供应链中期权合约与混合合约决策选择①

华胜亚，翟 昕
(北京大学光华管理学院，北京 100871)

摘要: 研究由单供应商和单零售商组成的二级供应链，面对不确定的市场需求，零售商可以通过期权合约或混合合约(期权合约与远期合约的组合) 向供应商订购产品. 通过建立 Stackelberg 博弈模型，求解两种合约形式下零售商的最优采购决策与供应商的最优定价决策. 亦从供应商和零售商的不同视角比较了两种合约. 结果显示，供应商倾向采用期权合约销售产品，即使在混合合约背景下，供应商也会通过提高远期合约价格来阻止零售商通过远期合约采购产品. 而零售商通过期权合约采购时收益能否提升则会受到期权执行价格和产品残值的影响.

关键词: 供应链; 期权合约; 混合合约; Stackelberg 博弈
中图分类号: C934　　文献标识码: A　　文章编号: 1007 - 9807(2018) 10 - 0084 - 13

0 引 言

期权合约和远期合约②作为金融市场中管理风险的衍生工具，已被引入供应链管理实践多时. 在学界，Ritchken 和 Tapiero [1] 于 1986 年将期权引入库存管理中，以应对未来产品价格和需求数量变动的风险. Chowdhry 和 Howe [2] 研究了某跨国公司如何利用期权和远期合约管理汇率和需求风险. 在一些需求波动大的资本密集或销售周期短的行业，例如电力、石油、天然气、半导体等行业，期权和远期合约已经或正在得到广泛应用.

远期合约因其简便易行，在供应链中的应用已经相当成熟; 期权合约在供应链中的应用历史相对较短，但得益于其灵活性，期权合约在供应链中的应用日益广泛. 对于处在供应链下游的买方而言，通过期权合约进行采购，可以减少企业面临的需求变动风险，降低仓储成本，减轻企业资金压力. 有些企业采用纯粹的期权合约订购产品，例如 IBM 的打印机事业部 [3] 与一些电力公司 [4] 采用期权的方式订购所需的零部件或原材料. 有些企业选择期权与远期合约的组合方式，例如 HP 在其主要零配件的采购方面，50% 的资金通过远期合约采购，35% 的资金通过期权合约采购，剩下的部分从现货市场采购 [5] . 对于供应链的上下游企业而言，这种混合合约的应用结合了远期合约的稳定性和期权合约的灵活性，既保证了卖方的基本利益与资金回笼，也降低了买方的资金压力和仓储成本.

事实上，当供应链上企业引入期权合约时，往往需要决定是否应该废弃已有的远期合约，或者对现行的远期合约进行相应调整. 一些学者考虑供应链引入期权合约后直接废除远期合约的情形. Chen 等 [6] 研究了当风险规避的零售商通过期权合约从风险中性的供应商处采购时，零售商的期权订购策略和供应商的生产及期权定价策略. 结果显示，期权合约能够对整个供应链进行帕累托改进. 类似地，当存在现货市场，并且零售商能够更新市场需求信息时，Zhao 等 [7] 给出

① 收稿日期: 2016 - 05 - 09; 修订日期: 2018 - 02 - 07.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71772006) .
作者简介: 华胜亚(1989—) ，男，河南濮阳人，博士生. Email: huasy@ pku. edu. cn
② 远期合约也可称为批发价格合同，但为了保持与 ‘期权合约’ 名称的一致性，本文采用 ‘远期合约’ 的名称.

了风险中性零售商的采购策略和供应商的生产和期权定价策略. Anderson 等[8] 讨论了供应链存在多个竞争型供应商和单个零售商的情形，分析了供应商的最优期权价格和执行价格决策，零售商的供应商选择决策. 在零售商通过期权合约采购，并且需求信息实现后供应商和零售商均可以通过 B2B 电子市场买卖产品情形下，尤晓岚等[9] 分析了零售商的期权采购策略和供应商的定价策略. 以上研究均分析了期权合约在供应链的作用，并指出期权合约能为上下游企业带来更多收益. 然而，在这些研究中，期权合约完全替代了远期合约，并没有给出废除远期合约的原因.

一些学者考虑将期权合约引入供应链，并选择保留远期合约，即采用混合合约订货的情形. Barnes-Schuster 等[10] 研究了具有两个销售阶段的零售商的期权与远期合约订购量决策，结果显示混合合约能为零售商和供应商带来更多收益. Kleindorfer 和 Wu[11] 研究了同时存在线上和线下市场时混合合约在供应链中的应用. Wang 和 Liu[12] 分析了在零售商作为供应链领导者情形下混合合约的应用. Wang 等[13] 考虑了零售商面对顾客退货，通过混合合约进行订货的问题，并指出期权合约的引入能够有效减少顾客退货带来的负面作用. 刘忠轶等[14] 分析了混合合约下零售商的最优采购决策、供应商对合约的定价和产量决策，最终证明了均衡解的存在. 胡本勇和陈旭[15] 研究医院通过混合合约采购血液的问题，并分析了血液采购供应链能够实现协同的条件. 在物流服务能力采购的供应链中，赵海峰等[16] 讨论了下游采购商通过混合合约的采购策略，并探讨了采购商资金短缺对其采购策略的影响. 这类研究结果显示，混合合约能够提高供应商和零售商的收益，却并没有指出供应链是否应该完全废除远期合约，以获取更多潜在利润.

综上所述，与远期合约相比，供应链采用期权或者混合合约可以获得更多收益，但是没有明确给出废除或保留远期合约的依据，没有结合供应链的具体情况研究在不同环境下期权合约与混合合约哪种会更有效. Li 等[17] 和 Jörnsten 等[18] 均研究了在单供应商和单零售商供应链结构下期权与混合合约的比较问题. Li 等[17] 在市场销售价格不确定并假设市场需求只有高、低两种水平，同时供应商和零售商之间存在销售价格和需求信息不对称的情况下，对期权和混合合约进行了比较. Jörnsten 等[18] 假设市场需求服从离散分布，通过数值模拟得出混合合约比期权合约有微弱优势. 这两篇文章虽然比较了期权合约与混合合约，但对问题的背景具有较强假设，缺少对期权合约与混合合约的定价分析，没有分析供应商的选择决策对零售商收益的影响.

基于以上分析，为了探讨供应链上下游企业在引入期权合约后是否应该保留远期合约的问题，本文分别研究由单供应商和单零售商组成的二级供应链，当需求服从一般连续分布时，在期权和混合两种合约框架下，供应商的最优定价策略和零售商的最优订购策略，并对两种合约进行了比较. 结果显示，与混合合约相比，供应商更加偏好期权合约，通过期权合约能够销售更多产品，并获取更高的收益. 同时还发现，即使在混合合约框架下，供应商也会为远期合约制定较高的价格，以阻止零售商通过远期合约购买产品. 结果说明，当供应链引入期权合约后，供应商将选择废弃远期合约以获取更高收益. 而当供应商做出上述决策后，零售商的收益能否增加则受到期权执行价格和产品残值的影响.

本文通过建立以供应商为领导者，零售商为跟随者的 Stackelberg 博弈模型，研究了一般情况下期权合约与混合合约比较的问题，给出了供应商对期权合约与混合合约的最优定价策略和零售商的订货策略，弥补了对这两种合约进行比较研究的空白，为今后期权合约在供应链应用方面的相关研究提供更坚实的理论基础. 同时，本文的研究结论指出，基于供应商和零售商两者的角度，在不同参数情况下期权合约均能为两者带来更多收益，因此本文的研究结果能够为供应链上下游企业在不同情形下选择合适的订货合约提供有价值的参考.

1 模型描述

本文研究由单供应商和单零售商组成的两级供应链在具有两个时间阶段的单销售周期内的运营决策，具体事件发生顺序如图 1 所示. 在第一

阶段，根据供应商对合约的不同选择，定义仅采用期权合约为情形 1，同时采用期权合约与远期合约为情形 2. 在情形 1 下，供应商只需决定期权订购价格，而零售商以期望利润最大化为目标，决定期权购买数量; 在情形 2 下，供应商选择混合合约，因而需要同时决定期权订购价格与远期合约价格，零售商则需要决定期权与远期合约各自的购买数量. 本文研究的期权为看涨期权，每单位期权可以允许零售商在未来以约定好的执行价格购买 1 单位产品. 根据 Zhao 等[19]和 Cheng 等[20]，在一些行业中，零售商在供应链中占有重要地位，甚至超过供应商的重要性. 因此假设供应商收到零售商的订单后，承诺按照订单量进行生产. 在阶段二，市场的需求开始实现，零售商观察到市场的需求信息后，根据实际需求选择期权执行数量，并以约定好的执行价格执行期权. 供应商根据零售商的远期合约订购量和期权行权量将相应的产品运送到零售商处. 假设供应商和零售商都是风险中性的; 市场需求的分布是供应商和零售商的共同知识; 销售周期结束后，供应商的剩余产品可以通过其他渠道低价销售，因此剩余产品具有残值.

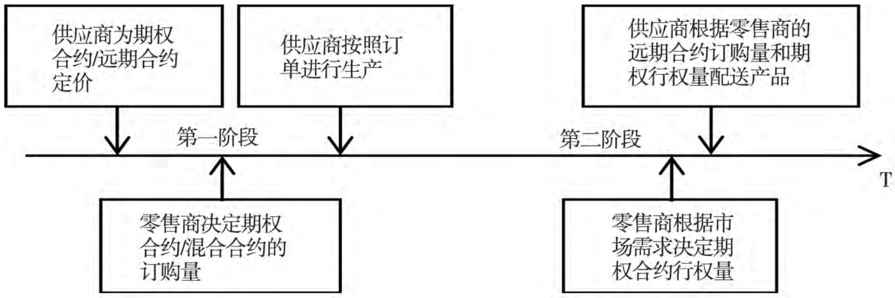

图 1 Stackelberg 博弈顺序图

Fig. 1 Sequence of events in the Stackelberg game

本文模型的参数设置如下:

p 商品销售价格;

c_o 期权订购价格;

c_e 期权执行价格;

w 远期合约价格;

c 供应商单位生产成本;

v 供应商单位剩余产品的残值;

M_o 期权合约订购量;

M_e 混合合约中期权订购量;

Q_c 混合合约中远期合约订购量;

D 市场随机需求量，分布区间为 $[a, b)$;

$f(D)$ 市场需求的概率密度函数;

$F(D)$ 市场需求的累计分布函数;

上述一些参数需要满足下述条件: . 第 1 个条件 $0 \leqslant a < b$，保证了市场有正的需求，且需求量在有限的区间内波动. 第 2、3 个条件 $c < w < p$，$c < c_o + c_e < p$，保证供应商和零售商都有正的收益. 第 4 个条件 $v < c$，保证供应商按照订单生产，不会生产多余的产品. 第 5 个条件 $v \leqslant c_e$，保证当零售商执行期权合约时，供应商不会恶意保留产品，通过产品的残值获取更多收益. 此外，为了保证解的唯一性，本文假设市场需求分布函数 $F(D)$ 严格递增，且一般失效率 $g(D) = \dfrac{f(D)D}{\bar{F}(D)}$ 是递增的[21].

1.1 期权合约

将期权合约引入供应链后，如果供应商选择废弃远期合约，则零售商只可以通过期权合约订购产品. 零售商只需要决定期权的订购量和执行量，以获取最高的期望收益.

1.1.1 零售商收益分析

当市场需求量为 D 时，零售商收益函数为

$$\pi_r(M_o) = -c_o M_o + (p - c_e)\min(M_o, D) \quad (1)$$

其中 $c_o M_o$ 表示零售商在第一阶段购买期权的成本; $\min(M_o, D)$ 表示在第二阶段开始时，零售商执行期权合约的数量为订购量和市场需求间的小值; $(p - c_e)$ 为零售商在第二阶段每销售 1 单位产品的净利润. 因为式(1) 中含有随机变量 D，所以本文求解零售商的期望收益最大值. 经过整理式(1) 可得零售商的期望收益函数

$$\mathrm{E}[\pi_r(M_o)] = (p - c_o - c_e)M_o - (p - c_e)\int_a^{M_o} F(D)\,\mathrm{d}D$$

根据期望收益对期权订购量 M_o 的导数可以求出零售商的最优期权订购量

$$M_o = F^{-1}\left(\frac{p - c_o - c_e}{p - c_e}\right) \tag{2}$$

1.1.2　供应商收益分析

在供应商仅提供期权合约的情况下，供应商需要决定期权合约的订购价格. 期权作为金融领域的衍生品，与执行价格相比，期权订购价格的制定更受业界与学术界的关注，同时参考 Burnetas 和 Ritchken[22] 和 Li 等[17]，本文假设期权合约执行价格外生给定，不作为供应商的决策变量. 当零售商的期权合约订购量为 M_o 时，供应商的收益函数为

$$\pi_s(c_o) = (c_o - c)M_o + c_e\min(M_o, D) + v(M_o - D)^+$$

经过化简可得供应商的期望收益函数

$$E[\pi_s(c_o)] = (c_o + c_e - c)M_o - (c_e - v)\int_a^{M_o} F(D)\,dD \tag{3}$$

由于市场需求服从严格递增的分布函数 $F(D)$，根据式(2)可知 M_o 与 c_o 存在一一对应关系，因此可得 c_o 与 M_o 的转换方程 $c_o = (p - c_e)\bar{F}(M_o)$. 代入式(3)可得供应商关于期权合约销售量的期望收益函数

$$E[\pi_s(M_o)] = (p - c_e)\bar{F}(M_o)M_o + c_eM_o - cM_o - (c_e - v)\int_a^{M_o} F(D)\,dD \tag{4}$$

引理 1　当市场需求累计分布函数 $F(D)$ 的一般失败率 $g(D)$ 递增，具有有限大的均值和定义区间 $[a,b)$ 时，供应商的期望收益函数在 $[0,+\infty)$ 是关于 M_o 的单峰函数，并且在区间 $[0,a)$ 上是线性严格递增函数，在区间 $[a,\tilde{M}]$ 是严格凹函数，在区间 $(\tilde{M},+\infty)$ 内是严格递减函数. 满足一阶条件的解一定会在区间 $[a,\tilde{M}]$ 内取得. 则供应商的最优销售量为 M^* 或者为 a，这里

$$M^* = \left\{M_o : \bar{F}(M_o)\left(\frac{p - v}{p - c_e} - g(M_o)\right) = \frac{c - v}{p - c_e}\right\}$$

$$\tilde{M} = \sup\left\{M_o : g(M_o) \leqslant \frac{p - v}{p - c_e}\right\}$$

(证明见附录)

根据引理 1 可知供应商存在最优期权合约销售量，同时根据最优销售量与期权合约定价的对应关系，可知供应商存在最优期权合约定价，且定价满足 $c_o = (p - c_e)\bar{F}(M_o)$，$M_o$ 的取值如下

$$M_o = \begin{cases} a & M^* \leqslant a \\ M^* & M^* > a \end{cases}$$

1.2　混合合约

所谓“混合合约”是指当供应链引入期权合约时，保留远期合约，零售商可以同时通过期权或远期合约订购产品. 混合合约结合了期权合约的灵活性和远期合约价格低的优点，尤其是当零售商知道未来的最低需求时，为了节省成本，零售商可以采用远期合约订购这部分产品，以获取更高收益. 本节分析当供应链采用混合合约订购产品时，零售商的订购策略和供应商对期权及远期合约的定价策略.

1.2.1　零售商收益分析

给定供应商提供的混合合约，零售商需要在第一阶段决定期权与远期合约的购买数量 M_c，Q_c. 在第二阶段，当市场需求 D 实现后，根据远期合约，零售商可获得 Q_c 单位的产品; 如果需求大于远期合约订购量，那么零售商可依据期权合约，以价格 c_e 获得 $\min((D - Q_c)^+, M_c)$ 单位的产品. 因此零售商的收益函数为

$$\pi_r(Q_c, M_c) = p\min(Q_c + M_c, D) - wQ_c - c_oM_c - c_e\min((D - Q_c)^+, M_c) \tag{5}$$

由此,零售商的期望收益函数为

$$E[\pi_r(Q_c, M_c)] = (p - w)Q_c + (p - c_o - c_e)M_c - (p - c_e)\int_a^{Q_c+M_c} F(D)\,dD - c_e\int_a^{Q_c} F(D)\,dD \tag{6}$$

引理 2　零售商的订货策略如下.

当 $w \leqslant \dfrac{c_op}{p - c_e}$ 时

$$Q_{c1} = F^{-1}\left(\frac{p - w}{p}\right),\ M_{c1} = 0 \tag{7}$$

当 $w > \dfrac{c_op}{p - c_e}$ 时

$$\begin{cases} Q_{c2} = F^{-1}\left(\dfrac{c_o + c_e - w}{c_e}\right) \\ M_{c2} = F^{-1}\left(\dfrac{p - c_o - c_e}{p - c_e}\right) - F^{-1}\left(\dfrac{c_o + c_e - w}{c_e}\right) \end{cases} \tag{8}$$

1.2.2 供应商收益分析

计算出零售商关于合约价格的最优反应函数式(7)、式(8)后，供应商需要决定期权与远期合约的价格以获得最大收益. 供应商的收益函数为

$$\pi_s(w,c_o) = wQ_c + c_oM_c - c(Q_c + M_c) + c_e\min((D - Q_c)^+, M_c) + v(M_c - (D - Q_c)^+)^+ \quad (9)$$

对式(9)进行化简，可得供应商的期望收益函数

$$\mathrm{E}[\pi_s(w,c_o)] = (w-c)Q_c + (c_o+v-c)M_c + (c_e - v)\int_{Q_c}^{Q_c+M_c}\bar{F}(D)\,\mathrm{d}D \quad (10)$$

当 $w \leqslant \frac{c_op}{p - c_e}$ 时，零售商的期权合约订购量为 0，只订购远期合约，所以供应商的期望收益函数为

$$\mathrm{E}[\pi_s(w,c_o)] = (w - c)F^{-1}\left(\frac{p - w}{p}\right) \quad (11)$$

当 $w > \frac{c_op}{p - c_e}$ 时，零售商订购期权与远期合约，供应商的期望收益函数为

$$\mathrm{E}[\pi_s(w,c_o)] = (w - c_o - v)F^{-1}\left(\frac{c_o + c_e - w}{c_e}\right) + (c_o + v - c)F^{-1}\left(\frac{p - c_o - c_e}{p - c_e}\right) + (c_e - v)\int_{F^{-1}\left(\frac{c_o+c_e-w}{c_e}\right)}^{F^{-1}\left(\frac{p-c_o-c_e}{p-c_e}\right)}\bar{F}(D)\,\mathrm{d}D$$

定理 1 当市场需求累计分布函数 $F(D)$ 的一般失败率 $g(D)$ 递增，且具有有限大的均值和定义区间 $[a,b)$ 时，供应商有以下最优定价决策.

(a) 如果供应商对远期合约定价较低，满足 $w \leqslant \frac{c_op}{p - c_e}$，供应商只能售出远期合约，且最优远期合约价格为 $w = p\bar{F}(Q_{c1})$，Q_{c1} 为远期合约的销售量，Q_{c1} 的取值如下式

$$Q_{c1} = \begin{cases} a & Q^* \leqslant a \\ Q^* & Q^* > a \end{cases} \quad (12)$$

$$Q^* = \left\{Q: \bar{F}(Q)(1 - g(Q)) = \frac{c}{p}\right\} \quad (13)$$

期权合约的定价 c_o 只需取较高的值，满足 $w \leqslant \frac{c_op}{p - c_e}$ 即可.

(b) 如果供应商对远期合约定价较高，满足 $w > \frac{c_op}{p - c_e}$，供应商能够售出期权和远期合约. 但其最优的销售策略是仅销售期权合约，远期合约销售量为 0. 期权合约的定价 $c_o = (p - c_e)(1 - F(M_{c2}))$，远期合约定价 $w = c_o + c_e$. 期权销售量 M_{c2} 取值为

$$M_{c2} = \begin{cases} a & T^* \leqslant a \\ T^* & T^* > a \end{cases} \quad (14)$$

$$T^* = \left\{T: \bar{F}(T)\left(\frac{p - v}{p - c_e} - g(T)\right) = \frac{c - v}{p - c_e}\right\} \quad (15)$$

T^* 表示最优的期权与远期合约销售总量. 由于远期合约销售量为 0，所以 T^* 在此处等价于最优期权合约的销售量.

通过比较定理 1(a) 和 1(b)，可以发现供应商的定价及销售策略有两种极端选择: 1) 对远期合约的定价较低，只通过远期合约销售产品; 2) 对远期合约的定价较高，只通过期权合约销售产品. 所以供应商不会同时通过期权和远期合约销售产品. 下面从供应商的销售量和收益两方面对定理 1(a) 和 1(b) 两种策略进行比较.

在定理 1(a) 中，远期合约的销售量为 Q_{c1}，且满足 $p\bar{F}(Q_{c1})(1 - g(Q_{c1})) = c$. 在定理 1(b) 中，期权合约的销售量为 M_{c2}，且满足

$$\bar{F}(M_{c2})\left(\frac{p - v}{p - c_e} - g(M_{c2})\right) = \frac{c - v}{p - c_e}$$

通过化简得到

$$p\bar{F}(M_{c2})(1 - g(M_{c2})) = c - vF(M_{c2}) - c_ef(M_{c2})M_{c2} < c$$

相应地，在两种策略下供应商的期望收益分别为

$$\mathrm{E}[\pi_s(Q_{c1})] = (w - c)Q_{c1}$$

$$\mathrm{E}[\pi_s(M_{c2})] = (c_o + v - c)M_{c2} + (c_e - v)\int_a^{M_{c2}}\bar{F}(D)\,\mathrm{d}D$$

通过比较 $\mathrm{E}[\pi_s(Q_{c1})]$ 和 $\mathrm{E}[\pi_s(M_{c2})]$ 得到如下定理.

定理 2 在定理 1 的混合合约背景下，供应商通过定理 1(b) 的销售策略能够比通过定理 1(a) 销售更多产品，并可以获得更高的期望收益. 即在混合合约背景下，供应商将选择只通过期权合约销售产品.

2 合约比较

很多研究已经证明，与远期合约相比，供应链使用期权合约或混合合约能够为供应商和零售商带来更多收益，更容易实现供应链协调. 但是当企业想要引入期权合约时，面临着是否应该废弃远期合约. 比较引理 1 和定理 1(b) 可以发现，两个定理下的策略对于供应商是等价的，即供应商只通过期权合约销售产品，而且最优合约销售量和期权订购价格也相同. 定理 1(b) 的不同之处在于，在混合合约的背景下，供应商会将远期合约的价调高至 $w = c_o + c_e$，阻止零售商通过远期合约订购产品. 因此当供应链引入期权合约订购产品时，供应商应该选择废弃远期合约.

通过上述分析可知，面对期权合约和混合合约，供应商将选择只通过期权合约销售产品以实现其最优收益. 下面，从零售商的角度分析供应商废弃远期合约后零售商收益的变化.

引入期权合约前，零售商只通过远期合约订购产品，即定理 1(a) 的情形，零售商的收益为

$$E[\pi_r(Q_{c1})] = (p - w)Q_{c1} - p\int_a^{Q_{c1}} F(D)\,dD$$

根据转换方程 $w = p\overline{F}(Q_{c1})$ 可得

$$E[\pi_r(Q_{c1})] = p\left[F(Q_{c1})Q_{c1} - \int_a^{Q_{c1}} F(D)\,dD\right]$$

引入期权合约后，供应商完全废弃远期合约，零售商只能通过期权合约订购产品，即定理 1(b) 的情形，零售商的收益为

$$E[\pi_r(M_{c2})] = (p - c_o - c_e)M_{c2} - (p - c_e)\int_a^{M_{c2}} F(D)\,dD$$

将转换方程 $c_o = (p - c_e)\overline{F}(M_{c2})$ 代入上式可得

$$E[\pi_r(M_{c2})] = (p - c_e) \times \left[F(M_{c2})M_{c2} - \int_a^{M_{c2}} F(D)\,dD\right]$$

由式(13) 和式(15) 可得

$$\overline{F}(Q_{c1})(1 - g(Q_{c1})) = \frac{c}{p} \tag{16}$$

$$\overline{F}(M_{c2})\left(\frac{p - v}{p - c_e} - g(M_{c2})\right) = \frac{c - v}{p - c_e} \tag{17}$$

通过比较式(16) 和式(17) 可知，与 Q_{c1} 相比，M_{c2} 的取值受到残值和期权合约执行价格的影响. 定义函数 $h_3(x) = F(x)x - \int_a^x F(D)\,dD$.

定理 3 残值 v 和期权执行价格 c_e 对零售商收益的影响如下.

(a) 当产品残值较低，期权执行价格较高，满足

$$p < \frac{c_e h_3(M_{c2}(c_e, v))}{h_3(M_{c2}(c_e, v)) - h_3(Q_{c1})}$$

则

$$E[\pi_r(Q_{c1})] > E[\pi_r(M_{c2})]$$

零售商偏向于选择远期合约，供应链引入期权合约后零售商的期望收益减少.

(b) 当产品残值较高，期权执行价格较低，满足

$$p \geqslant \frac{c_e h_3(M_{c2}(c_e, v))}{h_3(M_{c2}(c_e, v)) - h_3(Q_{c1})}$$

则

$$E[\pi_r(Q_{c1})] \leqslant E[\pi_r(M_{c2})]$$

零售商偏向于选择期权合约，供应链引入期权合约后零售商的期望收益增加.

当供应商放弃原来的远期合约，向零售商提供期权合约用于订货时，往往还需要考虑零售商是否愿意接受期权合约订购产品，即保证零售商通过期权合约订货的预期收益不低于原来远期合约下的收益[18]. 在定理 3(a) 情形下，由于合约的转换，显然违反了零售商的自愿原则. 为了使零售商总能自愿采用期权合约订货，试图让供应商给零售商一部分转移支付，以弥补在该情形下零售商的损失.

定理 3(a) 情形下，零售商损失的利润为 $E[\pi_r(Q_{c1})] - E[\pi_r(M_{c2})]$. 转移支付 S 需要满足以下两个约束条件

$$E[\pi_r(M_{c2})] + S \geqslant E[\pi_r(Q_{c1})] \tag{18}$$

$$E[\pi_s(M_{c2})] - S > E[\pi_s(Q_{c1})] \tag{19}$$

式(18) 保证了零售商接受转移支付后，在期权合约下的期望利润高于远期合约下的利润；式(19) 保证了供应商支付一部分转移支付后，仍然有动机选择期权合约.

定理 4 采用期权合约后，当出现产品残值较低、期权执行价格较高而导致零售商收益受损时，总是存在从供应商到零售商的转移支付 S 可

以同时满足约束(18)和约束(19).

3 数值分析

本节将通过数值算例分析在不同合约下供应商、零售商的收益. 设产品的零售价 $p = 100$，产品生产成本 $c = 40$，期权执行价格 $c_e = 50$，产品残值 $v = 10$，市场需求 D 服从分布区间为 [0，100] 的均匀分布. 根据设定的参数和定理 1(b) 可计算出供应商对期权的定价为 $c_o = 26.67$，远期合约的定价 $w = 76.67$.

为了验证定理 2，令期权合约的订购价格保持 26.67 不变，供应商逐渐提升远期合约的价格，计算供应商和零售商的收益变化，如图 2 和图 3 所示. 图 2 显示了远期合约价格对供应商收益的影响. 随着远期合约定价越来越高，供应商采用混合合约获得的收益高于远期合约，但是低于只采用期权合约下的收益. 在混合合约下，当 $w = c_o + c_e$ 时供应商的收益达到最大值，并与只采用期权合约下的收益相同. 因为此时供应商只通过期权合约销售产品，不销售远期合约. 所以从供应商的视角看，混合合约与期权是等价的.

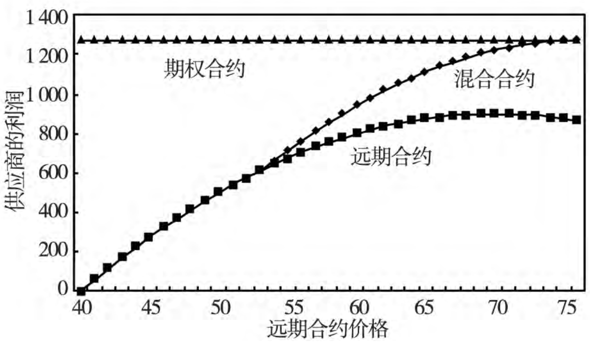

图 2　不同合约下远期合约价格对供应商收益的影响

Fig. 2 How the price of forward contract impacts the supplier's profit

图 3 显示了远期合约价格对零售商收益的影响. 当供应商对远期合约定价较低时，零售商只购买远期合约，自己承担全部市场需求不确定的风险. 此时采用混合合约或远期合约为零售商带来相同的收益，并高于只采用期权的收益. 当远期合约价格逐渐升高时，零售商开始订购期权合约，混合合约带来的收益高于远期合约和期权合约. 当 $w = c_o + c_e$ 时，混合合约与期权合约为零售商带来相同的收益，并高于远期合约带来的收益. 经过以上数值分析可知，对于供应商而言，只采用期权合约销售产品是其最优策略，并且混合合约与期权合约是等价的；对于零售商而言，混合合约略优于期权和远期合约. 但在 Stackelberg 博弈模型中，供应商是供应链的主导者. 当供应商选择期权合约，废弃远期合约以实现其最高收益时，零售商收益的变化则会受到产品残值和期权执行价格的影响.

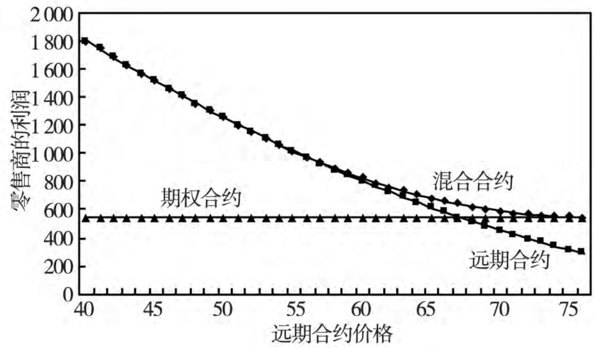

图 3　不同合约下远期合约价格对零售商收益的影响

Fig. 3 How the price of forward contract impacts the retailer's profit

最后，分析产品残值和期权合约执行价格对零售商收益的影响. 设定产品残值取值范围 $v \sim [0，39]$，期权执行价格取值范围 $c_e \sim [40，80]$. 根据参数可以计算出供应商对远期合约和期权合约的定价，进而得到零售商和供应商的收益，如图 4 和图 5 所示.

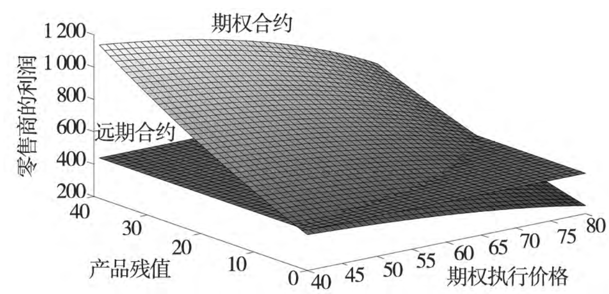

图 4　产品残值和期权执行价格对零售商收益的影响

Fig. 4 Impact of salvage value and exercise price on the retailer's profit

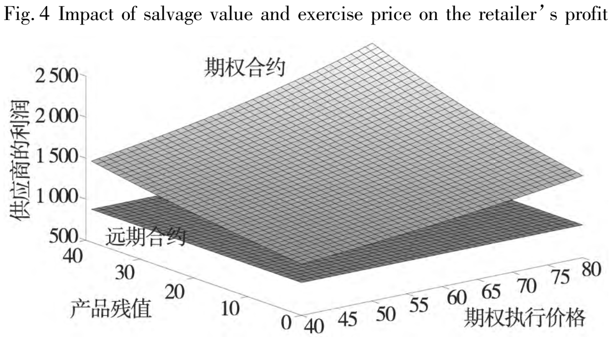

图 5　产品残值和期权执行价格对供应商收益的影响

Fig. 5 Impact of salvage value and exercise price on the supplier's profit

从图 4 中可知，当产品残值较高、期权执行

价格较低时，期权合约能为零售商带来更多收益，所以供应商采用期权合约后，零售商的收益也得到提高; 当产品残值较低、期权执行价格较高时，远期合约能为零售商带来更多收益，即供应商采用期权合约后，零售商的收益会受到损失.

从图 5 中可知，期权合约总能为供应商带来更多收益，产品的残值越高、期权执行价格越高，期权合约相对远期合约的优势就越明显. 从图 4 和图 5 的比较中也可以看出，采用期权合约后，在零售商收益受到损失的情况下，供应商收益的增加值总大于零售商的损失值. 因此在这种情况下,供应商可以为零售商提供足以弥补其损失的转移支付，使得零售商自愿接受期权合约，既提升了零售商自愿采用期权合约订货的积极性，也可以使供应商获得较高收益.

4　结束语

本文研究了由单供应商和单零售商组成的两级供应链，当面临未来不确定需求时，供应链引入期权合约后是否应该废弃远期合约的问题; 分别给出了期权合约和混合合约下零售商的最优订货策略和供应商对合约的最优定价策略; 证明了供应商对期权和远期合约最优定价的存在且唯一性. 在两种合约下,通过对订购量和供应商、零售商收益的比较，得出在 Stackelberg 博弈模型中，只采用期权合约能够为供应商带来更多收益，因此供应商更加偏好期权合约; 即使在混合合约框架下，供应商也会为远期合约制定较高的价格，阻止零售商选择远期合约. 但对于零售商而言，供应链引入期权合约废弃远期合约后，其收益能否增加会受到产品残值和期权执行价格大小的影响. 当零售商的收益受到损失时，供应商可以为其提供一部分转移支付，弥补损失的收益，同时保证供应商从期权合约中获得更多收益. 该比较结果说明了作为供应链的主导者，供应商向供应链引入期权合约后应该废弃远期合约，填补了在一般情况下对期权与混合合约进行比较的空白，并为企业对合约的选择提供了重要指导意义.

本文可以从如下方向进行拓展. 首先，本文考虑的供应商和零售商都是风险中性的，当他们具有不同的风险偏好时，对于期权合约或远期合约的偏好可能发生变化，进而可能改变对合约的选择结果. 其次，在对期权合约与混合合约进行比较时，本文设定供应商与零售商分别制定决策,不会产生合作. 未来可以考虑当两者为了实现供应链协调而进行合作时，对这两种合约进行比较.

参 考 文 献:

[1] Ritchken P H, Tapiero C S. Contingent claims contracting for purchasing decisions in inventory management [J]. Operations Research, 1986, 34(6): 864 – 870.

[2] Chowdhry B, Howe J T B. Corporate risk management for multinational corporations: Financial and operational hedging policies [J]. European Finance Review, 1999, 2(2): 229 – 246.

[3] Bassok Y, Bixby A, Srinivasan R, et al. Design of component-supply contract with commitment-revision flexibility [J]. IBM Journal of Research and Development, 1997, 41(6): 693 – 702.

[4] Wu D J, Kleindorfer P R. Competitive options, supply contracting, and electronic markets [J]. Management Science, 2005, 51(3): 452 – 466.

[5] Martínez-de-Albéniz V, Simchi-Levi D. A portfolio approach to procurement contracts [J]. Production and Operation Management Society, 2005, 14(1): 90 – 114.

[6] Chen X, Hao G, Li L. Channel coordination with a loss-averse retailer and option contracts [J]. International Journal of Pro-

duction Economics, 2014, 150(C): 52 - 57.

[7] Zhao Y, Choi T, Cheng T C E, et al. Supply option contracts with spot market and demand information updating [J]. European Journal of Operational Research, 2018, 266(3): 1062 - 1071.

[8] Anderson E, Chen B, Shao L. Supplier competition with option contracts for discrete blocks of capacity [J]. Operations Research, 2017, 65(4): 952 - 967.

[9] 尤晓岚, 冯耕中, 徐金鹏, 等. 基于期权和 B2B 电子交易的供应链均衡策略 [J]. 管理科学学报, 2014, 17(6): 1 - 12.

You Xiaolan, Feng Gengzhong, Xu Jinpeng, et al. Integrating options with B2B online spot market for equilibrium stratgies in supply chain [J]. Journal of Management Sciences in China, 2014, 17(6): 1 - 12. (in Chinese)

[10] Barnes-Schuster D, Bassok Y, Anupindi R. Coordination and flexibility in supply contracts with options [J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2002, 4(3): 171 - 207.

[11] Kleindorfer P R, Wu D J. Integrating long- and short-term contracting via business-to-business exchanges for capital-intensive industries [J]. Management Science, 2003, 49(1): 1597 - 1615.

[12] Wang X, Liu L. Coordination in a retailer-led supply chain through option contract [J]. International Journal of Production Economics, 2007, 110(1/2): 115 - 127.

[13] Wang C, Chen J, Chen X. Pricing and order decisions with option contracts in the presence of customer returns [J]. International Journal of Production Economics, 2017, 193(11): 422 - 436.

[14] 刘忠轶, 陈丽华, 翟 昕. 基于期权执行价格和生产比例的联合决策 [J]. 中国管理科学, 2012, 20(S1): 385 - 392.

Liu Zhongyi, Chen Lihua, Zhai Xin. Option pricing and production ration: A joint decision [J]. Chinese Journal of Management Science, 2012, 20(S1): 385 - 392. (in Chinese)

[15] 胡本勇, 陈 旭. 供需不确定情形下基于期权的血液供应链优化 [J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(12): 3133 - 3141.

Hu Benyong, Chen Xu. Optimization of blood supply chain with option contracts under supply and demand uncertainty [J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 2016, 36(12): 3133 - 3141. (in Chinese)

[16] 赵海峰, 何 青, Edison TSE. 考虑采购资金约束的物流服务能力采购决策 [J]. 管理科学学报, 2017, 20(5): 102 - 110.

Zhao Haifeng, He Qing, Edison TSE. Decision of purchasing logistics service capabilities considering the influence of shortage of capital [J]. Journal of Management Sciences in China, 2017, 20(5): 102 - 110. (in Chinese)

[17] Li H, Ritchken P, Wang Y. Option and forward contracting with asymmetric information: Valuation issues in supply chains [J]. European Journal of Operational Research, 2009, 197(1): 134 - 148.

[18] Jörnsten K, Nonås S L, Sandal L, et al. Mixed contracts for the newsvendor problem with real options and discrete demand [J]. International Journal of Management Science, 2013, 41(15): 809 - 819.

[19] Zhao Y, Wang S, Cheng T C E, et al. Coordination of supply chains by option contracts: A cooperative game theory approach [J]. European Journal of Operational Research, 2010, 207(2): 668 - 675.

[20] Cheng F, Ettl M, Lin G Y, et al. Flexible Supply Contracts via Options [R]. New York: IBM T. J. Watson Research Center, 2003.

[21] Lariviere M A, Porteus E L. Selling to the newsvendor: An analysis of price-only contracts [J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2001, 3(4): 293 - 305.

[22] Burnetas A, Ritchken P. Option pricing with downward-sloping demand curves: The case of supply chain options [J]. Management Science, 2005, 51(4): 566 - 580.

Choice between option contract and combined contract in a supply chain

HUA Sheng-ya, ZHAI Xin
Guanghua School of Management, Peking University, Beijing 100871, China

Abstract: A supply chain consisting of a supplier and a retailer is studied. The retailer faces stochastic customer demand and purchases from the supplier via either an option contract or a combined contract of forward and option. Under either scenario, a Stackelberg game is modeled respectively, and the optimal replenishment policy for the retailer and the optimal pricing strategy for the supplier are studied from the perspective of the supplier and the retailer respectively. The comparison results show that the supplier is always better off under the option contract and even under the combined contract, and that the supplier will set the price of the forward contract high enough to prevent the retailer from purchasing via the forward contract. Whether the retailer will be better off under the option contract is affected by the option exercise price and the salvage value of the product.

Key words: supply chain; option contract; combined contract; Stackelberg game

附录:

引理 1 证明

对式(4)求关于 M_o 的一阶导数可得

$$\frac{\partial \pi_s}{\partial M_o} = -(p-c_e)f(M_o)M_o + (p-v)\bar{F}(M_o) + v - c = (p-c_e)\bar{F}(M_o)\left(\frac{p-v}{p-c_e} - g(M_o)\right) + v - c$$

设 $\tilde{M} = \sup\left\{M_o : g(M_o) \leqslant \frac{p-v}{p-c_e}\right\}$，当 $M \in (\tilde{M}_o, +\infty)$ 时，收益函数式(4)是 M_o 的减函数，所以最优值一定在区间 $[0,\tilde{M}]$ 内取得. 在区间 $[0,\tilde{M}]$ 内，$(p-c_e)\bar{F}(M_o)\left(\frac{p-v}{p-c_e} - g(M_o)\right) \geqslant 0$. 如果需求的累计分布函数的一般失败率函数是递增的，则 $g'(M_o) > 0$. 对式(4)求二阶导数得

$$\frac{\partial^2 \pi_s}{\partial M_o^2} = -(p-c_e)f(M_o)\left(\frac{p-v}{p-c_e} - g(M_o)\right) - (p-c_e)\bar{F}(M_o)g'(M_o) < 0$$

所以收益函数是凹函数，存在唯一最优解.

如果市场需求分布具有有限大的均值和定义区间 $[a,b)$，那么供应商的期望收益函数在 $[0,+\infty)$ 是单峰的，在区间 $[0,a)$ 上是线性的，且严格递增，在区间 $[a,\tilde{M}]$ 是严格的凹函数，在区间 $(\tilde{M},+\infty)$ 是严格递减的，满足一阶条件的解 $M_o^* = \left\{M_o : \bar{F}(M_o)\left(\frac{p-v}{p-c_e} - g(M_o)\right) = \frac{c-v}{p-c_e}\right\}$ 一定会在区间 $[a,\tilde{M}]$ 内取得，则供应商的最优销售量为 M_o^* 或者为 a.

详细证明可参看文献[21]中定理(1)的证明.

引理 2 证明

对式(6)分别求关于 Q_c 和 M_c 的一阶导数可得

$$\frac{\partial E(\pi_r)}{\partial Q_c} = p - w - (p-c_e)F(Q_c+M_c) - c_eF(Q_c), \quad \frac{\partial E(\pi_r)}{\partial M_c} = p - c_o - c_e - (p-c_e)F(Q_c+M_c)$$

对式(6)分别求关于 Q_c 和 M_c 的二阶导数可得

$$\frac{\partial^2 \mathrm{E}(\pi_r)}{\partial Q_c^2} = -(p-c_e)f(Q_c+M_c) - c_o f(Q_c) < 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{E}(\pi_r)}{\partial M_c^2} = -(p-c_e)f(Q_c+M_c) < 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{E}(\pi_r)}{\partial M_c \partial Q_c} = -(p-c_e)f(Q_c+M_c) < 0$$

Hessian 矩阵负定，所以当零售商的期望收益对订购量的一阶导数为 0 时，零售商可以获得最大收益. 因此根据一阶导数公式可证引理 2.

定理 1 证明

(a) 当 $w \leqslant \frac{c_o p}{p-c_e}$ 时，根据式(7)和分布函数 $F(D)$ 严格递增的性质，可得转换方程 $w = p\bar{F}(Q_{c1})$，将该式代入式(11)可得

$$\mathrm{E}(\pi_s) = (w-c)Q_{c1} = (p\bar{F}(Q_{c1}) - c)Q_{c1}$$

对 $\mathrm{E}(\pi_s)$ 求关于 Q_{c1} 的一阶导数，有

$$\frac{\partial \mathrm{E}(\pi_s)}{\partial Q_{c1}} = p\bar{F}(Q_{c1})\left(1 - \frac{Q_{c1}f(Q_{c1})}{\bar{F}(Q_{c1})}\right) - c = p\bar{F}(Q_{c1})(1-g(Q_{c1})) - c$$

令 $\tilde{Q} = \sup\{Q_{c1}: g(Q_{c1}) \leqslant 1\}$. 如果 $g(Q_{c1})$ 是递增的，且具有有限大的均值和定义区间 $[a,b)$，那么供应商的收益函数在区间 $[0,+\infty)$ 是单峰的，在区间 $[0,a)$ 上是线性的，且严格递增，在区间 $[a,\tilde{Q}]$ 是严格的凹函数，在区间 $(\tilde{Q},+\infty)$ 是严格递减的. 满足一阶条件的解 $Q^* = \left\{Q_{c1}: \bar{F}(Q_{c1})(1-g(Q_{c1})) = \frac{c}{p}\right\}$ 一定会在区间 $[a,\tilde{Q}]$ 内取得，则供应商的最优销售量 Q_{c1} 为 Q^* 或者为 a. 由此证得最优销售量存在且唯一. 根据转换方程 $w = p\bar{F}(Q_{c1})$，进而可知最优远期合约价格存在且唯一. 因此证得定理 1(a).

(b) 当 $w > \frac{c_o p}{p-c_e}$ 时，零售商最优订货策略如式(8)所示. 根据式(8)和需求分布函数 $F(D)$ 的严格递增性，可得价格 w、c_o 与远期合约销量 Q_{c2} 及合约总销量 T 的转换方程

$$w - c_o = c_e(1-F(Q_{c2})),\ c_o = (p-c_e)(1-F(T))$$

代入供应商的收益函数式(10)可得

$$\mathrm{E}(\pi_s) = (c_e\bar{F}(Q_{c2}) - v)Q_{c2} + ((p-c_e)\bar{F}(T) + v - c)T + (c_e - v)\int_{Q_{c2}}^{T}\bar{F}(D)\,\mathrm{d}D$$

对 $\mathrm{E}(\pi_s)$ 求关于 Q_{c2} 的一阶导数，有

$$\frac{\partial \mathrm{E}(\pi_s)}{\partial Q_{c2}} = -v + v\bar{F}(Q_{c2})\left(1 - \frac{c_e}{v}g(Q_{c2})\right) = -vF(Q_{c2}) - c_e f(Q_{c2})Q_{c2} \leqslant 0$$

$\mathrm{E}(\pi_s)$ 对 T 求一阶导数，有

$$\frac{\partial \mathrm{E}(\pi_s)}{\partial T} = v - c + (p-c_e)\bar{F}(T)\left(\frac{p-v}{p-c_e} - \frac{Tf(T)}{\bar{F}(T)}\right) = v - c + (p-c_e)\bar{F}(T)\left(\frac{p-v}{p-c_e} - g(T)\right)$$

令 $\tilde{T} = \sup\left\{T: g(T) \leqslant \frac{p-c}{p-c_e}\right\}$，当 $T \in (\tilde{T},+\infty)$ 时，$\frac{\partial \mathrm{E}(\pi_s)}{\partial T} < 0$. 对 $\mathrm{E}(\pi_s)$ 分别求关于 Q_{c2} 和 T 的二阶导数，有

$$\frac{\partial^2 \mathrm{E}(\pi_s)}{\partial Q_{c2}^2} = -v_s f(Q_{c2})\left(1 - \frac{c_e}{v_s}g(Q_{c2})\right) - c_e\bar{F}(Q_{c2})g'(Q_{c2}) < 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{E}(\pi_s)}{\partial T^2} = -(p-v_s)f(T)\left(1 - \frac{p-c_e}{p-v_s}g(T)\right) - (p-c_e)\bar{F}(T)g'(T) < 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{E}(\pi_s)}{\partial Q \partial T} = 0$$

可知 Hessian 矩阵负定，所以当 $T \in [0,\tilde{T}]$ 时，$\mathrm{E}(\pi_s)$ 是关于 Q_{c2} 和 T 的联合凹函数. 为了求解期望收益的最大值，令 $\frac{\partial \mathrm{E}(\pi_s)}{\partial Q_{c2}} = 0$，$\frac{\partial \mathrm{E}(\pi_s)}{\partial T} = 0$. 可得

$$Q_{c2}^{*}=0,\ T^{*}=\left\{T:\bar{F}(T)\left(\frac{p-v}{p-c_e}-g(T)\right)=\frac{c-v}{p-c_e}\right\}$$

因此供应商的最优远期合约销售量为 0，期权合约的销售量为正.

如果 $g(D)$ 是递增的，具有有限大的均值和定义区间 $[a,b)$，那么满足一阶条件的解

$$T^{*}=\left\{T:\bar{F}(T)\left(\frac{p-v}{p-c_e}-g(T)\right)=\frac{c-v}{p-c_e}\right\}$$

一定会在区间 $[a,\tilde{T}]$ 内取得，则供应商的最优期权合约销售量 M_{c2} 为 T^{*} 或者为 a.

经过以上分析，供应商有唯一最优的期权合约销售量，而远期合约销售量为 0. 根据销售量与定购价格的一一对应关系，可知供应商存在唯一最优的期权合约定购价格，远期合约价格为 $w=c_o+c_e$. 因此证得定理 1(b).

定理 2 证明

销售量比较. 定理 1(a) 和 1(b) 的销售量 Q_{c2}，M_{c2} 分别满足

$$p\bar{F}(Q_{c1})(1-g(Q_{c1}))=c,\ p\bar{F}(M_{c2})(1-g(M_{c2}))=c-vF(M_{c2})-c_e f(M_{c2})M_{c2}$$

设函数 $h_1(x)=p\bar{F}(x)(1-g(x))$，则有

$$h_1(Q_{c1})=c,\ h_1(M_{c2})=c-vF(M_{c2})-c_e f(M_{c2})M_{c2}<c$$

对 $h_1(x)$ 求关于 x 的一阶导数，得

$$\frac{\mathrm{d}h_1(x)}{\mathrm{d}x}=-pf(x)(1-g(x))-p\bar{F}(x)\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}<0$$

所以 $h_1(x)$ 是减函数. 因为 $h_1(M_{c2})<h_1(Q_{c1})$，所以 $M_{c2}>Q_{c1}$，即供应商通过定理 1(b) 定价策略的销售量更多.

供应商收益比较. 在定理 1(a) 和 1(b) 的定价策略下，供应商的收益分别为

$$\mathrm{E}[\pi_s(Q_{c1})]=(w-c)Q_{c1},\ \mathrm{E}[\pi_s(M_{c2})]=(c_o+v-c)M_{c2}+(c_e-v)\int_a^{M_{c2}}\bar{F}(D)\,\mathrm{d}D$$

根据转换方程 $w=p\bar{F}(Q_{c1})$ 和 $c_o=(p-c_e)\bar{F}(M_{c2})$，可得两种策略下供应商的收益函数

$$\mathrm{E}[\pi_s(Q_{c1})]=(p-c)Q_{c1}-pF(Q_{c1})Q_{c1}$$

$$\mathrm{E}[\pi_s(M_{c2})]=(p-c)M_{c2}-pF(M_{c2})M_{c2}+c_eF(M_{c2})M_{c2}-(c_e-v)\int_a^{M_{c2}}F(D)\,\mathrm{d}D$$

令 $h_2(x)=c_eF(x)x-(c_e-v)\int_a^{x}F(D)\,\mathrm{d}D$，$x\geqslant a$. 其一阶导数为 $\frac{\mathrm{d}h_2(x)}{\mathrm{d}x}=c_ef(x)x+vF(x)\geqslant 0$. 所以 $h_2(x)$ 是增函数，且 $h_2(x=a)=0$. 定义函数 $\hat{\pi}_s(x)=(p-c)x-pF(x)x+h_2(x)$，则 $\hat{\pi}_s(Q_{c1})>\mathrm{E}[\pi_s(Q_{c1})]$. 对 $\hat{\pi}_s(x)$ 求关于 x 的一阶导数，得

$$\frac{\partial\hat{\pi}_s(x)}{\partial x}=-c+v+(p-c_e)\bar{F}(x)\left(\frac{p-v}{p-c_e}-g(x)\right)$$

当 $\frac{\partial\hat{\pi}_s(x)}{\partial x}=0$ 时，$\bar{F}(x^{*})\left(\frac{p-v}{p-c_e}-g(x^{*})\right)=\frac{c-v}{p-c_e}$，此时 $x^{*}=M_{c2}$. 对 $\hat{\pi}_s(x)$ 求关于 x 的二阶导数，得

$$\frac{\partial^2\hat{\pi}_s(x)}{\partial x^2}=-(p-v_s)f(x)\left(1-\frac{p-c_e}{p-v_s}g(x)\right)-(p-c_e)\bar{F}(x)g'(x)<0$$

当 $x<x^{*}$ 时，$\hat{\pi}_s(x)$ 是关于 x 的增函数. 又因为 $M_{c2}>Q_{c1}$，所以 $Q_{c1}<x^{*}=M_{c2}$，最终可得

$$\mathrm{E}[\pi_s(Q_{c1})]<\hat{\pi}_s(Q_{c1})<\hat{\pi}_s(x^{*})=\mathrm{E}[\pi_s(M_{c2})]$$

所以仅通过期权销售产品，供应商能够获得更多收益.

综合以上分析可得定理 2.

定理 3 证明

在式(17)中，利用隐函数求导法则，M_{c2} 对残值 v 求一阶导数，得

$$\frac{\partial M_{c2}}{\partial v}=\frac{F(M_{c2})}{(p-c_e)\bar{F}(M_{c2})g'(M_{c2})+(p-c_e)f(M_{c2})\left(\frac{p-v}{p-c_e}-g(M_{c2})\right)}$$

因为 $g(M_{c2}) \leqslant \frac{p-v}{p-c_e}$，$g'(M_{c2}) > 0$，所以 $\frac{\partial M_{c2}}{\partial v} > 0$.

对 $\mathrm{E}[\pi_r(M_{c2})]$ 求关于 v 的一阶导数，得

$$\frac{\partial \mathrm{E}[\pi_r(M_{c2})]}{\partial v} = (p-c_e) f(M_{c2}) M_{c2} \frac{\partial M_{c2}}{\partial v} > 0$$

所以零售商的利润函数是关于 v 的增函数.

由于 $h_3(x) = F(x)x - \int_a^x F(D)\,\mathrm{d}D$，那么可知

$$\mathrm{E}[\pi_r(Q_{c1})] = ph_3(Q_{c1}),\ \mathrm{E}[\pi_r(M_{c2})] = (p-c_e) h_3(M_{c2}(c_e, v))$$

$h_3(x)$ 的一阶导数 $\frac{\mathrm{d}h_3(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)x > 0$，又因为 $M_{c2} > Q_{c2}$，所以 $h_3(M_{c2}(c_e, v)) > h_3(Q_{c1})$.

当 $\mathrm{E}[\pi_r(Q_{c1})] > \mathrm{E}[\pi_r(M_{c2})]$ 时，根据 $ph_3(Q_{c1}) > (p-c_e)h_3(M_{c2}(c_e, v))$ 可得

$$p < \frac{c_e h_3(M_{c2}(c_e, v))}{h_3(M_{c2}(c_e, v)) - h_3(Q_{c1})}$$

当 $\mathrm{E}[\pi_r(Q_{c1})] \leqslant \mathrm{E}[\pi_r(M_{c2})]$ 时，根据 $ph_3(Q_{c1}) \leqslant (p-c_e)h_3(M_{c2}(c_e, v))$ 可得

$$p \geqslant \frac{c_e h_3(M_{c2}(c_e, v))}{h_3(M_{c2}(c_e, v)) - h_3(Q_{c1})}$$

因此可证定理 3.

定理 4 证明

为了证明存在 S 同时满足约束式(18) 和式(19)，令 $S_{\min} = \mathrm{E}[\pi_r(Q_{c1})] - \mathrm{E}[\pi_r(M_{c2})]$，只需证明 S_{mim} 满足约束式(19) 即可. 设 $\Delta = \mathrm{E}[\pi_s(M_{c2})] - S_{\min} - \mathrm{E}[\pi_s(Q_{c1})]$，可得

$$\Delta = (p-c)(M_{c2} - Q_{c1}) - p\int_{Q_{c1}}^{M_{c2}} F(D)\,\mathrm{d}D + v\int_a^{M_{c2}} F(D)\,\mathrm{d}D$$

根据前文的分析有 $M_{c2} > Q_{c1}$，设 $M_{c2} = \alpha Q_{c1}$，且 $\alpha > 1$，可得

$$\Delta = (p-c)(\alpha Q_{c1} - Q_{c1}) - p\int_{Q_{c1}}^{\alpha Q_{c1}} F(D)\,\mathrm{d}D + v\int_a^{\alpha Q_{c1}} F(D)\,\mathrm{d}D$$

对 Δ 求关于 α 的一阶导数，得

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = Q_{c1}[p-c) - (p-v)F(M_{c2})]$$

达到供应链协同时，零售商的最优订购量 $M^* = F^{-1}\left(\frac{p-c}{p-v}\right)$. 代入式(4) 求关于 M_o 的一阶导数，即

$$\frac{\partial \pi_s}{\partial M_o}\Big|_{M_o = M^*} = -M^* f(M^*)(p-c_e) < 0$$

M_{c2} 满足 $\frac{\partial \pi_s}{\partial M_o}\Big|_{M_o = M_{c2}} = 0$，又因为 $\pi_s(M_o)$ 是凹函数，所以有 $M_{c2} < M^*$. 进而有

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = Q_{c1}[p-c) - (p-v)F(M_{c2})] > Q_{c1}\left[(p-c) - (p-v)\frac{p-c}{p-v}\right] = 0$$

$\alpha = 1$ 时，$\Delta > 0$; 所以当 $\alpha > 1$ 时，Δ 恒大于 0，总有 $\mathrm{E}[\pi_s(M_{c2})] - S_{\min} > \mathrm{E}[\pi_s(Q_{c1})]$.

因此可证定理 4.