

# 混合泊松违约强度下信用资产组合风险度量<sup>①</sup>

陈荣达<sup>1,2</sup>, 虞欢欢<sup>1</sup>, 余乐安<sup>3</sup>, 李泽西<sup>1</sup>, 金骋路<sup>1</sup>, 林博<sup>1</sup>

(1. 浙江财经大学金融学院, 杭州 310018; 2. 浙江财经大学财富管理与量化投资协同创新中心, 杭州 310018; 3. 北京化工大学经济管理学院, 北京 100029)

**摘要:** 基于共同风险因子的相依关系转换为不同资产的违约示性函数的相依关系来刻画的思想, 利用参数为 Gamma 分布线性组合的 Poisson 分布来描述不同资产的违约示性函数的相依关系, 建立基于混合泊松分布的信用资产组合多因子的风险度量模型, 并引入重要抽样技术到模型进行有效数值模拟计算, 拓宽和丰富信用资产组合风险度量模型. 进一步地, 结合中国金融市场四个产业的数据把混合泊松分布应用到实证研究中. 在模型的构建过程中, 首先运用经典的结构模型和期权定价公式估计单个债务人的动态违约概率; 再利用单资产动态违约概率得到混合泊松模型下每个资产的动态泊松强度; 接着结合共同风险因子的值求得资产不同的因子载荷系数, 该因子载荷系数反映了不同资产间的相依结构程度; 最后, 把重要抽样技术发展应用到混合泊松模型中, 对由不同产业组成的信用资产组合的损失分布进行有效 Monte Carlo 模拟. 模拟结果表明该算法比普通 Monte Carlo 模拟法的计算效率更有效, 且能很大程度上减少所要估计的损失概率的方差.

**关键词:** 信用资产组合风险; 混合泊松模型; 结构模型; Monte Carlo 模拟; 重要抽样技术  
**中图分类号:** F830.5   **文献标识码:** A   **文章编号:** 1007-9807(2018)12-0054-16

## 0 引言

大多数信用资产组合风险度量模型, 如 Morgan Chase 的 CreditMetrics 模型、McKinsey 的 CreditPortfolio View 模型、KMV 的 Portfolio Manager 模型、Credit Suisse First Boston 的 CreditRisk + 模型, 应用 Monte Carlo 模拟技术对信用投资组合风险进行度量时, 需要产生大量的样本, 这增加了计算时间和工作量, 影响了模拟效率. 另外, 这些模型的缺陷在于对于信用投资组合损失分布的尾部概率是基于多元正态 Copula 或基于多元正态分布进行的, 然而在两个随机变量之间的线性相关系数小于 1 的情形下正态 Copula 的尾部相依系数为零, 意味着当边际违约概率比较少时, 这将导致违约的示性函数是渐近独立的, 这和事实上

的相关违约不相吻合.

Cont<sup>[1]</sup> 总结了目前信用资产组合风险度量两种方法: 结构化方法 (structural approach) 和简约方法 (reduced-form approach). 结构化方法是基于 Black-Scholes 期权定价框架下, 利用公司价值的动态变化就可以推断出该公司的违约概率. 尽管结构化方法诞生很早, 但是由于其经典的视角和处理方法, 它仍然被广泛的应用, 见 Chan 等<sup>[2]</sup> 以及 Schäfer 和 Koivusalo<sup>[3]</sup>. 另一个度量信用资产组合风险的方法是简约方法, 它对于为什么一个公司发生违约并不做出经济上的解释, 而认为违约事件是外生的, 反映信用质量变化的违约强度与无风险利率仿射地依赖于基础状态向量, 而基础状态向量的分量满足相互独立的 CIR 过程, 这样能够反映无风险利率或信用价差的非负性、

① 收稿日期: 2016-05-03; 修订日期: 2018-05-29.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71631005; 71433001; 71471161).

作者简介: 陈荣达(1971—), 男, 浙江温州人, 博士, 教授. Email: rongdachen@163.com

均值回复和随机波动的市场特征,在此基础上,进而采用极大似然估计估计出可变的违约强度. Su 和 Wang<sup>[4]</sup> 基于简约方法建立了一个带有信用风险的欧洲期权定价模型,他们假设利率运动服从 Vasicek 模型,违约强度是由一个带跳的扩散运动驱动的.

近几年经历过的金融危机可知一个道理,即一个公司的财务健康度是跟随着宏观经济因子的变化而变化的. 因此,某种程度上可以说不同的公司被相同的一些共同宏观因子所影响,也就是说债务公司的违约之间存在着一定的相关性. 考虑了信用主体之间违约相关性的组合观是现代信用风险管理的最重要特征. 目前对信用资产组合风险度量研究由两个方面展开: 采用由上至下法 (top-down approach) 或由下至上法 (bottom-up approach) 来集成市场风险和信用风险. 第一种方法是在不同类型风险的层面上考虑风险间的相关性,通过建立不同类型风险条件下的可彼此独立的资产状态变量控制方程及其依赖关系,引入 Copula 函数把在不同风险类型条件下的资产组合损失边缘分布连接起来,形成不同类型风险集成度量<sup>[5,6]</sup>. 而第二种方法,由下至上法是在更加微观的风险因子层面上考虑风险间的相关性,需要从不同类型风险中识别出共同的风险因子及其相关性结构,建立不同类型风险因子的控制方程及其依赖关系,在此基础上,运用数值模拟技术进行风险度量<sup>[7-12]</sup>. 第一种方法在建模上具有很大的灵活性,关键在于如何挑选一个合适的 Copula 函数来进行风险的集成度量; 第二种方法,资产组合的违约强度的设定与其成分资产的基本情况无关,在这种模型中违约的相依性是通过一系列风险因子引入的,违约事件在这些风险因子给定的条件下是互相独立的.

Dimakos 和 Aas<sup>[8]</sup>、Kole 等<sup>[9]</sup>、Rosenberg 和 Schuermann<sup>[13]</sup> 引入的不同类型的 Copula 函数来捕获资产之间的相依结构,然后运用 Monte Carlo 方法估计出资产组合的 VaR 值. Liang 等<sup>[14]</sup> 提出了一个因子 Copula 模型来综合衡量中国商业银行的信用风险和市场风险,该模型依靠一系列反应宏观经济运行情况的共同风险因子来定义债务主体的相依结构. Bernard 等<sup>[15]</sup> 提出估计的资产组合的 VaR 值在很大程度上取决于模型的不确

定性且并不是稳健的.

总之,以上研究是学术界对于综合风险度量通行的研究思路和做法. 然而,由于信用违约方面的数据非常缺乏,选一个正确的 Copula 函数是非常困难的. He 和 Gong<sup>[16]</sup> 指出金融机构信用资产组合进行风险度量时,而组合损失分布往往变化很大,这会导致 Copula 模型本身对于金融风险的影响. 如果对于包含了大量标的大型投资组合来说,那就会产生不可小视的模型风险. Glasserman 和 Li<sup>[17]</sup> 曾经应用过由下至上法来建立风险因子之间的相依结构,通过引入混合泊松模型在更加微观的风险因子层面上考虑风险间的相关性,识别出共同风险因子及其相关性结构. 而且 First Boston 的 CreditRisk<sup>+</sup><sup>[18]</sup> 提出,此类混合泊松模型的模型误差较小,因为它的违约损失分布是所有违约个体的加总,在大样本下每个违约个体的模型误差可以被互相抵消. 另外,混合泊松模型在实证中更利于统计拟合和数值模拟,如 Han<sup>[19]</sup> 等. 因此,本文引入该混合泊松模型,并且结合中国金融市场的数据来开拓实证上的应用.

另外,快速并准确的得到组合的损失分布情况也是风险管理的另一关键. 应用 Monte Carlo 模拟技术计算信用投资组合损失分布的尾部概率或给定置信度下总风险 VaR 值,然而对大样本的信用资产组合的进行模拟时,为了达到一定的模拟精度,往往需要大量的模拟次数,尤其对小概率的违约事件,其运算时间也就更加长久. 为此克服稀有事件 Monte Carlo 模拟的困难,Merino 和 Nyfeler<sup>[20]</sup> 提出了一个新的计算组合损失分布的方法: 快速傅里叶变换与 Monte Carlo 方法相结合,这种方法能够快速又准确地计算整个组合损失分布. Grundke<sup>[21]</sup> 基于 CreditMetrics 模型的基础之上,运用了 Fourier 变换技术度量出信用资产组合损失分布的尾部概率. Glasserman 和 Li<sup>[22]</sup> 在多元正态 Copula 的框架下,为了克服极小概率违约事件发生概率估计的困难,提出了把两步重要抽样技术发展到了信用投资组合度量模型,第一步,通过对反映组合风险的多个信用风险因子的联合分布进行概率测度变化,从而改变多个信用风险因子的期望向量,在相应区域产生更多的样本,第二步,在给定的信用风险因子条件下,对条件违约

概率进行概率测度的指数变化,使得该情形下不再是稀有事件 Monte Carlo 模拟,从而减少 Monte Carlo 模拟计算工作量.在此基础上,为了进一步减少模拟估计的误差,又能达到快速模拟的目的, Glasserman 等<sup>[23]</sup>应用非线性优化技术中的背包问题来解决两步重要抽样技术中的信用风险因子的期望向量确定问题.另外, Glasserman<sup>[24]</sup>也在多元正态 Copula 的框架下,分别使用了同质的单因子近似方法、启发式鞍点法、数值积分的拉普拉斯变换方法来近似估计信用资产组合损失分布的尾部概率,并指出近似估计尾部概率的精度关键取决于用来刻画不同交易对手相依关系的多元正态 Copula 的相关结构. Grundke<sup>[25]</sup>在信用风险因子的联合分布为多元正态分布的框架下,把 Glasserman 和 Li<sup>[22]</sup>提出的两步重要抽样技术发展到了 Grundke<sup>[21]</sup>的信用资产组合市场风险度量模型中,建立了基于两步重要抽样技术的信用资产组合风险度量模型. Sak 和 Hörmann<sup>[26]</sup>将重要抽样技术应用到信用资产组合风险度量,通过指数扭曲和概率测度的指数变换后在相应区域产生更多的样本,使这种新测度情形下的模拟不再是稀有事件 Monte Carlo 模拟.通过这种概率测度变换,可以减少 Monte Carlo 模拟的计算工作量,同时可提高估计组合损失概率的精确性.

上述这些模型的缺陷在于对于信用资产组合损失分布的尾部概率是基于多元正态 Copula 进行的,然而在两个随机变量之间的线性相关系数小于 1 的情形下正态 Copula 的尾部相依系数为零,意味着当边际违约概率比较少时,这将导致违约的示性函数是渐近独立的,这和事实上的相关违约不相吻合.

基于以上分析,本文基于 Glasserman 和 Li<sup>[17]</sup>把共同风险因子的相依关系转换为不同资产的违约示性函数的相依关系来刻画的思想,将 Gamma 分布和 Poisson 分布组成的混合 Poisson 分布发展到信用资产组合风险度量模型,利用参数为 Gamma 分布线性组合的 Poisson 分布来描述不同资产的违约示性函数的相依关系,建立基于混合泊松分布的信用资产组合多因子的风险度量模型,利用 Gamma 分布特点有利于运用重要抽样技术,引入重要抽样技术到模型进行有效数值模拟计算,拓宽和丰富信用资产组合风险度量模型.

## 1 结构模型

对于金融机构来说,信用风险的合理评估一直以来都是很重要的,金融机构一直投入更多的资源发展各种能够充分评估和管理信用风险的工具和模型.结构模型是基于 Merton 的期权定价理论,它把公司的权益价值视作一种对公司资产的或有要求权.通过这种方法可以在公司的负债、股权和资产之间建立结构性的关系,再运用股票市场的数据,人们能得到债券发行公司的违约概率.

### 1.1 基本模型

公司的资产价值  $V_A$  假设服从如下形式的几何布朗运动

$$\frac{dV_{A_t}}{V_{A_t}} = \mu_A dt + \sigma_A dZ_t \tag{1}$$

其中  $\mu_A$  是漂移参数,表示资产价值的瞬时增长率;  $\sigma_A$  是资产的波动率,表示公司资产价值的波动性;  $Z_t$  是标准布朗运动.同时假设公司的负债只有零息债券一种,其票面价值为  $X$ ,到期时间为  $T$ .那么,当  $T$  时刻公司的资产价值小于  $X$  的情况发生时,公司视为发生违约事件.

公司的股权价值  $V_E$ ,可以看做是对公司资产的一种看涨期权,它的价值可以通过 Black-Scholes 期权公式来得到

$$V_E = V_A N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \tag{2}$$

其中  $d_1 = \frac{\ln(V_A/X) + (r + \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A \sqrt{T}}$ ,  $d_2 = d_1 - \sigma_A$

$\sqrt{T}$ ,  $r$  是无风险利率,  $N(\cdot)$  是标准正态分布的累积概率密度函数,公司债务的价值为  $V_A - V_E$ .

以上述思想方法建立的模型通常叫做结构模型.

这些年来,学者们对该模型进行了很多扩展和革新,包括 Jarrow<sup>[27]</sup>、Chan 等<sup>[2]</sup>、Schäfer 和 Koivusalo<sup>[3]</sup>.尽管这些模型在数学理论上的衍生和发展看起来很复杂,最基本的理念始终是简单并一致的.一旦设定好一个随机变量的随机过程,那么理论上就能够计算得到这个变量低于或高于一个预定边界的概率.具体来说,在 Merton 模型中,公司的资产价值假定服从几何布朗运动,公司债券的票面价值是违约边界,公司资产价值低于违约边界的概率,即违约概率,就能够以此计

算出来.

### 1.2 违约概率估计

如果假设公司的资产价值服从式(1)中的随机过程, 拥有在  $T$  时刻到期的面值为  $X$  的债务. 如果该公司的资产价值水平在  $T$  时刻掉到  $X$  以下, 那么认为其违约, 违约概率为

$$P_{def} = P(V_{A,T} \leq X) \quad (3)$$

公司在  $T$  时刻的资产价值为

$$\ln(V_{A,T}) = \ln(V_A) + (\mu_A - \sigma_A^2/2)T + \sigma_A Z_T \quad (4)$$

其中  $V_A$  是公司资产的当前价值, 公司的违约概率可以计算如下

$$\begin{aligned} P_{def} &= P(\ln(V_{A,T}) \leq \ln(X)) \\ &= N\left(-\frac{\ln L + mT}{\sigma_A \sqrt{T}}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $L = V_A/X$  是杠杆比率,  $m = \mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2$ .

为了计算违约概率这个指标, 需要估计参数  $\mu_A$  和  $\sigma_A$ . 然而, 由于公司的资产并不是在市场上交易的, 这些参数并不能直接从市场上获得. 为了从股权价值变动轨迹中计算出违约概率, 运用了与 KMV 模型和 Vassalou 和 Xing<sup>[28]</sup> 相似的方法. 实证时, 考虑一年期的违约概率, 公司所有的债务都假设在一年之后到期, 债务的总额以所有短期负债和长期负债 50% 的和来估计.

进一步地, 在公司的股权价值  $V_E$  和它的波动率  $\sigma_E$  已经给出的情况下, 可以通过结构模型中已经阐述过的关系来反求得到公司的资产价值  $V_A$  和它的波动率  $\sigma_A$ . 在本文的实证中, 为了取值的方便, 可以将上市公司在股票市场上的市值作为其股权价值, 其股价的波动性作为波动率  $\sigma_E$ , 以及其长短期负债的账面价值来测算公司的资产价值和波动性, 进而得到该公司在给定时间期限里的违约概率. 上市公司的股票市值一般都被认为是投资者对公司未来股权价值的合理预期, 因此这与前面把公司股权看作是一个欧式看涨期权处理是一致的. 这个看涨期权的执行价格为  $D$  (表示每股负债), 无风险利率为  $r$ , 标的资产到期价格为  $V_{A,T}$ . 那么有如下关系式

$$V_{E,D} = e^{-rT} V_{E,T} [\max(V_{A,T} - D, 0)] \quad (6)$$

用 Black-Scholes 公式转化为

$$V_{E,D} = e^{-rT} [V_{A,D} N(d_1) e^{rt} - DN(d_2)] \quad (7)$$

$$d_1 = \frac{\ln(V_{A,D}/D) + (r + \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A \sqrt{T}} \quad (8)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T}$$

由于  $V_{E,t} = f(V_{A,t}, t)$ , 由伊藤定理可得

$$V_{E,t} = \frac{\sigma_A}{\sigma_E} f_x(V_{A,t}, t) V_{A,t} \quad (9)$$

每次迭代计算中  $V_{A,D} = V_{A,t-1}$ , 那么根据式(7)和式(9),  $V_{A,t}$  和对应的  $\sigma_A$  可以被求得. 由于公司价值  $V_{A,t}$  满足式(1)的几何布朗运动, 将  $V_{A,t}$  代入式(4)中可以得到其中参数  $\mu_A$  和  $\sigma_A$  的值

$$\mu = \frac{(\overline{\Delta V} + S_{\Delta V}^2/2)}{\Delta t}, \quad (10)$$

$$\sigma = \frac{S_{\Delta V}}{\sqrt{\Delta t}}$$

其中  $\overline{\Delta V} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta V_{A,t}}{n}$ ,  $S_{\Delta V}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta V_{A,t} - \overline{\Delta V})^2}{n-1}$ ,  $\Delta V_t = \ln(V_{A,t+1}) - \ln(V_{A,t})$ ,  $t = 1, \dots, n$ .

## 2 信用资产组合联合违约概率

基于投资组合的视角来考察是信用组合风险管理的核心. 为了更好的描述模型, 引入了下面几个变量符号.

$m$ : 在信用组合中有可能违约的债务人的数量;

$c_i$ : 第  $i$  个债务人的违约造成的损失, 如没有违约  $c_i = 0$ ;

$L$ : 一个信用资产组合的总损失.

### 2.1 正态 Copula 组合中的组合信用风险

本节首先介绍一种被广泛用来描述众多债务人之间的相关性结构的方法——正态 Copula 模型. 为了更好地介绍在此方法下的异质资产组合的损失分布情况, 引入下述变量:

$Y_i$ : 第  $i$  个债务人的违约示性指标, 如果该债务人违约, 则  $Y_i = 1$ , 否则  $Y_i = 0$ ;

$p_i$ : 第  $i$  个债务人的边际违约概率.

如果在一个资产组合中有  $m$  个债务人, 那么这个组合的总损失为

$$L = c_1 Y_1 + \dots + c_m Y_m = \sum_{i=1}^m c_i Y_i \quad (11)$$

建立联合违约模型的最终目的是估计损失分布尾

部概率  $P(L > x)$  . 在建立联合违约模型的过程中,需要引入组合中每个债务人之间,即示性指标  $Y_i$  之间的相关性结构. 在正态 Copula 模型中,这种相依性是通过一个多元正态 Copula  $W = (W_1, \dots, W_m)$  引入的,其中  $W_i^T \sim N(0, T)$  . 令  $m_i = \mu - \frac{1}{2}\sigma_i^2$  ,通过伊藤引理可以得到  $V_T^i = V_0^i e^{m_i T + \sigma_i W_i^T}$  ,由于  $W_i^T \sim N(0, T)$  从而可得到

$$W_i^T = \frac{\ln(V_T^i/V_0^i) - m_i T}{\sigma_i} \quad (12)$$

另外,根据违约条件:  $V_T^i$  小于公司必须在到期时间  $T$  时刻支付债券额度  $K_i$  ,即  $V_T^i = V_0^i e^{m_i T + \sigma_i W_i^T} < K_i$  ,因此可以得到  $\sigma_i W_i^T < \ln L_i - m_i T$  ,其中  $L_i = \frac{K_i}{V_0^i}$  是最初的杠杆率. 由上式可得到

$$B_i = \frac{\ln L_i - m_i T}{\sigma_i} \quad (13)$$

然后,每个违约示性指标可以表示为

$$Y_i = 1\{W_i < B_i\} \quad i = 1, \dots, m \quad (14)$$

则违约概率

$$P(Y_i = 1) = P(W_i < B_i) = p_i \quad (15)$$

这就是说,如果  $W_i \leq \Phi^{-1}(p_i)$  ,那么第  $i$  个债务人就视作是违约的. 通过这种关系的构建,  $W_i$  之间的相关关系决定了  $Y_i$  之间的相关关系. 而  $W_i$  之间潜在的相关性可以通过如下形式的因子模型来设定

$$W_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} Z_k + b_i \varepsilon_i \quad (16)$$

其中:

1)  $Z_1, \dots, Z_n$  是共同风险因子,每个因子服从标准正态分布  $N(0, 1)$  ,它们代表了宏观经济对信用组合违约风险的影响,可以是国家层面的,也可以是产业层面的;

2)  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  是和每个债务人相关的特殊风险因子,代表了每个债务人的风险成分中不能用宏观因子来解释的部分,它们是独立于上述共同风险因子  $Z_k$  的,并且服从标准正态分布  $N(0, 1)$  ;

3)  $a_{i1}, \dots, a_{in}$  是第  $i$  个债务人在共同风险因子  $Z_1, \dots, Z_n$  上的因子载荷;

$$4) b_i = \sqrt{1 - (a_{i1}^2 + \dots + a_{in}^2)} .$$

定义  $F_i(x) = P(W_i < B_i)$  为  $W$  的边际分布

函数,那么债务人  $i$  的违约概率就是  $p_i = F_i(B_i)$  . 为了得到  $W$  的多元分布情况,许多学者运用了正态 Copula 函数来联结各个债务人的边际分布函数和联合分布函数,具体如下

$$P(W_1 < B_1, \dots, W_m < B_m) = C^N(F_1(B_1), \dots, F_m(B_m)) \quad (17)$$

正态 Copula 模型的缺陷在于对于信用资产组合损失分布的尾部概率是基于多元正态 Copula 进行的,然而在两个随机变量之间的线性相关系数小于 1 的情形下正态 Copula 的尾部相依系数为零,意味着当边际违约概率比较少时,这将导致违约的示性函数是渐近独立的,这和事实上的相关违约不相吻合.

针对这个缺陷,本文基于风险因子的相依关系转换为不同资产的违约示性函数的相依关系来刻画的思想,利用参数为 Gamma 分布线性组合的 Poisson 分布来描述不同资产的违约示性函数的相依关系,建立基于混合泊松分布的信用资产组合风险度量模型.

### 2.2 混合泊松分布模型中的组合信用风险

正如上文所述,资产组合的总体违约损失分布对于 Copula 函数的选择和系数的估计是非常敏感的. 在此,引入混合泊松分布模型来描述违约过程的动态发生过程,它相较于 Copula 模型有更小的模型风险. 对于那些包含成千上万债务人的大型资产组合,由于在混合泊松模型中的违约损失分布是所有债务人单位违约情况的总体集合,每个单位的模型风险会相互抵消,所以少数几个债务人个体的违约相关特性的变化并不会对总体违约损失分布产生影响. 这个方法的另外优点如下:

1) 混合泊松分布模型更加容易用 Monte Carlo 模拟法来模拟信用风险的损失情况;

2) 混合泊松分布模型在统计拟合参数时更为方便.

这个模型并没有对违约事件发生的原因作出假设,它能产生一系列的违约事件,却不能够预测到任何一个违约的具体发生时间,也不能准确预测违约事件发生的总体个数. 对于这个包含众多债务人的资产组合来说,存在着一个违约敞口;对于任何一个债务人来说,这个违约敞口是非常小的. 混合泊松分布能很好的描述

这种情形.

在混合泊松分布模型中, 在一个时间期限内的组合损失是

$$L = c_1 Y_1 + \cdots + c_m Y_m = \sum_{i=1}^m c_i Y_i \quad (18)$$

但是违约示性函数  $Y_i$  是产生于一个符合泊松分布的变量, 而不是通过变量  $W_i$  跌到小于某个门限值计算而来, 具体如下

$$Y_i \sim \text{Poisson}(R_i) \quad (19)$$

一个强度很小的泊松随机变量有很大的概率取值为 0, 对于大于等于 1 的取值概率很小. 尽管这种设定看起来似乎允许一个债务人违约多于一次, 但是实证中模型的检验一般可以保证这种情况几乎不可能发生.

混合泊松模型中一个债务人的违约概率实际上是假设关联于一系列的共同宏观因子  $X_1, \cdots, X_d$ , 这种关联机制是通过混合泊松分布的强度参数来实现的. 给定这些宏观因子的值的情况下, 每个示性函数  $Y_i$  服从违约强度为  $R_i$  的泊松分布

$$R_i = a_{i0} + a_{i1} X_1 + \cdots + a_{id} X_d \quad (20)$$

其中  $a_{i0}, a_{i1}, \cdots, a_{id}$  代表宏观因子对泊松平均强度  $R_i$  的影响力. 因此每个  $Y_i$  都是有着随机强度参数的动态泊松变量.

由于强度很小的泊松变量在取值大于 1 的值时概率非常微小, 所以  $Y_i$  可以被用作式(18)中的示性函数. 如第一节中所述得到每个公司在每个交易日的违约概率, 这个违约概率有助于得到  $Y_i$  的泊松强度.

当  $n \geq 10, p \leq 0.1$  时, 泊松分布会近似于二项分布. 因此当  $Y_i = 1$  时, 债务人违约; 当  $Y_i = 0$  时, 债务人不违约.

由于泊松分布的密度函数为  $P(X = k) = (e^{-\lambda} \cdot \lambda^k / k!)$ , 强度参数可以用下式估计

$$P_{\text{default}} = e^{-R_i} \cdot R_i \quad (21)$$

### 3 混合泊松模型下重要抽样技术

在对大型信用资产组合违约损失分布的研究中, 直接使用 Monte Carlo 方法去估计发生概率的做法效率并不很高, 事件越稀有效率越低, 这种现象大大降低了对信用组合进行压力测试的可行性. 所以各种加速算法, 如重要抽样 (importance sampling,

IS) 技术, 得到了越来越多学者的关注, 具体的可参见文献 Glasserman 等<sup>[29,30]</sup>、Glasserman 和 Li<sup>[22]</sup>、Grundke<sup>[25]</sup>、邓洋和何旭彪<sup>[31]</sup> 以及 Müller<sup>[32]</sup>. 重要抽样技术特别适合稀有事件模拟, 因此本文也将把重要抽样技术发展到了基于混合泊松模型的信用资产组合风险度量, 通过指数扭曲和概率测度的指数变换后在相应区域产生更多的样本, 使这种新测度情形下的模拟不再是稀有事件 Monte Carlo 模拟, 从而减少 Monte Carlo 模拟的计算工作量, 同时可提高估计组合损失概率的精确性.

#### 3.1 指数扭曲

在对组合损失分布的数值模拟中, 每一次迭代都需要演算出哪个债务人违约, 并且违约后造成的损失是多少. 对于多数大资产组合来说, 违约是一种稀有事件, 很多次迭代中都不一定能出现一次, 所以普通的数值模拟的计算量是很巨大的. 因此, 通过一定的办法提高数值模拟时候的违约概率  $P(L > x)$  是提升计算效率的一种好方式. 而指数扭曲经常被应用到重要抽样技术进行稀有事件模拟(参见文献[22, 25, 29, 30]). 为了提高违约概率, 使得违约不是一种稀有事件, 本文通过概率测度变换, 用新概率测度下的违约概率  $q_i$  来替代原概率测度下的违约概率  $p_i$ . 这样在原概率测度下单个公司  $i$  的分布律为  $p_i^{Y_i} (1 - p_i)^{1 - Y_i}$ , 在原概率测度下  $m$  个公司的联合分布律为  $\prod_{i=1}^m p_i^{Y_i} (1 - p_i)^{1 - Y_i}$ . 同样, 在新概率测度下单个公司  $i$  的分布律为  $q_i^{Y_i} (1 - q_i)^{1 - Y_i}$ , 在新概率测度下  $m$  个公司的联合分布律为  $\prod_{i=1}^m q_i^{Y_i} (1 - q_i)^{1 - Y_i}$ . 因此, 在该情形下进行如下的指数扭曲变换

$$\begin{aligned} P(L > x) &= E[1\{L > x\}] = \int 1\{L > x\} f(x) dx \\ &= \int 1\{L > x\} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) dx \\ &= \tilde{E}\left[1\{L > x\} \prod_{i=1}^m \left(\frac{p_i}{q_i}\right)^{Y_i} d\left(\frac{1 - p_i}{1 - q_i}\right)^{1 - Y_i}\right] \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $1\{\cdot\}$  是括号中事件的示性函数,  $E$  表示原概率密度  $f(x)$  下的期望,  $\tilde{E}$  表示新概率密度  $g(x)$  下的期望. 重要抽样技术从新的分布函数  $g(x)$

中产生一组新的样本并且利用似然比  $f(x)/g(x)$  (likelihood ratio) 和原始的尾部概率联系了起来. 在这个指数变换之后, 计算速度显然会得到提升.

在本文中, 先假设宏观风险因子  $X_1, \dots, X_d$  是已知的, 那么  $Y_i$  就是有着违约强度为  $R_i$  的独立泊松随机变量. 在混合泊松分布模型中, 需要运用指数扭曲来提高债务人个体的违约概率, 本质上是提高泊松变量  $Y_i$  的平均强度, 可以设置如下的指数扭曲

$$p_{i\theta} = \frac{p_i e^{c_i\theta}}{1 + p_i(e^{c_i\theta} - 1)} \quad (23)$$

如果  $\theta > 0$ , 这个扭曲变换显然会提高违约概率, 一个大的违约损失  $c_i$  会使这种提升更为明显. 这种分布上的变化通过下面的似然比函数与原始分布相互联系:

对式(23)进行变换, 可得

$$\frac{p_i}{p_{i\theta}} = \frac{1 + p_i(e^{c_i\theta} - 1)}{e^{c_i\theta}} = e^{-c_i\theta} [1 + (p_i(e^{c_i\theta} - 1))] \text{ 而}$$

$$\frac{1 - p_i}{1 - p_{i\theta}} = \frac{1 - p_i}{1 - \frac{p_i e^{c_i\theta}}{1 + p_i(e^{c_i\theta} - 1)}} = [1 + p_i(e^{c_i\theta} - 1)].$$

因此当  $Y_i = 1$  时, 债务人违约; 当  $Y_i = 0$  时, 债务人不违约, 而 0-1 分布的矩母函数刚好也为  $[1 +$

$p_i(e^{c_i\theta} - 1)]$ , 这样  $\frac{p_i}{p_{i\theta}} = e^{-c_i\theta} e^{\varphi_i(\theta)}$ , 其中  $\varphi_i(\theta)$  为二项分布的随机变量  $c_i Y_i$  的条件累积量母函数;  $\frac{1 - p_i}{1 - p_{i\theta}} = e^{\varphi_i(\theta)}$  表示没有违约情形下似然比, 没有出现  $e^{-c_i\theta}$  因子, 这是因为该情形下是没有违约情形即违约损失  $c_i = 0$ . 因此,  $\left(\frac{p_i}{q_i}\right)^{Y_i}$

$\left(\frac{1 - p_i}{1 - q_i}\right)^{1 - Y_i} = e^{-c_i Y_i \theta + \varphi_i(\theta)}$ . 因此可得到下式

$$\prod_{i=1}^m \left(\frac{p_i}{q_i}\right)^{Y_i} \left(\frac{1 - p_i}{1 - q_i}\right)^{1 - Y_i} = \exp(-\theta L + \varphi(\theta)) \quad (24)$$

其中  $\varphi(\theta)$  是  $L = \sum_{i=1}^m c_i Y_i$  的条件累积量母函数.

由于当  $Y_i = 1$  时, 债务人违约, 根据泊松分布的性质有  $P\{Y_i = 1\} = R_i e^{-R_i} = p_i$ . 随机变量  $c_i Y_i$  的条件累积量母函数  $\varphi_i(\theta)$  又可表示如下

$$\varphi_i(\theta) = \ln E[e^{\theta c_i Y_i}] = \ln [1 + p_i(e^{c_i\theta} - 1)]$$

$$= \ln [1 + R_i e^{-R_i}(e^{c_i\theta} - 1)]$$

这样, 进一步可得到含泊松分布的违约强度  $R_i$  的条件累积量母函数  $\varphi(\theta)$

$$\varphi(\theta) = \ln E[e^{\theta L}]$$

$$= \sum_{i=1}^m \ln [1 + R_i e^{-R_i}(e^{c_i\theta} - 1)] \quad (25)$$

与参数  $\theta$  相关的指数扭曲改变了违约概率的分布情况, 在新的概率测度分布下, 示性函数  $Y_i$  的条件均值是  $R_i e^{c_i\theta}$ .  $\theta > 0$  的情况下, 这个均值也是被提高了, 从而模拟时产生符合条件的样本就更多, 使得该情形下的模拟不再是稀有事件模拟. 在重要抽样中, 违约损失  $L$  是通过强度参数为  $R(i, \theta)$  (表示是  $i$  和  $\theta$  的函数) 的泊松过程产生的, 由式(22)和式(24)可知,  $1\{L > x\} e^{-\theta L + \varphi(\theta)}$  是  $P\{L > x\}$  的无偏估计, 所以在重要抽样的最后一步可以通过这个联系得到最原始的损失分布情况, 但是模拟速度经过上述变换后却有了显著提升.

### 3.2 重要抽样算法

至此, 重要抽样技术还剩下对参数  $\theta$  的选择. 对此, 需要讨论重要抽样估计量的二阶矩

$$M_2(x) = M_2(x, \theta)$$

$$= E_\theta [1\{L > x\} e^{-2\theta L + 2\varphi(\theta)}] \leq e^{-2\theta x + 2\varphi(\theta)} \quad (26)$$

$M_2(x)$  表示违约概率的方差. 为了减小重要抽样技术模拟的误差, 通常使  $M_2(x)$  达到最小的  $\theta$  是最优的. 然而, 直接去寻找  $\theta$  的最优解比较困难, 但是可以通过最小化式(26)中的上界  $e^{-2\theta x + 2\varphi(\theta)}$  来达到此目的, 最优的  $\theta_x$  满足如下关系

$$\theta_x = \begin{cases} \varphi'(\theta) = x, & x > \varphi'(0) \\ 0, & x \leq \varphi'(0) \end{cases} \quad (27)$$

至此, 重要抽样技术下的模拟可以通过下述算法来实现:

根据式(27)解出最优的  $\theta_x$ . 具体算法如下:

步骤 1 计算泊松强度的条件均值  $R_i, i = 1, \dots, m$ , 如式(20)所述;

步骤 2 产生泊松变量  $Y_i \sim \text{Poisson}(R_i e^{c_i\theta_x}), i = 1, \dots, m$ ;

步骤 3 计算违约损失  $L = c_1 Y_1 + \dots + c_m Y_m$ ;

步骤 4 返回估计量  $1\{L > x\} e^{-\theta L + \varphi(\theta)}$ ;

步骤 5 返回损失分布尾部概率  $P\{L > x\}$  的估计量  $\hat{p}$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [I(L^{(j)} > x) e^{(-\theta_x L^{(j)} + \psi^{(j)}(\theta_x))}]$$

其中  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  为模拟次数;

步骤 6 返回二阶矩的估计值  $\hat{M}(x, \theta_x)$ ;

步骤 7 返回方差比的估计值  $\frac{\hat{p} - \hat{p}^2}{\hat{M}_2(x, \theta_x) - \hat{p}^2}$ .

## 4 信用资产组合风险度量实证

### 4.1 样本数据的选取

本文选取上海证券交易所的上市公司作为研究对象,以证监会的行业分类为标准从 Wind 数据库中选取了地产行业的 20 家公司,机械制造业的 25 家公司,金融业的 20 家公司,交通运输业的 20 家公司. 时间期限是 2012 年 10 月 1 日至 2013 年 9 月 31 日的 238 个交易日. 另外,这些样本股票是经过剔除筛选的,其中不包括在这期间存在停牌事件的公司. 另外,仍旧从 Wind 数据库中选取对应时期的地产指数、金融指数、基建指数和交运指数作为本模型中共同风险因子值.

### 4.2 结构模型下违约概率计算

如上文介绍结构模型时所述,上市公司是本文研究的目标样本. 在公司的股权价值  $V_E$  和它的波动率  $\sigma_E$  已经给出的情况下,可以通过结构模型中已经阐述过的关系来反求得到公司的资产价值  $V_A$  和它的波动率  $\sigma_A$ . 在本文的实证中,为了取值的方便,可以将上市公司在股票市场上的市值作为其股权价值,其股价的波动性作为波动率  $\sigma_E$ , 以及其长短期负债的账面价值来测算公司的资产价值和波动性,进而得到该公司在给定时间期限里的违约概率.

本文选取的数据是四个行业里面上市公司的市场价值  $E_t$ , 债务  $D_t$  和收盘价  $P_t$ . 考虑一年期的违约概率,公司所有的债务都假设在一年之后到期,债务的总额以所有短期负债和长期负债的 50% 的和来估计.

历史波动率  $\sigma_E$  在本文中是收盘价对数变动的标准差. 根据式 (7) 和式 (9) 得到样本股票中房地产业、金融业、制造业、交通运输业中每个公司每个时点的资产价值  $V_{A,t}$ , 如图 1 所示.

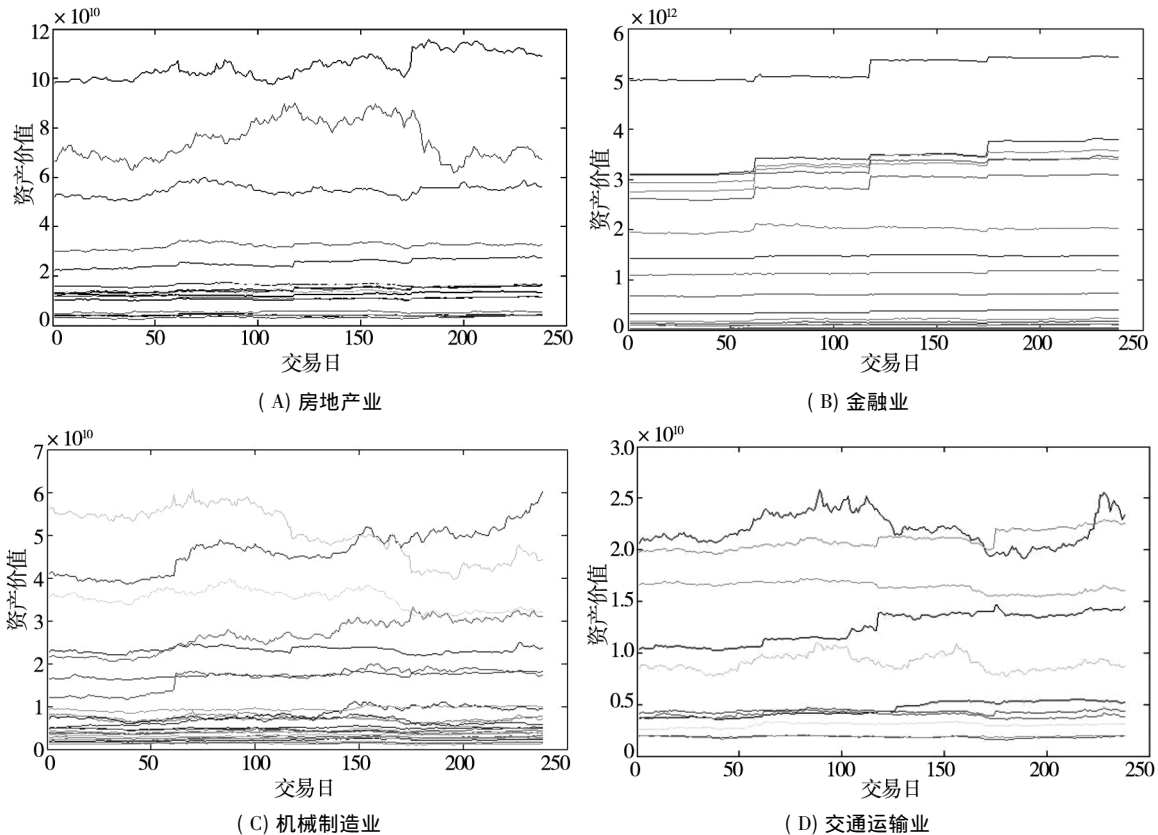


图 1 分行业公司资产价值运动轨迹

Fig. 1 The track of asset values of companies across industries



至此,资产价值  $V_{At}$  已经求得,可以根据式 (10) 求得参数  $\mu, \sigma$  的值,再将相关参数代入式 (5) 可以得到每个公司在样本采集期内的历史违约概率. 因为篇幅所限,部分结果会在表 1 中列出,分行业每个公司的动态违约概率全貌如图 2 所示.

表 1 分行业动态违约概率及泊松强度

Table 1 Dynamic default probability and poisson intensity across industries

股票代码		交易日序数						
		1	2	3	...	236	237	238
房地产业								
600048. SH	$P^*$	1.604E-03	1.297E-03	1.243E-03	...	1.604E-03	1.297E-03	1.243E-03
	$R^*$	1.607E-03	1.299E-03	1.244E-03		4.411E-03	4.656E-03	5.134E-03
600077. SH	$P$	6.251E-03	5.358E-03	4.638E-03		9.777E-03	1.230E-02	1.241E-02
	$R$	6.290E-03	5.387E-03	4.660E-03		9.874E-03	1.245E-02	1.256E-02
600162. SH	$P$	3.985E-03	3.655E-03	3.585E-03		5.782E-04	7.794E-04	9.436E-04
	$R$	4.001E-03	3.668E-03	3.598E-03		5.785E-04	7.800E-04	9.445E-04
机械制造业								
600150. SH	$P$	2.326E-02	2.148E-02	2.213E-02	...	2.326E-02	2.148E-02	2.213E-02
	$R$	2.382E-02	2.196E-02	2.264E-02		3.336E-03	5.137E-03	5.000E-03
600166. SH	$P$	1.156E-03	9.690E-04	7.421E-04		2.018E-03	2.283E-03	2.214E-03
	$R$	1.158E-03	9.700E-04	7.427E-04		2.023E-03	2.289E-03	2.219E-03
600169. SH	$P$	4.647E-04	2.570E-04	2.359E-04		1.387E-03	1.991E-03	2.138E-03
	$R$	4.649E-04	2.570E-04	2.360E-04		1.389E-03	1.995E-03	2.143E-03
金融业								
600000. SH	$P$	3.869E-02	3.784E-02	3.791E-02	...	2.539E-02	2.797E-02	2.766E-02
	$R$	3.722E-02	3.644E-02	3.650E-02		2.475E-02	2.720E-02	2.691E-02
600015. SH	$P$	2.794E-02	2.641E-02	2.650E-02		1.737E-02	1.892E-02	1.854E-02
	$R$	2.717E-02	2.572E-02	2.580E-02		1.707E-02	1.857E-02	1.820E-02
600016. SH	$P$	3.719E-02	3.659E-02	3.674E-02		2.705E-02	2.758E-02	2.761E-02
	$R$	3.583E-02	3.527E-02	3.541E-02		2.633E-02	2.683E-02	2.686E-02
交通运输业								
600368. SH	$P$	3.963E-04	3.516E-04	3.026E-04	...	6.761E-04	7.429E-04	6.347E-04
	$R$	3.965E-04	3.518E-04	3.027E-04		6.765E-04	7.435E-04	6.351E-04
600561. SH	$P$	1.311E-06	9.241E-07	8.986E-07		3.760E-10	5.379E-10	5.836E-10
	$R$	1.311E-06	9.241E-07	8.986E-07		3.760E-10	5.379E-10	5.836E-10
002682. SZ	$P$	4.167E-06	3.204E-06	2.829E-06		1.880E-05	2.316E-05	2.044E-05
	$R$	4.167E-06	3.204E-06	2.829E-06		1.880E-05	2.316E-05	2.044E-05

注:  $P$  代表单个债务人的违约概率;  $R$  代表对泊松强度的估计.

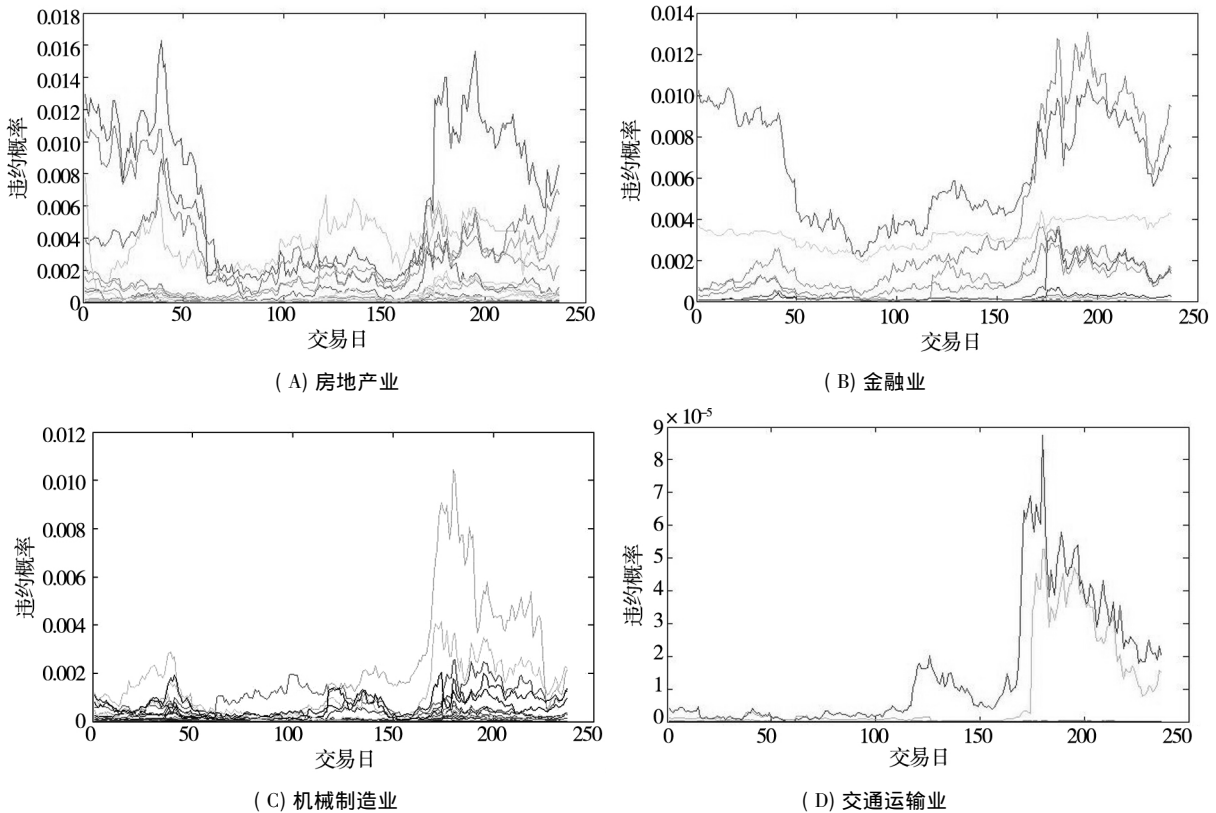


图 2 四个行业里公司的动态违约概率

Fig. 2 Dynamic default probability for companies in four industries

从图 2 观察可知,图(A)和图(B)在形态上比较相似,图(C)和图(D)在形态上比较相似.事实上,金融业和房地产业在股票市场上具有很高的联动性,同属权重股,经常出现同涨同跌的情况;对于机械制造业和交通运输业,他们在实体经济中的联系就更为紧密了,很多业务都具有承接性的特征,因此在行业的总体违约概率形态上,他们也有着很大的相似性.图 2 中尽管每张图之间的形态不尽相同,但是每个行业里各个公司之间的动态违约概率形态趋向一致,这也证实了本文在混合泊松模型中的设定,即债务人的违约风险是受到一系列的共同风险因子驱动的,个体之间的区别通过公共因子的不同因子载荷来体现.

### 4.3 混合泊松模型的建立

在混合泊松模型中,变量  $Y_i$  是服从泊松分布的.一个强度很小的泊松变量取到大于 1 的值的概率是非常小的,也就是说强度很小的泊松变量大部分为 0,小部分为 1.这个特性可以被运用为违约示性函数,即对应于式(18)中的违约示性函

数  $Y_i$ .如果假设行业资产组合满足混合泊松模型所设定的风险发生机制,那么可以通过在上一节中已经得到的每个时点各个公司的违约概率来求出每个示性变量  $Y_i$  的泊松强度.

当  $n \geq 10, p \leq 0.1$  时,泊松分布通常看做是和二项分布近似的,所以一个债务人违约与  $Y_i = 1$  是等价的.由于泊松分布的概率密度函数为  $P(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ ,混合泊松模型中决定违约事件发生频次的强度  $R_i$  可以由式(21)  $P_{default} = e^{-R_i} \cdot R_i$  估计出.得到的每个公司的违约概率和动态泊松强度的结果如表 1 所示(因篇幅所限只有部分结果列出).

前文已提到,混合泊松模型假定泊松强度的大小是受到几个共同风险因子一起动态驱动的.本文选择了地产指数,基建指数,金融指数和交通指数作为模型的共同风险因子.利用式(22),测算出合适的风险因子载荷系数  $a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{i4}$  来为未来的大资产风险管理服务.

如果直接把这四个宏观指数放入式(20)中

进行回归测算, 载荷系数的估计会被不同指数的量纲所影响. 因此, 在进行回归测算前必须进行标准化处理. 在此, 应用 min - max 标准化

$$NX_j = (X_j - \min(X)) / (\max(X) - \min(X)) \quad (28)$$

其中  $X_j$  是初始的共同因子,  $NX_j$  是标准化之后的共

同因子. 强度等式可变成如下形式

$$R_i = a_{i0} + a_{i1}NX_1 + a_{i2}NX_2 + a_{i3}NX_3 + a_{i4}NX_4 \quad (29)$$

根据式 (29) 进行回归测算, 可以得到每个公司的因子载荷系数, 如表 2 所示 (和上文相同, 只以部分结果列示).

表 2 混合泊松模型中的因子载荷系数

Table 2 Factor loading coefficients in mixed Poisson model

股票代码	共同因子				特殊因子
	$a_{i1}$ (地产)	$a_{i2}$ (机械制造)	$a_{i3}$ (金融)	$a_{i4}$ (交通运输)	$a_{i0}$
地产业					
600048. SH	-4.458E-04*	-8.581E-04	6.340E-03	-7.575E-03	3.561E-03
600077. SH	-1.603E-04*	-4.556E-04	3.581E-04	-3.392E-04	4.781E-04
600162. SH	-1.918E-04*	-8.177E-05	-1.777E-04	-3.850E-05	3.830E-04
机械制造业					
600150. SH	2.628E-07	-2.906E-07*	-3.718E-07	-6.642E-07	8.545E-07
600166. SH	1.366E-04	-1.690E-03*	2.321E-03	-3.978E-03	3.000E-03
600169. SH	-2.379E-03	-8.370E-05*	1.279E-02	-1.490E-02	5.141E-03
金融业					
600000. SH	-4.863E-03	8.413E-03	-1.458E-02*	-1.724E-02	4.324E-02
600015. SH	-2.566E-03	1.244E-04	-1.127E-02*	-8.661E-03	2.856E-02
600016. SH	4.791E-03	-6.876E-03	-1.751E-02*	4.394E-03	3.474E-02
交通运输业					
600368. SH	1.991E-04	2.824E-04	-2.127E-03	-1.099E-03*	9.138E-04
600561. SH	1.409E-07	-1.304E-06	2.854E-06	-2.057E-06*	5.590E-07
002682. SZ	-1.163E-05	-1.647E-05	-1.112E-04	-1.066E-04*	3.829E-05

表 2 中, 因子载荷系数为负表示随着相应的行业指标的值的上升, 该公司的违约强度会下降; 若因子载荷系数为正, 那么说明随着相应的行业指标的上升, 该公司的违约强度也会随着上升.

身处某个特定行业的公司, 比如房地产的公司在地产指数上的因子载荷都是负的, 表明随着地产指数的上升, 该公司的违约强度会下降. 其他三个行业里的公司也都符合上述这个现象. 表 2 只列出了部分结果, 在所有样本结果里面, 也只是个别股票会出现异常. 本文回归测算得到的这种现象与实际

金融市场上的情况是非常一致的.

表 3 给出了每个样本公司因子载荷回归测算时可决系数的情况, 回归效果总体较好, 地产和金融的回归测算尤为有效, 他们可决系数大于 50% 的样本股比例分别达到了 90% 和 80%, 这个现象是有一定现实依据的. 地产和金融是上交所里的权重股, 他们的走势反映在行业指数里面, 同时也能够影响其他的行业指数, 所以以行业指数作为自变量做回归测算时他们两个行业的可决系数势必比别的行业高.

表 3 回归测算可决系数情况  
Table 3 Measurement coefficients of regressions

行业	样本公司数	$R^2 > 50\%$		$R^2 > 60\%$		$R^2 > 70\%$	
		个数	比例(%)	个数	比例(%)	个数	比例(%)
地产业	20	16	80	12	60	8	40
金融业	20	18	90	14	70	10	55
机械制造业	25	18	72	14	56	9	36
交通运输业	20	15	75	11	55	7	35

4.4 混合泊松模型下的信用风险度量

由历史数据测算得到的因子载荷系数结合公共宏观因子就能得到示性函数  $Y_i$  的泊松强度. 根据这个强度每个公司每个时刻都能产生一个泊松变量来表示是否违约. 一个资产组合里的所有公司的情况综合起来就能够如式(18)得到组合的违约损失情况. 公共宏观因子的值可以是根据过去对未来一段时间的合理预测. 本文为了说明方便, 仍旧选用 2012 年 10 月 1 日至 2013 年 9 月 31 日的宏观因子数据作为混合泊松模型的输入变量, 以此来对那段时期的信用资产组合做一个整体的风险测算.

由于式(18)中违约回收率的数据非常稀少, 这表明在违约事件发生的时候违约风险敞口就是违约损失. 下面把每个行业的样本股当做一个资产组合, 用以下的步骤来进行违约损失分布的测算:

- 1) 把相应的宏观因子  $X_j$  的值引入到模型里;
- 2) 根据式(29) 计算泊松强度  $R_i, i = 1, 2, \dots, m$ ;
- 3) 产生违约示性函数  $Y_i \sim Poisson(R_i)$ ;
- 4) 根据式(18).

每个行业资产组合的损失分布情况如图 3 所示. 图 3 中的每个点都是通过 10 000 次的重复运算得到的. 在给定一个损失阈值的时候, 10 000 次

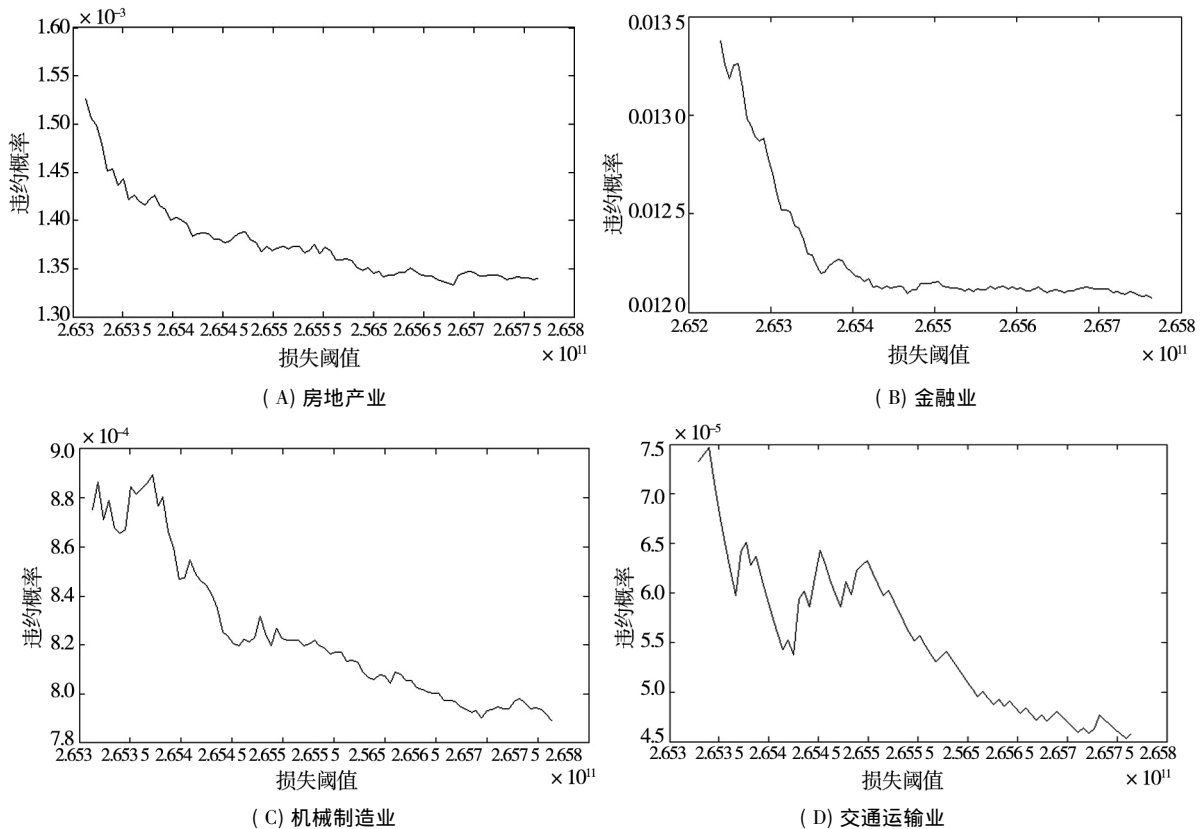


图 3 各个行业资产组合损失分布情况

Fig. 3 Loss distribution of asset portfolios across industries

运算中有多少次资产组合的损失超过了该阈值,若超过定义为违约,将违约的次数除以 10 000 就能得到相应的违约概率. 在表 4 中额外列示了几个特别的违约损失比,以及其对应的违约概率和其标准差(交通运输业由于特别低的违约率没有列出). 从图 3 观察可以发现每个行业资产组合的违约概率随着损失阈值的上升而下降. 金融业资产组合的违约概率是最大的,这也是符合现实情况的,多数金融机构比如银行,通常是高杠杆高

负债的. 进一步地,表 4 中列示了当损失分别达到 0.05%、0.09%、0.13%、0.23% 和 0.50% 时各个资产组合的违约概率及其标准差. 地产业和金融业两个资产组合里的标准差全部比违约概率小一个数量级,表明这两个资产组合的风险测算结果属于相对稳定的,而制造业的结果波动较大,但总体仍然可以接受. 这一节很好的说明了混合泊松模型在信用资产组合风险管理领域是具备实用性及有效性的.

表 4 特定损失比下的违约概率及其标准差

Table 4 Default probability and its standard deviation under specific loss ratio

资产组合		损失比 (%)				
		0.05%	0.09%	0.13%	0.23%	0.50%
地产业	$P^*$	0.153%	0.141%	0.133%	0.120%	1.163E-004
	$Std.^*$	3.5E-004	3.1E-004	2.3E-004	1.7E-004	1.05E-005
金融业	$P$	1.32%	1.28%	1.21%	0.71%	0.14%
	$Std.$	6.81E-003	6.77E-003	5.47E-003	7.6E-004	2.21E-005
机械制造业	$P$	8.73E-004	8.69E-004	8.04E-004	6.27E-004	3.245E-005
	$Std.$	2.17E-004	3.16E-004	2.81E-004	2.11E-004	6.22E-006

注:  $P$  代表每个行业资产组合的违约概率;  $Std.$  代表这个违约概率的标准差.

#### 4.5 重要抽样技术下的信用组合风险度量

为了克服极小概率事件发生概率估计的困难,可以把重要抽样技术发展到了信用资产组合违约损失分布中,通过指数扭曲和测度变换在相应区域产生更多的样本,可以使这种新测度情形下的模拟不再是稀有事件 Monte Carlo 模拟. 通过这种变换,可以减少 Monte Carlo 模拟的计算工作量,也提高估计组合损失概率的精确性.

由于在本文实证中采用的数据里样本股票数相对较少,而且历史的宏观共同因子也不充足,因此在这一节通过一个数值模拟的例子来说明重要抽样算法的有效性. 在这个数值模拟中介绍算法时出现过的伽马变量用来替代宏观共同因子的值. 然后,建立一个包含  $m = 1\ 000$  个债务人的信用组合来研究损失阈值  $ml$  与违约概率  $P(L > ml)$  之间的关系. 模拟的其他设定如下:

1) 违约风险敞口:  $c_i = 0.02 + 0.004\ 98$ , 从 0.02 线性增长到 5.

2) 共同宏观因子:  $X_j \sim Gamma(\alpha_j, \beta_j)$ ,  $\alpha_j = 1/6$ ,  $\beta_j = 6$ , 使得  $X_j$  均值为 1 方差为 6(注意: 在 Credit Suisse<sup>[31]</sup> 提出的基于混合泊松分布的 CreditRisk<sup>+</sup> 信用风险度量模型,应用多个 Gam-

ma 分布的和来刻画泊松分布的违约强度,即应用 Gamma 分布来刻画共同宏观因子. 因此,在研究中也使用 Gamma 分布来模拟生成共同宏观因子).

#### 3) 载荷系数

$$a_{i0} = 0.02, \mu_{ij} = 0.002, j = 1, 2, \dots, d$$

#### 4) 宏观因子的个数: $d = 5$

接下来,首先在重要抽样技术下进行 3 000 次重复测算来得到违约损失分部的数值模拟,同时在普通蒙特卡洛模拟下进行 10 000 次重复测算来进行对比. 结果如图 4 所示:

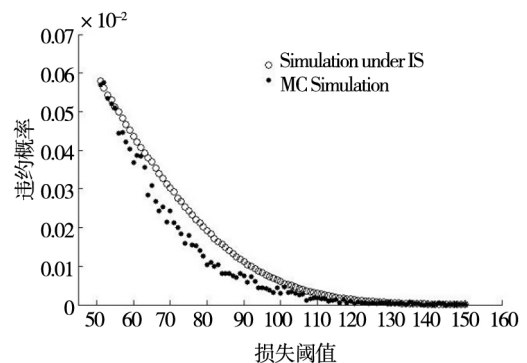


图 4 两种模拟方法的对比

Fig. 4 Comparison of two simulation methods

从图 4 的数值模拟来看,首先普通 Monte Carlo 模拟需要更多重复测算次数才能达到一个相对稳定的结果.而且,重要抽样下模拟出来的违约损失分布曲线更为平滑,因此重要抽样技术对于信用风险管理领域是非常有现实意义的,在提升效率的同时也能增加准确性.除了从上图直观的观察,还可以通过计算重要抽样的方差比来说明重要抽样技术的模拟效率:方差比越大,说明方差减少的越多,算法越有效,见表 5.

表 5 基于重要抽样技术的损失分布的尾部概率和方差比  
Table 5 Tail probability and variance ratio of loss distribution based on important sampling

$l$	$P(L > ml)$	方差比
0.065	5.28%	14.83
0.081	3.62%	25.87
0.105	2.45%	60.59
0.125	1.20%	96.55
0.145	0.49%	190.42

表 5 的方差比的结果在两位数或三位数,说明方差减少在一个数量级或两个数量级,意味着采用基于违约强度为混合泊松分布的重要抽样技术进行 Monte Carlo 模拟大大减少所要估计量的方差,相应地大大提高了模拟的精度.

另外,从表 5 中可以看出,随着损失概率的减

少,方差比对应地增大,说明损失概率越小基于重要抽样技术的算法越有效,这是因为损失概率越小,相应的信用资产组合损失值也越大,由式(26)可知,这时的重要抽样下的二阶矩  $M_2(x, \theta)$  就越小,因此由方差比定义知,方差比此时就越大,即方差减少的就越多,从而说明该算法就比普通 Monte Carlo 的更有效.

## 5 结束语

本文基于信用风险因子的相依关系转换为不同资产的违约示性函数的相依关系来刻画的思想,利用参数为 Gamma 分布线性组合的 Poisson 分布来描述不同资产的违约示性函数的相依关系,建立基于混合泊松分布的信用资产组合多因子的风险度量模型.进一步地,针对目前国内外对信用组合风险度量大多数集中在数值计算上,而本文结合中国金融市场四个产业的数据把混合泊松分布应用到实证研究中,在此实证研究方面做了突破.

组合风险计算的复杂性方面,相比普通 Monte Carlo,重要抽样下模拟出来的组合损失分布曲线更为平滑,因此重要抽样技术对于信用风险管理领域是非常有现实意义的,在提升效率的同时也能增加准确性.

## 参考文献:

- [1] Cont R. *Frontiers in Quantitative Finance: Credit Risk and Volatility Modeling* [M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2012.
- [2] Chan N H, Wong H Y, Zhao J. Structural model of credit migration [J]. *Computational Statistics & Data Analysis*, 2012, 56(11): 3477–3490.
- [3] Schäfer R, Koivusalo A F R. Dependence of defaults and recoveries in structural credit risk models [J]. *Economic Modelling*, 2013, 30: 1–9.
- [4] Su X N, Wang W S. Pricing options with credit risk in a reduced form model [J]. *Journal of the Korean Statistical Society*, 2012, 41(4): 437–444.
- [5] 陈荣达,王泽,李泽西,等.厚尾分布情形下的信用资产组合风险度量 [J]. *管理科学学报*, 2017, 20(3): 46–55.  
Chen Rongda, Wang Ze, Li Zexi, et al. Risk measurement for portfolio credit risk with risk factors with heavy-tailed distribution [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2017, 20(3): 46–55. (in Chinese)
- [6] 耿志祥,费为银.金融资产风险度量及其在风险投资中的应用—基于稳定分布的新视角 [J]. *管理科学学报*, 2016, 19(1): 87–101.  
Geng Zhixiang, Fei Wei Yin. Risk measures of financial assets and its application in risk investment: From the new perspective of stable distribution [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2016, 19(1): 87–101. (in Chinese)

- [7] Gordy M B. A comparative anatomy of credit risk models [J]. *Journal of Banking & Finance*, 2000, 24(1): 119 – 149.
- [8] Dimakos X K, Aas K. Integrated risk modeling [J]. *Statistical Modelling*, 2004, 4(4): 265 – 277.
- [9] Kole E, Koedijk K, Verbeek M. Selecting copulas for risk management [J]. *Journal of Banking & Finance*, 2007, 31(8): 2405 – 2423.
- [10] Scheuenstuhl G, Zagst R. Integrated portfolio management with options [J]. *European Journal Operational Research*, 2008, 185(2): 1477 – 1500.
- [11] Broda S A. The expected shortfall of quadratic portfolios with heavy-tailed risk factors [J]. *Mathematical Finance*, 2012, 22(4): 710 – 728.
- [12] Grundke P, Polle S. Crisis and risk dependencies [J]. *European Journal Operational Research*, 2013, 223(1): 518 – 528.
- [13] Rosenberg J V, Schuermann T. A general approach to integrated risk management with skewed, fat-tailed risks [J]. *Journal of Financial Economics*, 2006, 79(3): 569 – 614.
- [14] Liang C H, Zhu X Q, Sun X L, et al. Integrating credit and market risk: A factor copula based method [J]. *Procedia Computer Science*, 2013, 17: 656 – 663.
- [15] Bernard C, Rüschendorf L, Vanduffel S, et al. How robust is the value-at-risk of credit risk portfolios? [J]. *European Journal of Finance*, 2017, 23(6): 507 – 534.
- [16] He X B, Gong P. Measuring the coupled risks: A copula-based CVaR model [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, 223(2): 1066 – 1080.
- [17] Glasserman P, Li J Y. Importance Sampling for a Mixed Poisson Model of Portfolio Credit Risk [C]. *Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference, New Orleans, LA, USA, 2003*, 267 – 275.
- [18] Credit Suisse Financial Boston. CreditRisk<sup>+</sup>: A CreditRisk Management Framework [R]. London: Technical Document, <http://www.defaultrisk.com>, 1997.
- [19] Han C. Modeling severity risk under PD-LGD correlation [J]. *European Journal of Finance*, 2017, 23(15): 1572 – 1588.
- [20] Merino S, Nyfeler M. Calculating portfolio loss [J]. *Journal of Risk*, 2002, 15(8): 82 – 86.
- [21] Grundke P. Computational aspects of integrated market and credit portfolio models [J]. *Operations Research-Spektrum*, 2007, 29(2): 259 – 294.
- [22] Glasserman P, Li J Y. Importance sampling for portfolio credit risk [J]. *Management Science*, 2005, 51(11): 1643 – 1656.
- [23] Glasserman P, Kang W, Shahabuddin P. Fast simulation of multifactor portfolio credit risk [J]. *Operational Research*, 2008, 56(5): 1200 – 1217.
- [24] Glasserman P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering* [M]. New York: Springer, 2004.
- [25] Grundke P. Importance sampling for integrated market and credit portfolio models [J]. *European Journal Operational Research*, 2009, 194(1): 206 – 226.
- [26] Sak H, Hörmann W. Fast simulation in credit risk [J]. *Quantitative Finance*, 2012, 12(10): 1557 – 1569.
- [27] Jarrow R A. Credit market equilibrium theory and evidence: Revisiting the structural versus reduced form credit risk model debate [J]. *Finance Research Letters*, 2011, 8(1): 2 – 7.
- [28] Vassalou M, Xing Y H. Default risk in equity returns [J]. *Journal of Finance*, 2004, 59(2): 831 – 868.
- [29] Glasserman P, Heidelberger P, Shahabuddin P. Variance reduction techniques for estimating value-at-risk [J]. *Management Science*, 2000, 46(10): 1349 – 1364.
- [30] Glasserman P, Heidelberger P, Shahabuddin P. Portfolio value-at-risk with heavy-tailed risk factors [J]. *Mathematical Finance*, 2002, 12(3): 239 – 269.
- [31] 邓 洋, 何旭彪. 基于条件蒙特卡罗方法的信用违约互换合约定价 [J]. *系统工程理论与实践*, 2017, 37(8): 2043 – 2051.
- Deng Yang, He Xubiao. Pricing credit default swap based on conditional Monte Carlo method [J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2017, 37(8): 2043 – 2051. (in Chinese)

- [32] Müller A. Improved variance reduced Monte-Carlo simulation of in-the-money options [J]. *Journal of Mathematical Finance*, 2016, 6(3): 361–367.
- [33] Credit Suisse. *CreditRisk<sup>+</sup>: A CreditRisk Management Framework* [R]. London: Credit Suisse Financial Products, 1997.

## Portfolio credit risk measurement based on mixed Poisson default intensity

CHEN Rong-da<sup>1,2</sup>, YU Huan-huan<sup>1</sup>, YU Le-an<sup>3</sup>, LI Ze-xi<sup>1</sup>, JIN Cheng-lu<sup>1</sup>, LIN Bo<sup>1</sup>

1. School of Finance, Zhejiang University of Finance and Economics, Hangzhou 310018, China;
2. Coordinated Innovation Center of Wealth Management and Quantitative Investment of Zhejiang University of Finance and Economics, Hangzhou 310018, China;
3. School of Economics and Management, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China

**Abstract:** This paper uses the Poisson distribution with a linear combination of Gamma distributions to capture the dependence among the default indicators of different assets, and then proposes a multi-factor risk model for portfolios credit risk based on mixed Poisson default intensity. Our model is based on the idea that dependence among common risk factors can be transformed into the dependency among the default indicators of different assets, which broadens and enriches portfolio credit risk measurement models. By introducing important sampling techniques to the model for effective numerical simulation, this paper empirically examines the portfolio credit risk in four industries of China's financial markets. More specifically, the classic structural model and option pricing formula are firstly used to estimate the dynamic default probability of an obligor; the dynamic Poisson strength of each asset under the mixed Poisson model is secondly obtained by using the dynamic default probability of a single asset; then, the factor loading coefficients of common risk factors are estimated, to reflect the degree of dependence among different assets; finally, the important sampling method is applied into the mixed Poisson model, in order to implement the efficient Monte Carlo simulation for the loss distribution of the credit portfolio composed across different industries. The simulation results show that our algorithm is more efficient than the ordinary Monte Carlo simulation and can greatly reduce the variance of the estimated loss probability.

**Key words:** portfolio credit risk; mixed Poisson model; structure model; Monte Carlo simulation; important sampling techniques