

基于实物期权的 PPP 项目最优资本结构研究^①

王 兵, 张水波, 王秀芹*, 韩雷杰

(天津大学管理与经济学部, 天津 300072)

摘要: 通过构建实物期权模型, 分别研究了 PPP 协议允许资本结构调整和不允许资本结构调整情况下私人部门的最优资本结构, 并进一步对比了两种情况下 PPP 项目最优资本结构的差异以及私人部门实现本结构调整期权的边界条件. 研究表明: (1) 项目的最优债务量与贷款利率之间呈现一种倒 U 型关系; (2) 在允许和不允许资本结构调整两种情况下, 项目的最优资本结构安排不同, 具体表现为: 允许资本结构调整时, 项目的期初债务水平应低于不允许资本结构调整时项目的债务水平, 并在资本结构调整时增加项目的债务水平; (3) 私人部门实现资本结构调整期权的边界成本随项目现金流波动率的增加而减小, 随项目收益增长率的增加而增加. 本研究结果可为私人部门安排 PPP 项目债务资金方案提供依据.

关键词: PPP 项目; 资本结构; 实物期权; 贷款利率

中图分类号: F830 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2019)06-0073-13

0 引 言

为了缓解地方政府的债务压力, 我国政府从 2014 年开始大力促进 PPP 模式在基础设施建设领域中的应用^[1,2,3]. 在 PPP 模式下, 项目的融资、设计、施工和运营主要由私人部门来负责. 在项目建成后, 私人部门通过长达 10 年~30 年的特许期运营回收投资并获取一定的利润. 特许期结束以后, 私人部门需按要求将项目移交给相应的政府部门. PPP 项目的前期融资由私人部门负责, 政府部门一般不会直接干预 PPP 项目的资本结构, 但往往会规定 PPP 项目的最低股本资金比例^[4,5]. 在最低股本资金比例限制下, 项目具体的资本结构还是由私人部门来决定. 因此, 本文从私人部门的角度对 PPP 项目的最优资本结构进行研究.

PPP 项目的最优资本结构体现为最优股债比, 如何确定项目的最优债务量一直是实业界和学术界关心的问题. 对于私人部门投资者而言, 债务资金可

以带来税盾收益, 提高项目的股本收益率; 但另一方面, 债务资金也会带来债务风险, 当项目无法按时偿还债务时, 将导致破产^[6]. 最优资本结构应该使项目债务风险可控情况下的项目收益最大. 另外, 项目的贷款条件(包括贷款量和贷款利率)往往是根据项目未来的收益确定的. 然而, PPP 项目在较长的运营期(10 年~30 年)中存在很大的不确定性, 这使得项目的收益无法被准确的预测. 为了应对这些不确定性, PPP 协议通常会有再融资条款, 允许投资人在一定条件下调整项目的资本结构. 对私人部门而言, 在什么条件下进行再融资以及如何再融资以保证资本结构最优是亟需解决的现实问题.

部分国内外的学者已经对 PPP 项目的最优资本结构进行了研究. 胡一石等通过专家访谈和问卷调查对影响 PPP 项目资本结构的因素进行了识别和分析^[7]. 刘婷等通过总结归纳 18 个典型 PPP 项目的资本结构发现, PPP 项目应该结合项目情况综合利用各种资金来降低融资成本^[8].

① 收稿日期: 2017-12-15; 修订日期: 2018-12-15.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71202083; 71572124).

通讯作者: 王秀芹(1972—), 女, 山东即墨人, 博士, 副教授, 硕士生导师, Email: wangxiuqin@tju.edu.cn

Zhang 将私有化基础设施项目的资本结构定义为四个维度,即融资工具的类型、使用不同融资工具的相对数量、融资的渠道以及相应的融资条款,并通过对这四个维度进行量化构建了 PPP 项目资本结构优化框架^[9]. 然而,由于以上模型无法将内部收益率(IRR)和债务覆盖率(DSCR)等财务指标在维度上进行统一,所以无法得出使各方利益都达到最优的资本结构. 为了解决这个问题, Yun 等运用效用函数将内部收益率和债务覆盖率两个具有不同维度的财务指标统一于一个综合值上,然后通过专家访谈和模拟测试并结合蒙特卡罗模拟技术,构建了一个同时满足债权人和经营者要求的最优资本结构模型^[10]. Du 等进一步考虑了财务风险因素和政府部门对最低股本资金和债务资金比例的要求,通过蒙特卡罗模拟计算出了能够减少 PPP 地铁项目财务风险的最优资本结构^[5]. 为了更加接近现实, Donkor 等考虑了不同时期项目债务覆盖率不同的特点,通过添加多阶段机会约束(chance-constraints)构建了一个随机优化模型,并通过基于公式和电子表格的仿真模拟求解出 PPP 项目最优资本结构^[11]. Chen 等通过分析项目公司和银行之间的博弈,研究了发电站项目的最优资本结构,发现项目公司的博弈力越大,项目的最优债务水平越高^[12]. Wang 等分析了在同时满足政府部门和私人部门利益要求的前提下,PPP 项目中的承建商和运营商之间的最优出资比例^[13]. Bayat 等进一步通过构建博弈模型分析了可以满足政府、项目发起人和银行三方利益要求的 PPP 项目最优资本结构^[14].

以上关于最优资本结构的研究多基于 NPV 方法,假定项目未来现金流是稳定的,不能很好地反映未来收益不确定对最优资本结构的影响;另外,现有研究并不考虑 PPP 项目再融资. PPP 项目的融资多采用项目融资(project finance)模式,贷款期限可能长达 15 年~30 年. 这期间,项目的风险状况和金融市场会发生变化,PPP 协议往往允许私人部门在有利条件下进行再融资,因此再融资情况下的最优资本结构有待进一步研究.

PPP 协议允许私人部门在特许期内调整资本结构,可以看作是私人部门的一种实物期权. 本文尝试采用实物期权法方法对 PPP 项目的最优资

本结构作进一步研究. 尽管实物期权法已被广泛用于研究公司投资决策问题^[15,16,17],但是尚未发现用实物期权法对 PPP 项目资本结构进行研究的文献. 不过,一些学者对公司的最优资本结构及其动态调整进行的研究,可为本文提供借鉴. Dixit 等使用实物期权理论分析了在不确定性的投资环境下,公司如何选择最优的投资时机和资本结构^[15]. 在此基础上,Goldstein 等进一步运用实物期权理论分析了公司如何动态调整其资本结构,并给出这类问题的分析框架^[18]. Strebulaev 研究了在一定的政策要求条件下,公司如何调整其最优资本结构^[19]. Sundaresan 等分析了公司在未来有多次投资机会时,公司应该如何动态的调整其资本结构^[20]. 另外一些学者在这些研究的基础上进一步考虑了一些其它因素,对公司的最优动态资本结构调整进行了研究. Hugonnier 等研究了信用市场摩擦(credit market frictions)对公司最优资本结构动态调整的影响^[21]. Tian 研究了企业家在具有不一致的时间偏好(time-inconsistent)时,公司如何动态的调整其最优资本结构^[22]. Bigler 研究了公司能力的动态变化(dynamic capabilities strategy)对其最优资本结构的影响^[23]. 但是这些研究没有分析利率变化对公司资本结构的影响,而是单纯从权衡(trade-off)的角度通过分析债务资金带来的税盾收益和其可能造成的违约损失来确定公司的最优资本结构. 对于 PPP 项目而言,由于其融资合同长达 10 年到 15 年,甚至能达到 30 年,在这么长的贷款时间内,贷款利率可能发生很大的变化从而影响项目的融资成本,因此需要进一步分析贷款利率的变化对 PPP 项目最优资本结构的影响.

综上,本文将使用实物期权方法对比分析允许允许资本结构调整和不允许资本结构调整两种情况下 PPP 项目最优资本结构的差异,以及两种情况下项目的最优资本结构与贷款利率之间的关系,并且给出在允许资本结构调整情况下,项目的再融资条件以及再融资前后项目的最优资本结构. 本文还进一步分析了私人部门实现资本结构调整期权的边界条件,以及实现资本结构调整期权的边界成本与项目现金流波动率和收益增长率的关系.

1 基本假设

假设 PPP 项目未来的现金流 X 服从几何布朗运动, 即 $dX = \mu X dt + \sigma X dZ$, 其中 μ 表示项目的期望收益增长率, 满足关系 $\mu < r$, r 表示无风险收益率; σ 表示项目收益的波动率, Z 表示 Wiener 过程. 假设项目单位时间内的运营成本为 f , 政府对项目收益征收的税率为 τ . 私人部门参与 PPP 项目的目的是获取收益, 一旦项目的收益无法满足私人部门的收益要求, 私人部门就会放弃项目. 假设在不允许资本结构调整的情况下, 私人部门放弃项目的现金流的边界值为 X_a^1 , 项目的债务水平为 C_a^1 , 贷款利率为 r_a^1 . 在允许资本结构调整的情况下, 使私人部门调整项目资本结构的项目现金流的边界值为 X_b . 假设项目的初始债务水平为 C_a^1 , 贷款利率为 r_a^1 ; 在调整项目的资本结构后, 项目的债务水平为 C_a^2 , 贷款利率为 r_a^2 , 项目

的贷款利息可以用于抵扣项目所得税. 由于对项目资本结构调整时, 项目的现金流比初始预测的好, 此时私人部门可以获得更好的融资条件, 所以假设 $r_a^2 < r_a^1$. 私人部门放弃项目后, 项目被移交给债权人, 在移交的过程中由于技术专用性等原因, 项目的价值会有损失, 假设该项目价值损失为 αX_a^i , $i = 1, 2$, 其中 α 反映了项目的价值损失程度, 也体现了项目的技术专用性程度, 项目的技术专用性程度越高, α 的值就越大. 私人部门一旦放弃项目就会失去项目的收益权, 同时也会失去债务的税盾收益, 本文将这些收益损失定义为私人部门放弃项目的成本. 此外, 假设项目的价值为 $V(X)$, 表示投资 PPP 项目可以获得的总体项目收益; 私人部门的股权价值为 $E(X)$, 表示私人部门通过股本资金投资 PPP 项目可以获得的回报. 表 1 对这些变量的解释进行了梳理. 假设项目所处的资本市场是完全的, 即不存在套利机会.

表 1 名词解释

Table 1 Notations

I	实现资本结构调整期权的边界成本
μ	项目收益增长率
σ	项目现金流的波动率
Z	满足几何布朗运动
r	无风险利率
f	项目在单位时间内的运营成本
τ	政府征收的项目所得税税率
X_a^1	使得私人部门放弃项目的现金流临界值
C_a^1	在不允许资本结构调整时, 项目的债务资金量
r_a^1	初始阶段项目的贷款利率
C_a^{1*}	在不允许资本结构调整时, 项目的最优债务资金量
X_b	允许资本结构调整时, 使得私人部门调整项目资本结构的现金流临界值
\bar{C}_a^1	允许资本结构调整时, 初始阶段项目的最优债务量
C_a^2	资本结构调整后, 项目的债务资金量
r_a^2	资本结构调整后, 项目债务资金的贷款利率
C_a^{2*}	资本结构调整以后, 项目的最优债务资金量
α	私人部门放弃项目后, 项目价值损失的比例
$V(X)$	项目的价值
$E(X)$	私人部门的股权价值

2 不允许调整情况下项目的最优资本结构

在运营期内,PPP 项目的运营成本为 f , 项目的贷款的利息成本为 $r_a^1 C_a^1$, 所以项目需要缴纳的所得税的金额为 $\tau(X - f - r_a^1 C_a^1)$, 项目的税后净收益为 $(1 - \tau)(X - f) - (1 + (1 - \tau)r_a^1)C_a^1$. 项目的股权价值 $E(X)$ 满足以下 Bellman 方程

$$rE(X)dt = [(1 - \tau)(X - f) - (1 + (1 - \tau)r_a^1)C_a^1]dt + E(dE(X)) \quad (1)$$

其中式(1)左边表示私人部门在无风险情况下的期望项目股权收益, 等式右侧表示私人部门通过运营项目可以获得的期望股权收益. 由于市场中不存在套利机会, 所以等式两侧的值相等. 进一步根据尹藤引理, 式(1)可进一步转化为如下微分方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 E(X)}{\partial X^2} + \mu X \frac{\partial E(X)}{\partial X} - rE(X) + (1 - \tau)(X - f) - (1 + (1 - \tau)r_a^1)C_a^1 = 0 \quad (2)$$

求解该微分方程得

$$E(X) = \frac{1 - \tau}{r - \mu} X - \frac{(1 - \tau)f - (1 + (1 - \tau)r_a^1)C_a^1}{r} + A_1 X^{\beta_1} + A_2 X^{\beta_2} \quad (3)$$

其中 β_1 和 β_2 是二次方程 $\frac{\sigma^2}{2}(x^2 - x) + \mu x - r = 0$ 的

两个根, 并且满足 $\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} >$

0 , $\beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} < 0$; A_1 和 A_2

为待求解的常数. 在不考虑项目的违约风险时, 项目的期望股权价值 ($E_1(X)$) 等于项目的期望收益减去项目的期望运营成本, 再减去项目的期望债务成本, 即

$$E_1(X) = \frac{1 - \tau}{r - \mu} X - \frac{(1 - \tau)f + (1 + (1 - \tau)r_a^1)C_a^1}{r} \quad (4)$$

在考虑项目的违约风险时, 项目的期望股权价值 $E_1(X)$ 需要满足以下条件

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} E(X) = E_1(X) \quad (5)$$

条件(5)表明, 当项目的现金流相当大时, 项

目的违约可能性为 0, 即可以忽略项目的违约风险. 由此可以推出 $A_1 = 0$. 另外, 一旦私人部门放弃项目, 私人部门的股权价值为 0, 所以私人部门的股权价值满足以下两个条件

$$E(X_a^1) = 0 \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial E(X)}{\partial X} \right|_{X=X_a^1} = 0 \quad (7)$$

其中式(6)表示私人部门选择放弃项目时, 其股权价值为 0; 式(7)表示私人部门放弃项目的条件, 即当项目现金流的增加不能增加私人部门的股权价值时, 私人部门就会放弃项目. 根据式(3)、式(6)和式(7)可以分别求出项目的股权价值和违约边界的表达式

$$E(X) = \frac{1 - \tau}{r - \mu} X - \frac{(1 - \tau)f - (1 + (1 - \tau)r_a^1)C_a^1}{r} - \left(\frac{1 - \tau}{r - \mu} X_a^1 - \frac{(1 - \tau)f - (1 + (1 - \tau)r_a^1)C_a^1}{r} \right) \left(\frac{X}{X_a^1} \right)^{\beta_2} \quad (8)$$

$$X_a^1 = \frac{r - \mu}{r} \frac{\beta_2}{\beta_2 - 1} \left[f + \left(\frac{1}{1 - \tau} + r_a^1 \right) C_a^1 \right] \quad (9)$$

由式(8)可以看出, 放弃项目导致的私人部门可能的股权价值损失包括三部分. $\frac{1 - \tau}{r - \mu} X_a^1$ 表示私人部门放弃项目后失去的获取项目未来收益的权利; $\frac{(1 - \tau)f + (1 + (1 - \tau)r_a^1)C_a^1}{r}$ 表示私人部门放弃项目后不必继续支付的相应项目成本, 包括运营成本和债务成本; $\left(\frac{X}{X_a^1} \right)^{\beta_2}$ 表示私人部门放弃项目可能发生的概率. 式(9)反映了私人部门的最优违约边界, 即当项目的现金流的价值小于 X_a^1 时, 私人部门就会放弃项目.

命题 1 在不允许资本结构调整时, 私人部门放弃项目的最优边界 (X_a^1) 随着项目运营成本 (f)、债务量 (C_a^1)、债务利率 (r_a^1) 以及税率 (τ) 的增加而增加.

命题 1 表明较高的项目运营成本, 使用较多的债务和较高的债务利率, 以及较高的税率都会促使私人部门较早的放弃项目. 项目的价值 $V(X)$ 满足以下 Bellman 方程

$$rV(X)dt = [(1 - \tau)(X - f) + \tau r_a^1 C_a^1]dt + E(dV(X)) \quad (10)$$

根据尹藤引理将上式转化为相应的微分方程

并求解可得

$$V(X) = \frac{1-\tau}{r-\mu}X + \frac{\tau r_a^1 C_a^1}{r} + B_1 X^{\beta_1} + B_2 X^{\beta_2} \quad (11)$$

在私人部门放弃项目后,项目的剩余价值被转移给项目的债权人. 在项目移交的过程中,由于项目具有一定的技术专用性等原因,使项目有一定的价值损失. 项目的债权人在接收项目后,如果继续运营项目可以回收贷款资金,债权人会选择继续运营项目,继续运营项目的期望收益为 $(1-\tau)\left(\frac{1-\alpha}{r}X_a^1 - \frac{f}{r}\right) + \frac{\tau r_a^1 C_a^1}{r}$; 否则债权人也会放弃项目,此时项目的价值为 0. 因此,在私人部门放弃项目后,项目的剩余价值可表示为 $V(X_a^1) = \text{Max}\left((1-\tau)\left(\frac{1-\alpha}{r}X_a^1 - \frac{f}{r}\right) + \frac{\tau r_a^1 C_a^1}{r}, 0\right)$. 另外,根据条件

$$B_1 = 0 \quad (12)$$

$$V(X_a^1) = (1-\tau)\left(\frac{1-\alpha}{r}X_a^1 - \frac{f}{r}\right) + \frac{\tau r_a^1 C_a^1}{r} \quad (13)$$

可以求出项目的价值 $V(X)$ 满足以下关系式

$$V(X) = \frac{1-\tau}{r-\mu}X + \frac{\tau r_a^1 C_a^1}{r} - \frac{1-\tau}{r}f + (1-\tau) \times \left(\frac{1-\alpha}{r} - \frac{1}{r-\mu}\right)X_a^1 \left(\frac{X}{X_a^1}\right)^{\beta_2} \quad (14)$$

使用债务资金一方面可以给私人部门带来税盾收益,但另一方面也给私人部门带来债务违约风险. 私人部门在使用债务资金时会权衡两方面因素来最大化项目的价值

$$\text{Max}_{C_a^1} (V(X)) \quad (15)$$

求解该最优化问题可以得到以下命题

命题 2 在不允许资本结构调整时,项目的最优债务水平 C_a^{1*} 为

$$C_a^{1*} = \frac{1-\tau}{1+(1-\tau)r_a^1} \left(\frac{r}{r-\mu} \frac{\beta_2}{\beta_2-1} AX - f \right) \quad (16)$$

其中

$$A = \left(\beta_2 \frac{1-\tau}{\tau} \left(\frac{(1-\alpha)(r-\mu)}{r} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_a^1(1-\tau)} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{\beta_2}}$$

命题 2 表明,在其他条件不变的前提下,项目的最优债务量 C_a^{1*} 随着项目现金流 X 的增大而增大,随着项目运营成本 f 的增大而减小,随着损失

率 α 的增大而减小.

命题 3 存在一个临界值,满足 $(1-\tau)r^*(\mu, \sigma, X, f) > -\frac{1}{\beta_2}$, 使得当 $r_a^1 \leq r^*(\mu, \sigma, X, f)$ 时,项目的最优债务水平 C_a^{1*} 随着贷款利率 r_a^1 的增加而增加; 当 $r_a^1 > r^*(\mu, \sigma, X, f)$ 时,项目的最优债务水平 C_a^{1*} 随着贷款利率 r_a^1 增大而减小.

在命题 3 中,临界值 $r^*(\mu, \sigma, X, f)$ 可表示为根据项目条件应该实现的贷款成本. 由此命题 3 表明,私人部门在决策使用贷款的资金量时,应该不仅关注市场贷款利率的高低,还应对比分析市场贷款利率和根据项目特点应该获得的贷款利率之间的相对大小关系. 如果市场贷款利率比根据项目特点应该获得的贷款利率低,说明当前的市场贷款条件较好,应该较多的使用债务资金; 如果市场贷款利率比根据项目特点应该获得的贷款利率高,说明当前的市场贷款条件较差,应该较少的使用债务资金. 在现有的 PPP 项目最优资本结构研究中,学者们都是在给定的市场贷款利率条件下,通过最大化项目收益^[10] 或者最小化融资成本^[5] 来确定项目的最优资本结构. 根据他们的前提条件,所有的 PPP 项目的贷款利率都是相同的(市场贷款利率). 然而,由于不同的 PPP 项目包含的风险和预期收益不同,项目可争取到的贷款利率也应该不同. 本文通过项目特点(包括预期项目收益率、现金流波动率)分析出了项目应该获得的贷款利率 $r^*(\mu, \sigma, X, f)$, 可以更好的帮助私人部门安排 PPP 项目的最优资本结构. 另外,Chen 等通过研究 PPP 项目公司和银行之间的博弈来确定项目的最优资本结构^[12], 本文的研究结论为项目公司和银行之间的博弈提供理论依据,即当银行提供的贷款利率 $r > r^*(\mu, \sigma, X, f)$ 时,项目公司可以与银行进行谈判,根据资金市场状况(决定了双方的博弈力)确定一个使双方都满意的贷款利率.

3 允许调整情况下项目的最优资本结构

PPP 项目主要包含两个阶段,即建设阶段和运营阶段. 在建设阶段,由于完工风险的存在,银

行等债权人对项目的融资条件要求往往比较高, 融资成本也比较高. 一旦项目顺利完工进入运营阶段, 项目就会产生现金流偿还债务, 这时私人部门可以与债权人进行谈判, 降低项目的融资成本.

根据前面的假设, 当项目现金流的值达到 X_b 时, 私人部门可以对项目的资本结构进行调整, 之后项目的资本结构保持不变. 根据命题 2 可知, 调整以后项目的最优债务水平 C_a^{2*} 满足

$$C_a^{2*} = \frac{1-\tau}{1+(1-\tau)r_a^2} \left(\frac{r}{r-\mu} \frac{\beta_2}{\beta_2-1} BX - f \right) \quad (17)$$

其中

$$B = \left(\beta_2 \frac{1-\tau}{\tau} \left(\frac{(1-\alpha)(r-\mu)}{r} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_a^2(1-\tau)} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{\beta_2}}$$

在最优债务水平下, 可以计算出此时项目的价值 $V_0(X)$ 满足

$$V_0(X) = \frac{1-\tau}{r-\mu} DX - \frac{1-\tau}{r} \frac{1+r_a^2}{1+(1-\tau)r_a^2} f \quad (18)$$

其中

$$D = \frac{\tau r_a^2}{1+(1-\tau)r_a^2} \left(\frac{1}{\beta_2} \left(\frac{\beta_2}{\beta_2-1} \right)^{2(1-\beta_2)} + \frac{\beta_2}{\beta_2-1} \right) B + 1$$

在项目进行资本结构调整之前, 项目的价值

$$V_1(X) = \left[\frac{1-\tau}{r-\mu} (D-1) X_b - \frac{\tau r_a^2}{1+(1-\tau)r_a^2} \frac{1-\tau}{r} f - \frac{\tau r_a^1 C_a^1}{r} \right] \left(\frac{X}{X_b} \right)^{\beta_1} + \frac{1-\tau}{r-\mu} X + \frac{\tau r_a^1 C_a^1}{r} - \frac{1-\tau}{r} f \quad (23)$$

$$X_b = \frac{r-\mu}{1-\tau} \frac{1}{D-1} \frac{\beta_1}{\beta_1-1} \left(\frac{\tau r_a^2}{1+(1-\tau)r_a^2} \frac{1-\tau}{r} f + \frac{\tau r_a^1 C_a^1}{r} \right) \quad (24)$$

在资本结构调整之前, 项目的价值由 3 部分组成, 项目的税后净现值 $\frac{1-\tau}{r-\mu} X - \frac{1-\tau}{r} f$, 加上项目债

务的税盾收益 $\frac{\tau r_a^1 C_a^1}{r}$, 加上项目的资本结构调整期权价值. 项目资本结构调整期权价值又由两部分组成, 一部分是进行资本结构调整带来的收益 $\left[\frac{1-\tau}{r-\mu} (D-1) X_b - \frac{\tau r_a^2}{1+(1-\tau)r_a^2} \frac{1-\tau}{r} f - \frac{\tau r_a^1 C_a^1}{r} \right]$, 另一部分是资本结构调整发生的可能性 $\left(\frac{X}{X_b} \right)^{\beta_1}$.

使用债务资金一方面会给项目带来税盾收益, 但是另一方面也会增加项目失去资本结构调

$V_1(X)$ 满足

$$V_1(X) = \frac{1-\tau}{r-\mu} X + \frac{\tau r_a^1 C_a^1}{r} - \frac{1-\tau}{r} f + C_1 X^{\beta_1} + C_2 X^{\beta_2} \quad (19)$$

其中 C_1 和 C_2 为待求解常数, β_1 和 β_2 为常数, 满足 $\beta_1 > 0, \beta_2 < 0$. 根据 Sundaresan 和 Wang 等的研究^[20], 在资本结构调整边界 X_b 处, $V_1(X)$ 需要满足以下三个边界条件

$$\lim_{X \rightarrow 0} V_1(X) < \infty \quad (20)$$

$$V_1(X_b) = V_0(X_b) \quad (21)$$

$$\frac{\partial V_1(X)}{\partial X} \Big|_{X=X_b} = \frac{\partial V_0(X)}{\partial X} \Big|_{X=X_b} \quad (22)$$

条件(20)表示 the non-bubble condition, 即当项目的现金流比较小时, 项目的价值也应该比较小, 由此可以推出 $C_2 = 0$; 条件(21)表示 the value matching condition, 即在资本结构调整边界处, 调整前后项目的最优值应相等; 条件(22)表示 the smooth passing condition, 即确保在调整项目的资本结构时项目的价值保持最优化. 根据条件(20)条件(21)条件(22)可以计算出资本结构调整前项目的价值 V_1 和资本结构调整边界 X_b 分别满足

整期权价值的可能性. 因此存在一个最优的债务水平使得项目的价值最大化. 通过求解以下最优化问题可以得到该最优的债务水平.

$$\text{Max}_{C_a^1} (V_1(X)) \quad (25)$$

求解该最优化问题可以得到如下命题:

命题 4 在资本结构调整之前, 项目的最优债务水平 \bar{C}_a^1 满足

$$\bar{C}_a^1 = \frac{r}{\tau r_a^1} \left(\frac{1-\tau}{r-\mu} (D-1) \frac{\beta_1-1}{\beta_1} \beta_1^{\frac{1}{\beta_1}} X - \frac{\tau r_a^2}{1+(1-\tau)r_a^2} \frac{1-\tau}{r} f \right) \quad (26)$$

进一步分析式(22)可以得到以下命题:

命题 5 项目资本结构调整前的最优债务水平 \bar{C}_a^1 随着调整前贷款利率 r_a^1 的增加而减小, 随着调整后贷款利率 r_a^2 的增加而增加.

命题 5 表明项目在资本结构调整前的最优债务水平同时受当前贷款利率大小和未来预期贷款利率大小的影响. 如果当前的贷款利率较低并且预期未来的贷款利率较高, 项目应该在当期使用较多的债务资金; 相反如果当前的贷款利率较高而预期未来的贷款利率较低, 项目应该在当期尽量少的使用债务资金, 并且在未来通过资本结构调整增加债务资金的数量. 该结论反映了在允许资本结构调整时, 未来预期贷款利率的大小会对当前的最优资本结构产生显著的影响, 因此私人部门应该对于融资合同中的再融资条款给予足够的重视, 从而设计出更加合理的资本结构. 与以往静态的分析 PPP 项目最优资本结构的研究相比, 该研究结论具有开创性.

假设 $r < 2\mu + \sigma^2$

该假设表示无风险利率不能太高, 因为无风险利率反映了项目的机会成本, 无风险利率太高会导致项目的机会成本过高, 从而使项目失去投资可行性.

命题 6 $\bar{C}_a^1 < C_a^{1*}, \bar{C}_a^2 < C_a^{2*}$

命题 6 表明在允许资本结构调整时, 资本结构调整之前的最优债务水平小于资本结构调整之后的最优债务水平, 即在资本结构调整时, 项目应该使用更多的债务资金. 另外, 资本结构调整之前

的最优债务水平也小于不允许资本结构调整时的最优债务水平, 即允许资本结构调整时项目的初始债务量应该低于不允许资本结构调整时项目的债务量. 该研究结论为私人部门在允许再融资的情况下如何安排项目的资本结构提供建议, 与现有的 PPP 项目最优资本结构相关研究相比, 该结论具有开创性.

以上为在允许资本结构调整和不允许资本结构调整两种情况下私人部门的最优资本结构分析, 下面进一步分析私人部门实现资本结构调整期权的边界条件. 假设私人部门为了实现资本结构调整的权利需要付出的成本为 I , 则当满足条件 $I \leq V_1(X) - V_2(X)$ 时, 私人部门通过实现资本结构调整期权可以获得更多的收益, 因此私人部门有动机去实现资本结构调整期权; 相反, 如果 $I > V_1(X) - V_2(X)$, 则私人部门不会主动的去实现资本结构调整期权, 故私人部门实现资本结构调整期权的边界条件为 $I = V_1(X) - V_2(X)$.

4 数值分析

4.1 参数选取

本节通过数值模拟对以上模型分析结果进行验证, 通过对多组数据模拟结果的比较发现, 只要在现实经济意义的范围内选取模型中的参数, 对本文的分析结论不产生影响. 因此本文选取较符合 PPP 项目实际的数据作为基础参数进行数值分析(见表 2).

表 2 参数取值说明

Table 2 Parameters selection

参数名称	取值	取值依据
无风险利率	$r = 0.04$	余额宝利率
期望收益增长率	$\mu = 0.035$	合理估计
收益波动率	$\sigma = 0.05$	合理估计
税率	$\tau = 0.11$	“财政部 PPP 中心”
项目移交损失率	$\alpha = 0.05$	合理估计
项目运营成本	$f = 10$ 万	趋势研究, 初始值可随取
项目现金流	$X = 300$ 万	趋势研究, 初始值可随取

4.2 结果分析

在不允许资本结构调整时, 项目在不同的现金流波动率下, 最优债务水平 C_a^{1*} 与贷款利率 r_a^1 之间的关系如图 1 所示, 项目的最优债务水平随着贷款利率的增加先增加后减小, 拐点处对应的贷款利率表示根据项目特点应该获得的贷款利

率. 故命题 3 得到验证. 从图 1 中还可以看出, 随着项目收益波动率的增加, 最优债务水平随贷款利率变化的拐点向右移动 ($r^*(\sigma = 0.05) < r^*(\sigma = 0.053)$). 这是因为项目收益波动性的大小反应了项目收益的不确定性, 项目的不确定性越大, 项目应该获得的贷款利率就越高. 项目在不

同的现金流增长率下,最优债务水平 C_a^{1*} 与贷款利率 r_a^1 之间的关系如图 2 所示,项目的最优债务水平随着贷款利率的增加先增加后减小,拐点处对应的贷款利率表示根据项目特点应该可以获得的贷款利率. 故命题 3 得到验证. 从图 2 中还可以

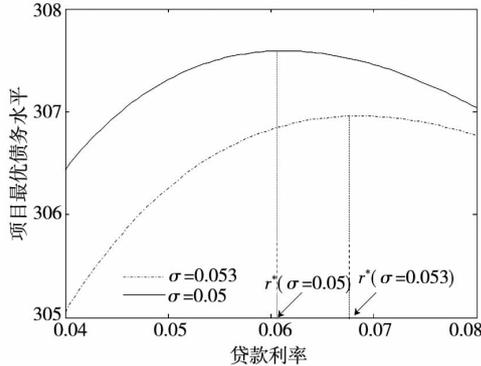


图 1 在不同现金流波动率下,PPP 项目最优债务水平与贷款利率之间的关系

Fig. 1 The relation between the optimal debt level and the debt rate in PPP project under different cash flow fluctuate rates

在允许资本结构调整时,项目在不同的现金流波动率和增长率下,初始最优债务水平 \bar{C}_a^{1*} 与初始贷款利率 r_a^1 之间的关系如图 3 和图 4 所示. 从图中可以看出,项目的初始最优债务水平随着初始贷款利率的增加而减小. 故命题 5 中 \bar{C}_a^{1*} 和 r_a^1 之间的关系得到验证. 这表明项目在使用债务资金时,如果当前的贷款利率较高,项目应该较少的使用债务资金. 因为项目可以进行资本结构调整,所以在项目贷款利率较高时,项目可以选择使用较少的贷款资金;在项目的贷款利率降低时,通过调整资本结构增加贷款量,从而降低总体的贷款成本. 从图 3 和图 4 中还可以看出,初始最优债

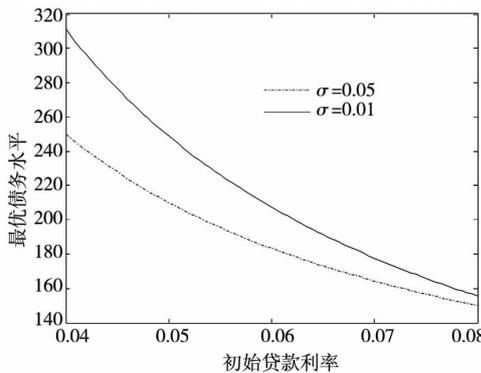


图 3 在不同现金流波动率下,PPP 项目初始最优债务水平与初始贷款利率之间的关系

Fig. 3 The relation between the initial optimal debt level and the initial debt rate in PPP project under different cash flow fluctuate rates

看出,随着项目现金流增长率的增加,最优债务水平随贷款利率变化的拐点向左移动 ($r^*(\sigma = 0.35) < r^*(\sigma = 0.25)$). 这是因为项目现金流增长率大小反映了项目的盈利性,项目的盈利性越好,项目应该获得的贷款利率就越低.

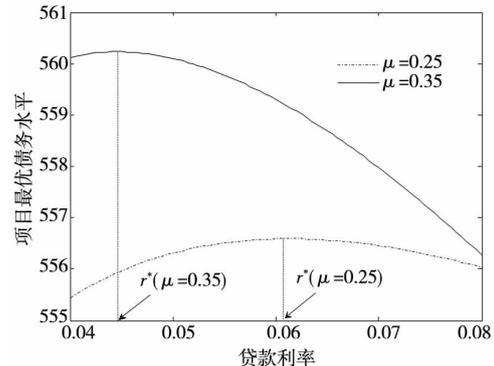


图 2 在不同现金流增长率下,PPP 项目最优债务水平与贷款利率之间的关系

Fig. 2 The relation between the optimal debt level and the debt rate in PPP project under different cash flow increasing rates

务水平 \bar{C}_a^{1*} 与初始贷款利率 r_a^1 之间的关系受不同的项目现金流波动率和增长率的影响. 项目收益波动率越大,即项目收益的不确定性越高,初始最优债务水平随着初始贷款利率减小的递减速度越小. 项目收益增长率越大,初始最优债务水平随着初始贷款利率减小的递减速度越大. 这是因为项目收益的不确定性越高,项目未来可能获得较低贷款利率的可能性越较小,项目初始最优债务水平对贷款利率的增加了的反应就越不灵敏;而项目的收益增长率越大,表明项目未来收益较好,越有可能获得较低的贷款利率,所以项目初始最优债务水平对贷款利率的增加反应就越灵敏.

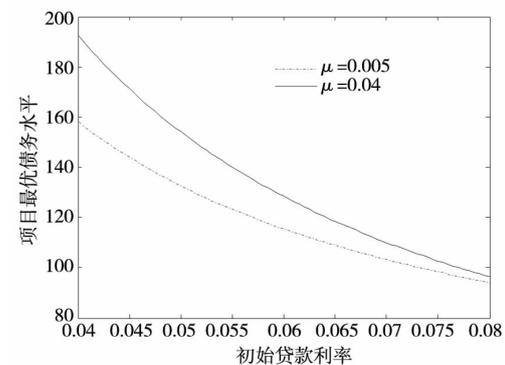


图 4 在不同现金流增长率下,PPP 项目初始最优债务水平与初始贷款利率之间的关系

Fig. 4 The relation between the initial optimal debt level and the initial debt rate in PPP project under different cash flow increasing rates

在允许资本结构调整时,项目在不同的现金流波动率和增长率下,初始最优债务水平 \bar{C}_a^{1*} 与

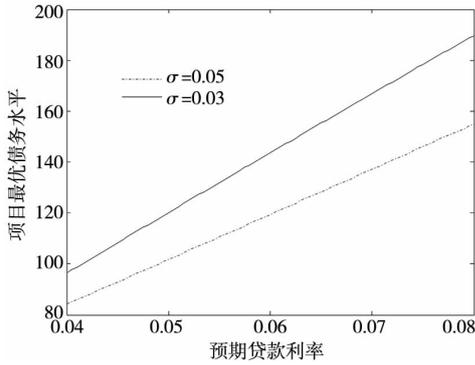


图 5 在不同现金流波动率下,PPP 项目初始最优债务水平与资本结构调整时预期贷款利率之间的关系

Fig. 5 The relation between the initial optimal debt level and the expected debt rate in PPP project under different cash flow fluctuate rates

从图 6 可以看出,项目的初始最优债务水平 \bar{C}_a^{1*} 随着资本结构调整时预期贷款利率 r_a^2 的增加而增加. 故命题 5 中 \bar{C}_a^{1*} 和 r_a^2 之间的关系得到验证. 另外从图 5 和图 6 中还可以看出,项目的初始最优债务水平和资本结构调整时预期贷款利率之间的关系受项目收益波动率和增长率的影响. 当项目的收益波动率较小或者收益增长率较大时,项目的初始最优债务水平会以更快的速度随着资

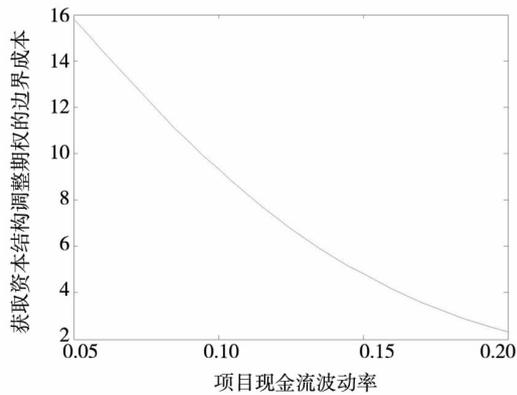


图 7 实现资本结构调整期权的边界成本与项目现金流波动率之间的关系

Fig. 7 The relationship between the boundary cost realizing the capital structure adjustment right and the cash flow fluctuate rate

从图 7 中可以看出,随着项目现金流波动率的增加,私人部门为了实现资本结构调整期权愿意付出的成本越来越小. 该结论反映了资本结构调整期权的特殊性:项目资本结构调整期权的价

资本结构调整时预期贷款利率 r_a^2 之间的关系如图 5 和图 6 所示.

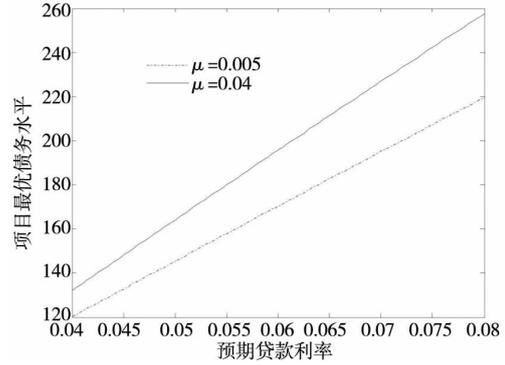


图 6 在不同现金流增长率下,PPP 项目初始最优债务水平与资本结构调整时预期贷款利率之间的关系

Fig. 6 The relation between the initial optimal debt level and the expected debt rate in PPP project under different cash flow increasing rates

本结构调整时预期贷款利率的增加而增加. 因为较小的收益波动率和较大的收益增长率都反映了项目较好的收益状况,在预期到未来项目贷款利率上升时,为了减小总融资成本,项目应该在初期使用较多债务资金.

私人部门为了实现资本结构调整期权愿意付出的成本 I 随项目现金流波动率 σ 和收益增长率 μ 的变化如图 7 和图 8 所示.

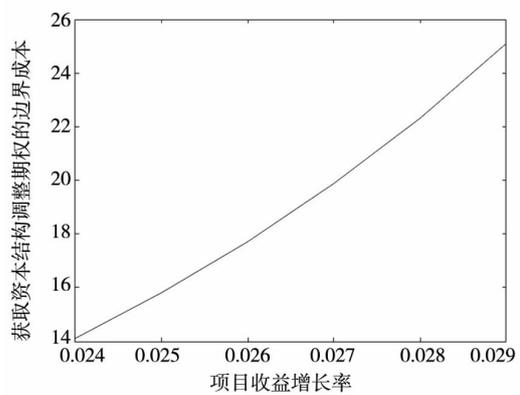


图 8 实现资本结构调整期权的边界成本与项目收益增长率之间的关系

Fig. 8 The relationship between the boundary cost realizing the capital structure adjustment right and the cash flow increasing rate

值随着项目收益不确定性的增加而减小. 在以往的研究中,项目其它期权的价值,比如项目再谈判期权^[24,25]和政府担保期权^[26]等,均随着项目收益不确定性的增加而增加. 这是因为项目收益的

不确定性越高,私人部门未来通过再融资获得债务资金的可能性就越低,因此资本结构调整期权的价值就越低;而项目不确定性则增加了项目再谈判和政府担保的必要性,因此会增加项目再谈判期权和政府担保期权的价值.从图 8 中可以看出,随着项目收益增长率的增加,私人部门为了实现资本结构调整期权愿意付出的成本越来越大.该结论反映了随着项目收益增长率的增加,项目资本结构调整期权的价值在增加.这是因为项目的收益增长率越大,项目未来潜在的收益就越高,私人部门未来通过再融资降低项目融资成本的可能性就越高,因此项目资本结构调整期权的价值就越大.

5 结 束 语

本文用实物期权方法对 PPP 项目的最优资本结构进行了研究.研究结果主要包括以下 3 个方面.首先,本文发现项目的最优债务量与贷款利率之间呈现一种倒 U 型关系,因此私人部门在决策项目使用的债务水平时,应该充分了解项目的预期收益波动率和增长率,然后根据预期收益波动率和增长率来估计项目应该获得的贷款利率,并通过与当前市场贷款利率比较来确定项目的最优债务资金量.其次,项目在允许资本结构调整和不允许资本结构调整时应该采用不同的资金安排

方式,具体表现为:允许资本结构调整时,项目的期初债务水平应低于不允许资本结构调整时的债务水平,并且允许资本结构调整时项目的期初债务水平还应低于调整后的债务水平.最后,由于私人部门实现资本结构调整期权的边界成本随项目现金流波动率的增加而减小,随项目收益增长率的增加而增加,因此当项目的现金流波动率较小且项目收益增长率较大时,私人部门应该努力实现资本结构调整期权.这些启示,可为私人部门安排 PPP 项目债务资金方案提供借鉴.

本研究还可以从以下 3 个方面进行拓展研究.首先,本文在分析 PPP 项目的最优资本结构时,将私人部门的放弃项目期权和资本结构调整期权价值包含在了项目价值和股权价值中,没有单独分析这两部分期权价值对 PPP 项目最优资本结构的影响,未来可以对这部分内容做进一步分析.其次,本文考虑了利率的变化对 PPP 项目最优资本结构的影响,但是在工程实践中可能会使用利率掉期等手段来减少利率的不确定性,因此可以进一步分析这些利率掉期手段对 PPP 项目最优资本结构的影响.最后,从国际 PPP 项目实践来看,政府部门可能会要求分享私人部门通过资本结构调整(再融资)获得的收益,政府部门的再融资收益分享对 PPP 项目最优资本结构动态调整的影响可以在本文的基础上进一步研究.

参 考 文 献:

- [1] 孙 慧, 范志清, 石 焯. BOT 公路排他性条件对定价及社会效益影响研究[J]. 系统工程学报, 2011, 26(1): 68 - 73.
Sun Hui, Fan Zhiqing, Shi Ye. Research on effect of exclusive condition on pricing and social welfare of road under BOT scheme[J]. Journal of Systems Engineering, 2011, 26(1): 68 - 73. (in Chinese)
- [2] 高 颖, 张水波, 冯 卓. 不完全合约下 PPP 项目的运营期延长决策机制[J]. 管理科学学报, 2014, 17(2): 48 - 57.
Gao Ying, Zhang Shuibao, Feng Zhuo. Analysis of decision-making mechanism for operation period extension of public-private partnership projects under incomplete contracts[J]. Journal of Management Science in China, 2014, 17(2): 48 - 57. (in Chinese)
- [3] 冯 卓, 张水波, 高 颖. BOT 道路项目特许期结构比较研究[J]. 系统工程学报, 2016, 31(4): 451 - 459.
Feng Zhuo, Zhang Shuibao, Gao Ying. Comparative analysis of concession structures for BOT road projects[J]. Journal of Systems Engineering, 2016, 31(4): 451 - 459. (in Chinese)
- [4] Ioannou P G, Dias A. Debt capacity and optimal capital structure for privately financed infrastructure projects[J]. Journal of

- Construction Engineering and Management, 1995, 121(4): 404–414.
- [5] Du J, Han X, Shi P, et al. Determine optimal capital structure for metro PPP projects to reduce financial risks: Theory and empirical analysis[C]//Management Science and Engineering (ICMSE), 2013 International Conference on. IEEE, 2013: 2105–2111.
- [6] 李广众, 叶敏健, 郑 颖. 资本结构与员工劳动生产率[J]. 管理科学学报, 2018, 21(2): 1–15.
Li Guangzhong, Ye Minjian, Zheng Ying. Debt and employee productivity: Evidences from Chinese listed firms [J]. Journal of Management Sciences in China, 2018, 21(2): 1–15. (in Chinese)
- [7] 胡一石, 盛和太, 刘 婷, 等. PPP 项目公司资本结构的影响因素分析[J]. 工程管理学报, 2015(1): 102–106.
Hu Yishi, Sheng Hetai, Liu Ting, et al. Factors affecting capital structure of PPP projects[J]. Journal of Engineering Management, 2015(1): 102–106. (in Chinese)
- [8] 刘 婷, 王守清, 盛和太, 等. PPP 项目资本结构选择的国际经验研究[J]. 建筑经济, 2014, 35(11): 11–14.
Liu Ting, Wang Shouqing, Sheng Hetai, et al. Research on international experiences of capital structure in PPP projects [J]. Construction Economy, 2014, 35(11): 11–14. (in Chinese)
- [9] Zhang X. Financial viability analysis and capital structure optimization in privatized public infrastructure projects[J]. Journal of Construction Engineering and Management, 2005, 131(6): 656–668.
- [10] Yun S, Han S H, Kim H, et al. Capital structure optimization for build-operate-transfer (BOT) projects using a stochastic and multi-objective approach[J]. Canadian Journal of Civil Engineering, 2009, 36(5): 777–790.
- [11] Donkor E A, Duffey M. Optimal capital structure and financial risk of project finance investments: A simulation optimization model with chance constraints[J]. Engineering Economist, 2013, 58(1): 19–34.
- [12] Chen B, Liou F M. Optimal capital structure of power plant projects with various bargaining powers in project negotiations [J]. Journal of Energy Engineering, 2016: 04016051.
- [13] Wang B, Zhang S, Wang X, et al. The influence of quality benefit and marginal contribution on the optimal equity structure of the PPP projects: Balancing public and private benefits[J]. Construction Management and Economics, 2018, 36(11): 611–622.
- [14] Bayat M, Khanzadi M, Nasirzadeh F. Determining optimal capital structure and concession period length in BOT scheme using trilateral bargaining game model[J]. Journal of Infrastructure Systems, 2018, 25(1): 04018036.
- [15] Dixit A K, Pindyck R S. Investment under Uncertainty[M]. Princeton: Princeton University Press, 1994: 659–681.
- [16] Lambrecht B M. Real options in finance[J]. Journal of Banking and Finance, 2017, 81: 166–171.
- [17] 冉 戎, 郝 颖, 刘 星. 控股股东利益动机、成长期权与投资时机决策[J]. 管理科学学报, 2012, 15(7): 86–94.
Ran Rong, Hao Ying, Liu Xing. Large shareholders' motive of private benefits of control, grow options and investment timing decision[J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(7): 86–94. (in Chinese)
- [18] Goldstein R, Ju N, Leland H. An EBIT-based model of dynamic capital structure[J]. The Journal of Business, 2001, 74(4): 483–512.
- [19] Strebulaev I A. Do tests of capital structure theory mean what they say? [J]. The Journal of Finance, 2007, 62(4): 1747–1787.
- [20] Sundaresan S, Wang N, Yang J. Dynamic investment, capital structure, and debt overhang[J]. The Review of Corporate Finance Studies, 2015, 4(1): 1–42.
- [21] Hugonnier J, Malamud S, Morellec E. Credit market frictions and capital structure dynamics[J]. Journal of Economic Theory, 2015, 157: 1130–1158.
- [22] Tian Y. Optimal capital structure and investment decisions under time-inconsistent preferences[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2016, 65: 83–104.
- [23] Bigler Jr W R. Improve capital structure decisions using dynamic capabilities strategy[J]. Management Accounting Quarterly, 2016, 17(3): 10.
- [24] Xiong W, Zhang X. The real option value of renegotiation in public-private partnerships[J]. Journal of Construction Engi-

neering and Management, 2016, 142(8): 04016021.

[25] Liu J, Cheah C Y J. Real option application in PPP/PFI project negotiation[J]. Construction Management and Economics, 2009, 27(4): 331 - 342.

[26] Zapata Quimbayo C A, Mejía Vega C A, Marques N L. Minimum revenue guarantees valuation in PPP projects under a mean reverting process[J]. Construction Management and Economics, 2018: 1 - 18.

The optimal capital structure of PPP projects: Based on the real-option method

WANG Bing, ZHANG Shui-bo, WANG Xiu-qin*, HAN Lei-jie

College of Management and Economics, Tianjin University, Tianjin 300072, China

Abstract: Using the real-option method, this paper studies the optimal capital structures of PPP projects in two cases where the capital structure is adjustable and unadjustable, respectively, from the perspective of the private sector. A comparison of the optimal capital structures in the two cases is conducted, and the boundary condition when the private sector gets the capital structure adjustment right is investigated. The results show that, first, there is a reverse U-shaped relationship between the optimal debt level and the debt rate. Second, the optimal capital structure arrangements in the two cases are significantly different. Specifically, when the capital structure is adjustable, the debt level at the early stage of the project is less than that when the capital structure is unadjustable, and the debt level should be increased by capital structure adjustment in the future. Third, the boundary cost to get the capital structure adjustment right decreases with the cash flow fluctuation rate, and increases with the cash flow increasing rate. These results can provide some useful insight for the private sector into the capital structure arrangement for PPP projects.

Key words: PPP projects; capital structure; real option; debt rate

附录

模型推导 由式(2)推导式(3)

式(2)为一个二阶变系数非齐次微分方程,其对应的齐次微分方程为 $\frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 E(X)}{\partial X^2} + \mu X \frac{\partial E(X)}{\partial X} - rE(X) = 0$. 令 $X = e^Y$, 则 $\frac{\partial E(Y)}{\partial Y} = X \frac{\partial E(X)}{\partial X}$, 并且 $\frac{\partial^2 E(Y)}{\partial Y^2} = X^2 \frac{\partial^2 E(X)}{\partial X^2} + X \frac{\partial E(X)}{\partial X}$, 所以满足 $\frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{\partial^2 E(Y)}{\partial Y^2} - \frac{\partial E(Y)}{\partial Y} \right) + \mu \frac{\partial E(Y)}{\partial Y} - rE(Y) = 0$. 该微分方程为二阶齐次常微分方程,可以求出该微分方程的解为 $E(Y) = C + A_1 e^{\beta_1 Y} + A_2 e^{\beta_2 Y}$, 其中 C, A_1, A_2 为待求解常数, β_1 和 β_2 是二次方程 $\frac{\sigma^2}{2}(x^2 - x) + \mu x - r = 0$ 的两个解. 将 Y 变换成 X 可得 $E(X) = C + A_1 X^{\beta_1} + A_2 X^{\beta_2}$.

另外可以验证,微分方程式(2)的一个特解为 $E_0(X) = \frac{1-\tau}{r-\mu} X - \frac{(1-\tau)f + (1+(1-\tau)r_a^1)}{r} C_a^1$. 由此可以推导出式(3).

命题 1 证明

$$\frac{\partial X_a^1}{\partial f} = \frac{r-\mu}{r} \frac{\beta_2}{\beta_2-1} > 0, \frac{\partial X_a^1}{\partial C_a^1} = \frac{r-\mu}{r} \frac{\beta_2}{\beta_2-1} \left(\frac{1}{1-\tau} + r_a^1 \right) > 0, \frac{\partial X_a^1}{\partial r_a^1} = \frac{r-\mu}{r} \frac{\beta_2}{\beta_2-1} C_a^1 > 0, \frac{\partial X_a^1}{\partial f} = \frac{r-\mu}{r} \frac{\beta_2}{\beta_2-1} \frac{C_a^1}{(1-\tau)^2} >$$

0. 故命题 1 得证.

命题 2 证明

$$\frac{\partial V(X)}{\partial C_a^1} = \frac{\tau r_a^1}{r} - (1-\tau) \left(\frac{1-\alpha}{r} - \frac{1}{r-\mu} \right) \left(\frac{X}{X_a^1} \right)^{\beta_2} \frac{r-\mu}{r} \beta_2 \left(\frac{1}{1-\tau} + r_a^1 \right) \text{ 其中 } X_a^1 = \frac{r-\mu}{r} \frac{\beta_2}{\beta_2-1} \left(f + \left(\frac{1}{1-\tau} + r_a^1 \right) C_a^1 \right). \text{ 令}$$

$\frac{\partial V(X)}{\partial C_a^1} = 0$, 对其求解可得 $C_a^{1*} = \frac{1-\tau}{1+(1-\tau)r_a^1} \left(\frac{r}{r-\mu} \frac{\beta_2}{\beta_2-1} AX - f \right)$, 其中 $A = \left(\beta_2 \frac{1-\tau}{\tau} \left(\frac{(1-\alpha)(r-\mu)}{r} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_a^1(1-\tau)} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{\beta_2}}$. 故命题 2 得证. 命题 4 的证明与命题 2 类似.

命题 3 证明

$\frac{\partial C_a^1}{\partial r_a^1} = -\frac{(1-\tau)^2}{(1+(1-\tau)r_a^1)^2} \left(\frac{r-\mu}{r} \frac{\beta_2}{\beta_2-1} AX \left(1 + \frac{1}{\beta_2} \frac{1}{r_a^1(1-\tau)} \right) - f \right) > 0$. 令 $f(r_a^1) = \frac{r-\mu}{r} \frac{\beta_2}{\beta_2-1} AX \left(1 + \frac{1}{\beta_2} \frac{1}{r_a^1(1-\tau)} \right) - f$, 则 $\frac{\partial C_a^1}{\partial r_a^1} = -\frac{(1-\tau)^2}{(1+(1-\tau)r_a^1)^2} f(r_a^1)$. 因为 A 随着 r_a^1 的增加而增大, $\left(1 + \frac{1}{\beta_2} \frac{1}{r_a^1(1-\tau)} \right)$ 也随着 r_a^1 的增加而增大, 所以 $f(r_a^1)$ 随着 r_a^1 单调递增. 在一定条件下, 存在 $r^*(\mu, \sigma, X, f)$ 使得 $f(r^*(\mu, \sigma, X, f)) = 0$. 所以当 $r_a^1 < r^*(\mu, \sigma, X, f)$ 时, 有 $f(r_a^1) < 0$, 则 $\frac{\partial C_a^1}{\partial r_a^1} > 0$; 当 $r_a^1 > r^*(\mu, \sigma, X, f)$ 时, 有 $f(r_a^1) > 0$, 则 $\frac{\partial C_a^1}{\partial r_a^1} < 0$. 又因为当 $(1-\tau)r_a^1 < -\frac{1}{\beta_2}$ 时, $f(r_a^1) < 0$, 所以必有 $(1-\tau)r^*(\mu, \sigma, X, f) > -\frac{1}{\beta_2}$. 故命题 3 得证.

命题 5 证明

令 $g(r_a^2) = \frac{\tau r_a^2}{1+(1-\tau)r_a^2}$, $h(r_a^2) = \left(\frac{1-\tau}{r-\mu} \left(\frac{1}{\beta_2} \left(\frac{\beta_2}{\beta_2-1} \right)^{2(1-\beta_2)} + \frac{\beta_2}{\beta_2-1} \right) B \frac{\beta_1}{\beta_1-1} \beta_1^{\frac{1}{\beta_1}} X - \frac{1-\tau}{r} f \right)$, 则 $\bar{C}_a^1 = \frac{r}{\tau r_a^1} g(r_a^2) h(r_a^2)$. $\frac{\partial \bar{C}_a^1}{\partial r_a^1} = -\frac{r}{\tau (r_a^1)^2} g(r_a^2) h(r_a^2) < 0$. 因为 $\frac{\partial g(r_a^2)}{\partial r_a^2} = \frac{\tau}{(1+(1-\tau)r_a^2)^2} > 0$, 并且 $\frac{\partial h(r_a^2)}{\partial r_a^2} > 0$, 所以 $\frac{\partial \bar{C}_a^1}{\partial r_a^2} > 0$. 故命题 5 得证.

命题 6 证明

$C_a^{1*} = \frac{1-\tau}{1+(1-\tau)r_a^1} \left(\frac{r}{r-\mu} \frac{\beta_2}{\beta_2-1} AX - f \right)$, 其中 $A = \left(\beta_2 \frac{1-\tau}{\tau} \left(\frac{(1-\alpha)(r-\mu)}{r} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_a^1(1-\tau)} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{\beta_2}}$;
 $C_a^{2*} = \frac{1-\tau}{1+(1-\tau)r_a^2} \left(\frac{r}{r-\mu} \frac{\beta_2}{\beta_2-1} BX - f \right)$, 其中 $B = \left(\beta_2 \frac{1-\tau}{\tau} \left(\frac{(1-\alpha)(r-\mu)}{r} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_a^2(1-\tau)} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{\beta_2}}$;
 $\bar{C}_a^1 = \frac{1}{r_a^1} \frac{r_a^2(1-\tau)}{1+(1-\tau)r_a^2} \left(\frac{r}{r-\mu} \left(\frac{1}{\beta_2} \left(\frac{\beta_2}{\beta_2-1} \right)^{2(1-\beta_2)} + \frac{\beta_2}{\beta_2-1} \right) B \frac{\beta_1}{\beta_1-1} \beta_1^{\frac{1}{\beta_1}} X - f \right)$. 首先比较 \bar{C}_a^1 和 C_a^{1*} 之间的大小关系. 因为 $r_a^1 > r_a^2$, 所以 $\frac{1}{r_a^1} \frac{r_a^2(1-\tau)}{1+(1-\tau)r_a^2} < \frac{(1-\tau)}{1+(1-\tau)r_a^1}$; 又因为 $\beta_2 < 0$, 所以 $A > B$, 并且 $\frac{1}{\beta_2} \left(\frac{\beta_2}{\beta_2-1} \right)^{2(1-\beta_2)} + \frac{\beta_2}{\beta_2-1} < \frac{\beta_2}{\beta_2-1}$; 又因为当 $r < 2\mu + \sigma^2$ 时, $\frac{\beta_1}{\beta_1-1} \beta_1^{\frac{1}{\beta_1}} < 1$, 所以 $\bar{C}_a^1 < C_a^{1*}$. 然后比较 \bar{C}_a^1 和 C_a^{2*} 之间的大小关系. 在以上证明的基础上, 因为 $\frac{r_a^2}{r_a^1} < 1$, 所以 $\bar{C}_a^1 < C_a^{2*}$. 故命题 6 得证.