)e^{-a} + a - 2) \tag{13}$$

令 $N(a) = (a + 2)e^{-a} + a - 2$, 则 $N'(a) = -\frac{a + 1}{e^a} + 1$. 又对任意 $a \geq 0$ 时, 由 e^a 的展开式知 $e^a > a + 1$, 从而 $N'(a) > 0$ 恒成立, 又有 $N(0) = 0$, 故对任意 $a \geq 0$, $N(a) \geq 0$. 从而对任意 $a \geq 0$ 有 $D'_a(X) \geq 0$ 恒成立, 所以 $D_a(X)$ 是随着 a 的增加而单调递增的. 即随着电动汽车获得电量的不断增加, 其获得每单位电量所需支付价格的方差是递增, 因此有

$$D\left(\frac{1}{l_i}(\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_{l_i})\right) \leq \frac{1}{l_i^2} l_i D(\pi_{l_i}) = \frac{1}{l_i} D(\pi_{l_i})$$

即 PM2 定价机制下顾客 i 充电完成所要支付价格 Π_i 的方差小于 PM1 定价机制下的方差的 $1/l_i$.

证毕.