

不确定需求下的冷链分销商最优决策^①

郑宇婷¹, 李建斌¹, 陈植元^{2*}, 明茫茫¹

(1. 华中科技大学管理学院, 武汉 430074; 2. 武汉大学经济管理学院, 武汉 430072)

摘要: 针对新鲜产品供应链(冷链)中分销商, 引入保鲜努力刻画分销商投入的保鲜工作, 考虑新鲜产品到达市场的数量与质量, 分析冷链分销商的最优决策问题. 与前人研究相比, 本文使用加法形式需求函数刻画市场需求, 并使用相关企业数据验证加法形式需求函数合理性, 完善了冷链分销商决策问题的相关研究. 研究发现, 当保鲜努力外生时, 分销商的最优订货数量和最优零售价格只与保鲜努力有关; 当零售价格外生时, 分销商的最优保鲜努力与产品实际单位成本关于保鲜努力函数的一阶最优条件有关; 当订货数量外生时, 分销商制定的零售价格随保鲜努力增加而增大, 所获得的利润也随保鲜努力递增, 但边际利润随保鲜努力递减. 最后, 将所得结论应用于中国500强民营企业卓尔控股有限公司旗下的小雪冷链(武汉)物流有限公司, 为该公司提供相应的保鲜努力投入策略.

关键词: 新鲜产品供应链; 保鲜努力; 加法形式需求函数

中图分类号: F224.32 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2019)01-0094-13

0 引言

本文的研究对象为新鲜产品供应链, 或者称为冷链. 新鲜产品例如果蔬、肉类, 在流通过程中自身的质量和数量会发生变化, 表现为新鲜度降低、部分变质甚至完全腐烂. 因此, 冷链中产品的流通需要在一定的低温环境下才能进行, 而分销商对冷藏设备和保鲜能力的资金和人力投入将影响到产品到达市场的存活率和新鲜程度, 进而影响市场需求量和销售价格. 由于产品的易腐性、需求和价格的波动性以及消费者日益增加的食品安全意识, 冷链相比于传统的供应链更为复杂. Blackburn等^[1]将果蔬、肉类等这类产品称作“Fresh produce”; Chao等^[2]及Hu等^[3]将其称作“Perishables”; Lodree等^[4]及Chen等^[5]将其称作“Deteriorating products”; 而在国内研究中, 毛照昉等^[6]和张新鑫等^[7]将其称作“易逝品”. 这类产品

在流通过程中若不采取适当的保护措施会导致供应链成员利益的损失, 市场需求无法得到满足. 据报道, 2015年我国果蔬、肉类、水产品冷藏运输率分别为30%、50%和65%左右, 腐损率为25%、12%和15%左右, 而发达国家的各类生鲜产品腐损率都低于5%^[8]. 美国仅有1%~2%, 造成这一问题的一个重要原因就是我国仅有15%的新鲜农产品采用“冷链”的方式进行存储和运输, 而发达国家近90%的农产品采用“冷链”方式^[9]. 同时, 2017年国务院办公厅发布的《关于加快发展冷链物流保障食品安全促进消费升级的意见》也表明要“聚焦农产品产地‘最先一公里’和城市配送‘最后一公里’等突出问题”. 因此, 对此类产品在流通过程中保鲜工作的研究, 对提高供应链效率和减少社会损失有显著的实际意义^[8].

一些学者专注于研究供应链中成员的策略对个体和整体利润的影响, 探讨与产品保鲜工作有

① 收稿日期: 2016-11-25; 修订日期: 2018-08-14.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71831007; 71571079; 71871166); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目.

通讯作者: 陈植元(1983—)男, 江西人, 博士, 讲师, Email: zhiyuanchen@whu.edu.cn

关的变量对供应链绩效的影响。例如, Cai 等^[10]以新鲜产品为研究对象, 考虑产品的新鲜程度对生产商的批发价格的影响; Sun^[11]研究了当冷链存在中断风险时, 零售商的最优订货策略以及整个冷链的利润最大化问题; 浦徐进等^[12]研究了多渠道下, 信息不对称纳什谈判对冷链绩效的影响; 相似的, 但斌^[13]也讨论了在信息完全不对称、部分对称及对称三种情况下, 动态博弈对冷链绩效的影响。

在刻画冷链特征时, 学者们使用了多种变量。例如, Cai 等^[14]用保鲜努力 τ 刻画投入的保鲜工作程度, 产品到达市场的新鲜程度及市场价格受到投入的保鲜努力的影响, τ 的加入体现了冷链与传统供应链之间的区别。文章在 FOB 交易术语的前提下, 分别探讨了生产商和分销商各自在分散决策供应链系统和集中决策供应链系统的最优决策, 并且提出了在分散式系统中协调供应链行为的契约, 从而优化了供应链。与 Cai 等^[14]类似, Xiao 等^[15]也在冷链中引入保鲜努力 τ , 不同的是该篇论文是在 CIF 的术语下对生产商和分销商的最优决策展开讨论, 并提出在分散系统中协调供应链行为的契约。当然刻画保鲜工作的建模方式有多种多样, 除了用运输时间和保鲜努力程度来刻画产品保鲜工作的投入, Cai 等^[16]把温度作为分销商的决策变量, 通过低温维持产品在流通过程中的新鲜度, 并且假设市场需求受到产品在流通过程中的储存温度的影响。

在研究冷链分销商决策问题时, 海内外学者不约而同地使用了乘法形式需求函数刻画冷链的市场需求。例如, Cai 等^[10]在乘法形式市场需求的条件下, 假设产品在到达市场时的新鲜程度是由运输的时间决定的, 研究了分散式系统和集中式系统两种情况下生产商和分销商的最优决策; Cai 等^[14]和 Xiao 等^[15]也同样使用了乘法形式需求函数, 分别在 FOB 术语和 CIF 下研究可使供应链协调的契约; Xiao 等^[17]则在乘法形式市场需求下研究了推式冷链和拉式冷链的绩效对比; Wu 等^[18]则引入了第三方冷链物流商, 同样在乘法形式市场需求下研究冷链中不同成员占优情况下的供应链绩效; 吴庆等^[19]主要研究了在乘法形式市场需求下第三方冷链物流商的保鲜努力水平对物流外包渠道的优化问题, 通过建立动态博弈模型, 分析

传统批发价合同下双方的决策行为。

在研究冷链零售商决策问题时, 很多学者选择了加法形式需求函数来刻画冷链市场需求。例如, 王磊等^[20]从消费者行为着手, 在加法形式市场需求下研究了产品的价格和新鲜度对消费者行为的影响; 相似的, 肖勇波等^[21]考虑两种新鲜等级的情形, 从研究消费者行为出发, 在加法形式市场需求下比较了零售商销售两种新鲜等级产品的混合销售策略和分离销售策略; 毛照昉等^[20]则基于策略消费者的行为特点构建报童模型, 在加法形式市场需求对消费者的新鲜程度折扣系数和选择行为影响下的零售商多种定价策略进行对比分析。同时马利军等^[23]将加法形式市场需求模式与一般随机需求的情况进行比较分析, 发现当需求噪声服从均匀分布时, 在加法形式市场需求假设下, 分销商占整个供应链的利润比例比在一般随机需求情况下的大。

然而到目前为止, 鲜有文献对加法形式需求函数下的冷链分销商决策行为进行研究, 而在对卓尔控股有限公司旗下的小雪冷链(武汉)物流有限公司(以下简称卓尔冷链)进行了为期五个月的调研后, 发现加法形式需求函数在冷链分销商的实际运营中广泛存在且具有一定合理性。使用乘法形式函数来刻画需求时不包含截距项, 即认为当新鲜程度为零即生鲜产品腐坏时需求也为零, 这在冷链研究中具有一定合理性。而使用加法形式需求函数, 当生鲜产品腐坏时依然存在需求, 当该需求为正时说明生鲜产品腐坏时仍有残值, 可折价出售; 当该需求为负时说明由于生鲜产品的腐坏引起了零售商的退货行为, 可以看出加法形式需求函数在实际运营中存在一定合理性。

针对卓尔冷链 2017 年 5 月—2017 年 10 月的交易数据进行非线性拟合, 拟合函数形式满足文中提出的相关参数假设。从图 1 中可以发现当使用含有截距的加法形式需求函数对市场需求和保鲜努力之间关系进行拟合时, 拟合优度对比不含截距的乘法形式需求函数上升 14.5%, 说明在冷链这个特殊的供应链中, 加法形式需求函数在某些情况下比乘法形式需求函数更贴合实际市场需求。

基于上述分析, 将冷链中特有的保鲜努力等变量与加法形式需求函数相结合, 研究冷链中分

销商的决策行为. 在前人研究基础上, 本文同样引入对产品新鲜程度直接相关的参数 τ , 并且同时考虑新鲜产品到达市场时的质量损失和数量损失. 不同于前人的研究, 本文在市场需求为加法形式需求函数的假设下对分销商的决策行为进行分析. 由于加法形式需求函数自身的复杂性, 本文假设分销商在做决策时已知生产商制定的批发价格 w , 在分别已知分销商的保鲜努力 τ , 订货数量 q 和零售价格 p 的三种情况下, 对其他两个决策变量进行分析.

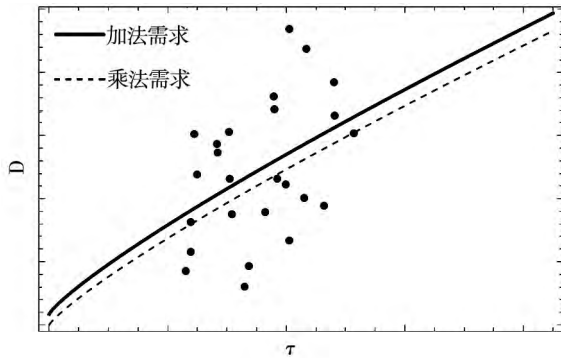


图1 卓尔冷链的保鲜努力 τ 和市场需求 D 之间关系
(2017-05-2017-10)

Fig. 1 The fitted curve of freshness-keeping effort and unit cost in Zall
(2017-05-2017-10)

1 模型及参数

在一冷链中, 假设存在一个生产商和一个分销商. 生产商以批发价格 w 将产品卖给分销商, 分销商则根据生产商制定的批发价格 w 决定购买数量 q . 生产商提供的新鲜产品具有易腐败变质的性质, 在自然条件下, 新鲜产品会随着时间逐渐腐败变质. 但是若采取合适的保鲜措施, 例如用急速冷冻、用冷柜贮存运输等方法, 可以延缓产品变质的过程. 产品的新鲜程度与分销商投入的保鲜努力 τ 有关, 投入的保鲜努力越多则产品腐败变质的越少, 产品最终运抵市场的新鲜程度就越高. 但是即使分销商付出保鲜努力, 新鲜产品依然有损失. 本文同时考虑产品的质量损失及数量损失, 分别用 ϑ 来表示产品的质量即新鲜程度 $\vartheta \in [0, 1]$, ϕ 表示产品的存活率 $\phi \in [0, 1]$, $c(\tau)$ 表示单位保鲜努力成本. 假设 $\vartheta(\tau, \varepsilon_1) = \theta(\tau) \varepsilon_1$, $\theta(\tau)$ 是关于保鲜努力 τ 的递增函数, τ 是连续变

量且 $\tau \in [\tau^l, \tau^u]$, 其中 τ^l 和 τ^u 分别表示分销商愿意投入的最低和最高保鲜努力, ε_1 是影响产品新鲜程度的参数, $\varepsilon_1 \in [0, 1]$.

同样, 假设 $\phi(\tau, \varepsilon_2) = m(\tau) \varepsilon_2$, $m(\tau)$ 是关于保鲜努力 τ 的递增函数, ε_2 是影响产品存活数量的参数, $\varepsilon_2 \in [0, 1]$. ϕ 表示产品到达目的地后的存活比例, 例如, 分销商决定采购数量为 q 的产品, 那么这些产品运到市场后的残存数量为 $q\phi$.

假设市场需求 D 是个随机变量, 并且受到产品新鲜程度 ϑ 和零售价格 p 的影响. 产品新鲜度越高, 价格越低则市场需求越大. 参考 Ha^[24] 的文章, 采用以下形式的加法形式需求函数 $D(p, \vartheta) = d(p) + \varepsilon_3$.

由于市场的基本需求受到产品新鲜度 ϑ 的影响, 那么假设 $d(p) = a\theta(\tau) \varepsilon_1 - kp$, k 为价格弹性. ε_3 是影响市场需求的随机变量, 它表示市场需求波动. 假设 ε_3 服从均匀分布, $\varepsilon_3 \in [A, B]$. 于是新鲜产品的市场需求函数又可以表示为

$$D(p, \vartheta) = a\theta(\tau) \varepsilon_1 - kp + \varepsilon_3.$$

假设 1 当没有采取任何保鲜措施时, 新鲜产品会自然腐烂变质. 如果采取保鲜措施, 投入保鲜努力, 能够显著地提高新鲜产品的新鲜程度和存活率. 随着保鲜努力的增加, 保鲜投资边际效益递减. 因此, 假设产品新鲜度函数 $\theta(\tau)$ 和产品存活率函数 $m(\tau)$ 是保鲜努力 τ 的严格递增函数, 并且随着 τ 的增大, $\theta(\tau)$ 的增大幅度逐渐减小, 即 $\theta'(\tau) < 0$. 为了便于计算及保证最优解的存在性和唯一性, 假设 $\theta''(x)$ 存在, 且 $\theta''(x) > 0$. 同理, $m'(\tau) < 0$.

假设 2 为了保证分销商的利润函数关于零售价格 p 是凸性的, 即最优解的存在性和唯一性, 假设 $p > \frac{B-A}{2}$. 该条件使分销商的利润维持在较为合理的水平, 在外界环境不利于分销商的情况下控制其损失在可接受范围内.

2 保鲜努力外生情况下分销商最优决策

在已知生产商决策且保鲜努力外生的情况

下,分销商需要做出的决策是订货数量 q 和零售价格 p . 分销商此时的利润函数可以表示如下

$$\pi_d(q, \tau | p, w) = pE_{\varepsilon_3}\{\min[qm(\tau)]\varepsilon_2, D(p, \theta(\tau))\} - q[c(\tau) + w] \quad (1)$$

定义备货因子为 $z = qm(\tau)\varepsilon_2 - d(p)$, 则 $q = \frac{z + d(p)}{m(\tau)\varepsilon_2}$. 由于 z 和 q 是一一对应的, 因此求解最优订货数量 q^* 等价于求解最优备货因子 z^* . 则等式 (1) 可以改写为

$$\pi_d(q, \tau | p, w) = pE_{\varepsilon_3}\{\min[z + d(p), D(p, \theta(\tau))]\} - \frac{z + d(p)}{m(\tau)\varepsilon_2}[c(\tau) + w] \quad (2)$$

将等式 (2) 进行化简可以得到

$$\pi_d(q, \tau | p, w) = pd(p) + \int_A^z \frac{pu}{B-A} du + \int_z^B \frac{pz}{B-A} du - \frac{z + d(p)}{m(\tau)\varepsilon_2}[c(\tau) + w] \quad (3)$$

命题 1

$$\text{令 } M = \frac{c(\tau) + w}{m(\tau)\varepsilon_2} N = \frac{a\theta(\tau)\varepsilon_1 + \frac{B+A}{2} + kM}{2k}, \Delta = \frac{3(B-A)}{16k^2} [27(B-A)M^2 - 16kN^3]$$

当保鲜努力 τ 为外生变量时, 分销商的最优定价策略为

1) 当 $\Delta > 0$ 时

$$p^* = \frac{N}{3} + \frac{1}{3} \left[N^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{9(B-A)M^2}{4k} + \sqrt{\Delta} \right) \right]^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \left[N^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{9(B-A)M^2}{4k} - \sqrt{\Delta} \right) \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$q^* = \frac{B + a\theta(\tau)\varepsilon_1 - kp^*}{m(\tau)\varepsilon_2} - \frac{(c(\tau) + w)(B-A)}{p^* m^2(\tau)\varepsilon_2^2}$$

2) 当 $\Delta \leq 0$ 时, 分销商处于亏损状态, 最优定价策略不存在.

从命题 1 看出, 在保鲜努力作为外生变量的情况下, 分销商的最优订货数量和最优定价策略都只与保鲜努力有关, 而彼此之间没有直接的联系. 也就是说, 当分销商的保鲜努力确定时, 其最优订货数量和定价也就确定了. 而在 $\Delta \leq 0$ 这两种情况下, 分销商处于亏损状态, 不存在最优决策, 说明在求解其最优决策的过程中 $\Delta \leq 0$ 这假

设是不合理的, 与实际不符.

经对卓尔冷链 5 个月的实地调研, 获取的冷链运输市场发展初期数据, 对比不同参数下仿真实验结果, 最终设定冷链分销商定价优化策略仿真参数如下 $A = -10, B = 130, k = 1, \mu = 75, \varepsilon_1 = 0.9, \varepsilon_2 = 0.7, \varepsilon_3 \in [A, B], w = 15, \theta(\tau) = \tau^{0.7}, m(\tau) = \tau^{0.6}, \rho(\tau) = 2e^{2\tau}$, 令 τ 连续变化. 经过验证, 以上参数的设计不仅符合卓尔冷链这一案例, 同时也满足前文的所有假设条件. 根据以上数据及表达式, 对命题 1 进行数据分析, 结果如表 1 和图 2 ~ 图 5 所示.

表 1 保鲜努力 τ 外生时最优价格、最优订货数量和存货数量的灵敏度分析

Table 1 The influence of freshness-keeping effort on other variables

τ	p^*	q^*	$q\phi$
0.413	99.247 1	0.159 82	0.065 811
0.42	99.027 8	2.456 92	1.021 97
0.44	98.467 4	8.506 96	3.638 68
0.46	97.997 3	13.876 9	6.096 01
0.48	97.609	18.654 3	8.406 63
0.5	97.295 6	22.912 1	10.581 5
0.52	97.050 7	26.711 8	12.63
0.54	96.869 1	30.105 2	14.560 5
0.56	96.746 1	33.136 7	16.380 2
0.58	96.677 6	35.844 1	18.095 6
0.6	96.660 2	38.26	19.712 1
0.602	96.661 2	38.486 7	19.868 6



图 2 不同保鲜努力水平 τ 下最优定价策略存在情况

Fig. 2 The influence of τ on optimal pricing strategy

从图 2 可看出, 冷链分销商的最优定价策略仅存在于一段区间中, 当保鲜努力水平过小时, 生鲜产品存货数量过少甚至无法存活, 冷链分销商不存在最优定价策略; 当保鲜努力水平过大时, 冷链分销商投入的成本过高, 会导致分销商无论如何定价都无法获得利润, 此时分销商也不存在最优定价策略. 将其应用于实践, 则可以指导冷链分

销商在进入市场时选择合适的保鲜努力水平,从而制定相对应的发展战略.

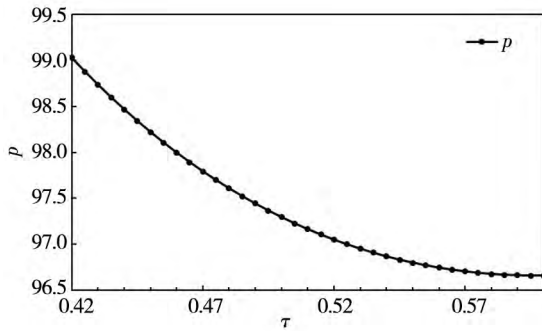


图3 不同保鲜努力水平 τ 下零售价格 p 的变化
Fig. 3 The influence of τ on p

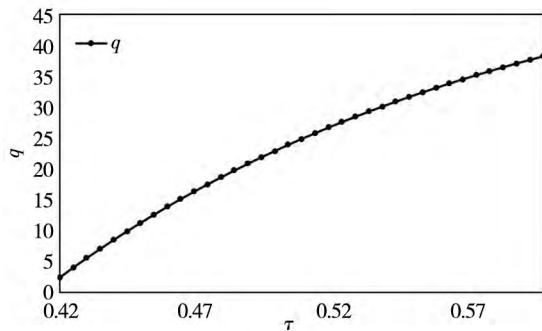


图4 不同保鲜努力水平 τ 下 q 的变化
Fig. 4 The influence of τ on q

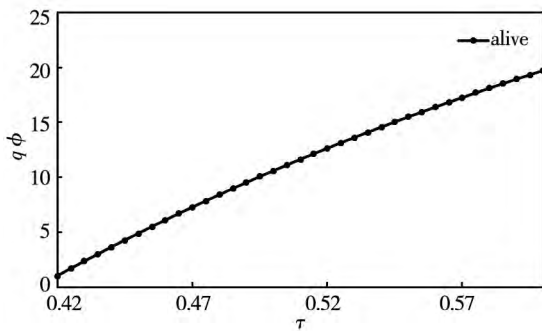


图5 不同保鲜努力水平 τ 下产品存活数量的变化
Fig. 5 The influence of τ on the quantity loss

通常情况下,作为斯坦伯格博弈的领导者,生产商首先制定批发价格,分销商作为追随者在观察到生产商的行为后,充分利用这些信息制定对自己最有利的决策.命题1是在保鲜努力作为外生变量的前提下得到的,这个假设条件经常会在现实交易中出现.例如,当一分销商已拥有了某类新鲜产品的专用运输与贮存设备时,哪怕确实存在其他类新鲜产品的市场需求,出于资金考虑,该分销商难以再采购其他新鲜产品的专用设备.因

此,在很多情况下,分销商的运输及储存资源量都是固定的,也就是说保鲜努力作为外生变量的假设具有一定合理性.

3 零售价格外生情况下分销商最优决策

在已知生产商决策且零售价格外生的情况下,容易得到此时分销商的最优订货数量依然为

$$q^* = \frac{B + a\theta(\tau)\varepsilon_1 - kp}{m(\tau)\varepsilon_2} - \frac{(c(\tau) + w)(B - A)}{pm^2(\tau)\varepsilon_2^2} \quad (4)$$

令 $M = \frac{c(\tau) + w}{m(\tau)\varepsilon_2}$,由等式(4)得到此时分销商的利润函数为

$$\begin{aligned} \pi_d(\tau | z^*, p, w) &= p[a\theta(\tau)\varepsilon_1 - kp] + \frac{B - A}{p} + \\ & p \int_A^{z^*} \frac{u}{B - A} du + \\ & pz^* \int_{z^*}^B \frac{1}{B - A} du - \\ & M[B + a\theta(\tau)\varepsilon_1 - kp] \quad (5) \end{aligned}$$

根据 M 的定义 $M = \frac{c(\tau) + w}{m(\tau)\varepsilon_2}$ 容易看出,若将损失的商品的成本转移到剩余商品的成本上,那么 M 就代表了剩余商品的调整后的单位成本.为了叙述方便,将 M 称作实际单位成本.

假设 $\frac{d^2M}{d\tau^2} > 0$,即商品的实际单位成本先随着保鲜努力的增加而减少,达到某一临界值后又随着保鲜努力的增加而增加.该假设符合实际,在保鲜努力投入很少时,商品损失很大,到达市场时的剩余数量少,新鲜度也不高,于是剩余商品的实际单位成本很大;而伴随保鲜努力投入的增加,损失的商品数量明显减少,且新鲜度提高,剩余商品的实际单位成本逐渐降低;但随着保鲜努力的投入不断增加,保鲜工作带来的效益已无法弥补其带来的成本,这时尽管商品剩余数量多且质量高,但实际单位成本也很高.故存在一个临界值 τ^0 ,成为商品实际单位成本由递减到递增的转折点.

命题2 当零售价格为外生变量时,分销商的最优保鲜努力投入策略为

- 1) 当 $\tau^u < \tau^0$ 时, 则 $\tau^* = \tau^u$. 其中 τ^0 满足 $\frac{dM(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau^0} = 0$;
- 2) 当 $\tau^l < \tau^0 < \tau^u$ 时
 - (a) 若 $N(\tau^u) + M'(\tau^u) \leq 0$, 则 $\tau^* = \tau^u$;
 - (b) 若 $N(\tau^u) + M'(\tau^u) > 0$, 则 $\tau^* = \tau^N$, τ^N 满足 $N(\tau^N) + M'(\tau^N) = 0$;
- 3) 当 $\tau^0 < \tau^l$ 时
 - (a) 若 $N(\tau^l) + M'(\tau^l) \geq 0$ 则 $\frac{d\pi_d}{d\tau} < 0$, $\tau^* = \tau^l$;
 - (b) 若 $N(\tau^u) + M'(\tau^u) \leq 0$ 则 $\frac{d\pi_d}{d\tau} \geq 0$, $\tau^* = \tau^u$;
 - (c) 若 $N(\tau^l) + M'(\tau^l) < 0 < N(\tau^u) + M'(\tau^u)$, 则 $\tau^* = \tau^N$, τ^N 满足 $N(\tau^N) + M'(\tau^N) = 0$.

冷链分销商的最优订货数量为 $q^* = \frac{B + a\theta(\tau^*)\varepsilon_1 - kp}{m(\tau^*)\varepsilon_2} - \frac{(c(\tau^*) + w)(B - A)}{pm^2(\tau^*)\varepsilon_2^2}$.

在一些情况下, 均衡市场决定了商品的市场价格, 此时分销商只需制定最优订货数量和投入的保鲜努力. 由于分销商在新鲜产品流通过程中投入的保鲜努力是有限的, 假设分销商在一固定区间内投入保鲜努力. 从命题 2 中可以看出, 不同的保鲜努力区间对应的最优保鲜努力策略是不同的, 其中 τ^0 与 τ^l 、 τ^u 的关系对分销商最优保鲜努力的决策起决定作用. τ^0 作为商品实际单位成本由递减到递增的转折点, 当 $\tau^u < \tau^0$ 时, 最优的保鲜努力为分销商投入的保鲜努力的上界; 而当 $\tau^l < \tau^0 < \tau^u$ 时, 最优的保鲜努力还要进一步取决于 $N(\tau^N) + M'(\tau^N)$ 的正负性.

在此情况下分销商的最优订货数量不仅取决于已知的市场价格, 同时也受到保鲜努力投入的影响. 在市场价格确定的前提下, 当分销商确定最优保鲜努力水平, 那么相应最优订货数量也随之确定.

我们调研的卓尔冷链正符合该种情形, 作为冷链中间段的分销商角色, 卓尔冷链面对的客户为武汉市区内的各大连锁超市, 如沃尔玛(中国)投资有限公司、武汉中百连锁仓储超市有限公司、武汉武商量贩连锁有限公司、武汉中商集团股份有限公司等等. 对于这类大型连锁超市, 市场价格基本不会发生波动. 基于此, 对卓尔冷链当前运营情况进行分析, 并提出相对应保鲜努力调整策略.

从表 2 可以看出, 使用二次函数拟合卓尔冷链对新鲜产品的保鲜努力和单位成本之间的关系是十分合理的, 同时也符合本节中所有假设. 通过观察拟合曲线可以得出——保鲜努力所在的临界点为 4.23 小时完成一次配送, 即 $\tau_0 = 0.011$. 按照当前卓尔冷链的运输效率, 远远达不到保鲜努力的临界点, 故当前只需尽力提升配送效率. 基于此, 我们为卓尔冷链提供了一系列运输排线算法, 用于提高冷链的配送效率.

表 2 卓尔冷链单位成本数据二次函数拟合情况 (2017-05—2017-10)

Table 2 Fitting situation with of quadratic function unit cost in Zall (2017-05—2017-10)

R 值	R ² 值	调整 R ² 值	F 值	P 值
0.701	0.492	0.449	11.6	<0.001***

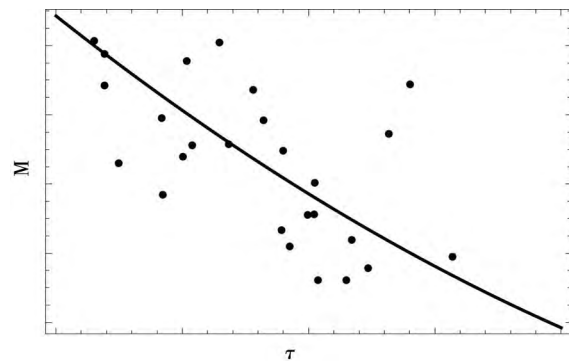


图 6 卓尔冷链的保鲜努力 τ 和单位成本 M 之间关系 (2017 年 5 月—2017 年 10 月)

Fig. 6 The fitted curve of freshness-keeping effort and unit cost in Zall (2017-05—2017-10)

4 订货数量外生情况下分销商最优决策

在分销商的订货数量和生产商的批发价格已知, 分销商的利润函数可以表示如下

$$\pi_d(p, \tau | q, w) = pE_{\varepsilon_3} \{ \min [qm(\tau)] \varepsilon_2, D(p, \theta(\tau)) \} - q[c(\tau) + w] \quad (6)$$

讨论分销商的最优零售价格时, 假设存在一个最优的零售价格 p^* 使得分销商能够取得最大的利润, 那么需要证明这个最优的零售价格 p^* 的存在性及唯一性. 将需求函数 $D(p, \theta)$ 代入式 (3), 得到分销商的利润函数

$$\pi_d(p, \tau | q, w) = p(z - \int_A^z \frac{z-x}{B-A} dx) -$$

$$q[c(\tau) + w] + p[a\theta(\tau)\varepsilon_1 - kp] \quad (7)$$

其中 $z = qm(\tau)\varepsilon_2 - a\theta(\tau)\varepsilon_1 + kp$. 存在最优的零售价格 $p^* = \frac{z - qm(\tau)\varepsilon_2 + a\theta(\tau)\varepsilon_1}{k}$, 因此求解最优零售价格等价于求解最优的备货因子 z^* .

一些分销商在每次采购时采取固定订货数量的订购策略, 在这种情况下, 分销商需要决策最优的零售价格和投入的保鲜努力. 从命题 3 中可以看出, 当已知生产商的批发价格信息后, 分销商的最优零售价格策略与其投入的保鲜努力水平有关. 根据零售价格 p^* 的形式可以看出, 其结构十分复杂, 难以用 p^* 求解分销商的最优保鲜努力的解析解. 为了研究在该种情况下分销商的最优保鲜努力策略及其对零售价格的影响, 设计一组数值实验, 得出相应的结论.

经对卓尔冷链 5 个月的实地调研, 获取的冷链运输市场成熟期数据. 与发展初期相比, 市场成熟期的市场需求波动降低, 消费者对于价格的敏感度上升即价格弹性增加, 上游批发商对分销商收取的批发费用降低.

对比不同参数下仿真实验结果, 最终设定市场成熟时冷链分销商定价优化策略仿真参数如下: $A = -10$, $B = 20$, $k = 1.8$, $\mu = 300$, $q = 100$, $\varepsilon_1 = 0.9$, $\varepsilon_2 = 0.7$, $w = 5$, $\theta(\tau) = \tau^{0.7}$, $m(\tau) =$

$\tau^{0.6}$, $c(\tau) = 2e^{2\tau}$, 令 τ 连续变化. 经过验证, 以上参数的设计不仅符合卓尔冷链这一案例, 同时也满足前文的所有假设条件. 根据以上数据及表达式, 对命题 3 中情形 (1) 进行数据分析, 结果如表 3 和图 7 ~ 图 11 所示. 当分销商确定订货数量 q 以后, 所得利润与投入的保鲜努力是正相关的, 即投入的保鲜努力越大, 利润就越大. 当保鲜努力的投入比较小时, 产品到达市场时的新鲜程度和存活率都很低, 大部分产品都在运输过程中腐败变质了, 分销商遭受的损失较大, 可以看到在这种情况下分销商的利润是负值, 即当投入的保鲜努力太小时, 分销商必然亏损. 当保鲜努力的投入超过 0.40 时, 分销商开始盈利; 当分销商的保鲜努力投入小于 0.40 时, 则处于亏损状态, 因此, 可以将 0.40 看做是分销商投入的保鲜努力下限.

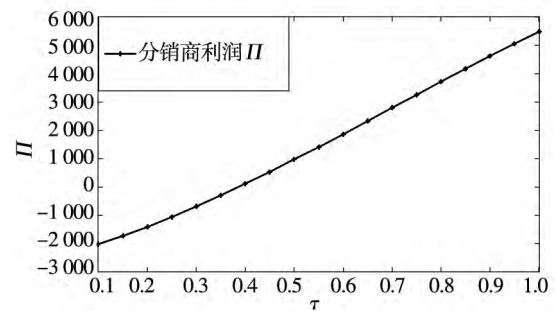


图7 保鲜努力 τ 对分销商利润的影响

Fig. 7 The influence of τ on profit

表3 保鲜努力 τ 对各变量的灵敏度分析

Table 3 The influence of freshness-keeping effort on other variables

τ	$\theta(\tau)\varepsilon_1$	$m(\tau)\varepsilon_2$	$c(\tau)$	p	z	Π	D_{\max}	D_{\min}	$qm(\tau)\varepsilon_2$
0.20	0.32	0.38	2.98	27.65	15.56	-1 423.92	57.74	27.74	53.30
0.24	0.37	0.42	3.23	31.04	15.92	-1 147.90	63.55	33.55	59.46
0.28	0.41	0.47	3.50	34.28	16.17	-855.67	69.06	39.06	65.23
0.32	0.45	0.50	3.79	37.38	16.35	-549.33	74.32	44.32	70.67
0.36	0.49	0.54	4.11	40.39	16.48	-230.63	79.37	49.37	75.84
0.40	0.53	0.58	4.45	43.30	16.57	98.88	84.22	54.22	80.79
0.44	0.56	0.61	4.82	46.14	16.63	437.80	88.92	58.92	85.55
0.48	0.60	0.64	5.22	48.92	16.67	784.82	93.46	63.46	90.13
0.52	0.63	0.68	5.66	51.64	16.69	1 138.72	97.88	67.88	94.56
0.56	0.67	0.71	6.13	54.31	16.70	1 498.30	102.17	72.17	98.86
0.60	0.70	0.74	6.64	56.93	16.69	1 862.41	106.35	76.35	103.04
0.64	0.73	0.77	7.19	59.51	16.68	2 229.87	110.44	80.44	107.11
0.68	0.76	0.79	7.79	62.05	16.65	2 599.54	114.43	84.43	111.08
0.72	0.79	0.82	8.44	64.56	16.63	2 970.23	118.33	88.33	114.95

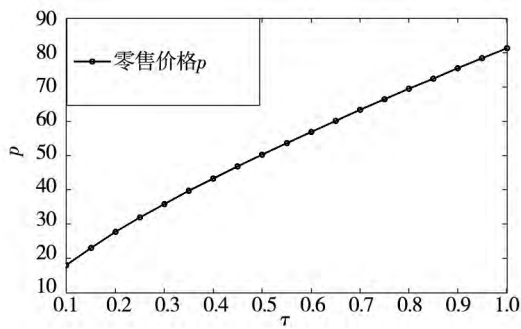


图 8 保鲜努力 τ 对零售价格的影响

Fig. 8 The influence of τ on p

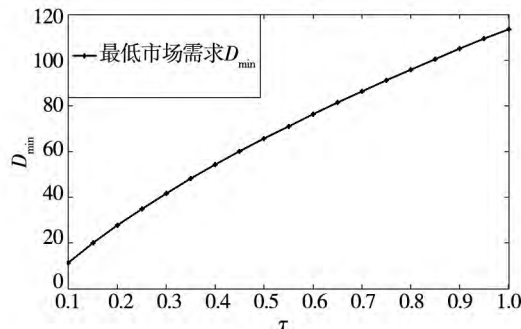


图 9 保鲜努力 τ 对市场最低需求的影响

Fig. 9 The influence of τ on the least D

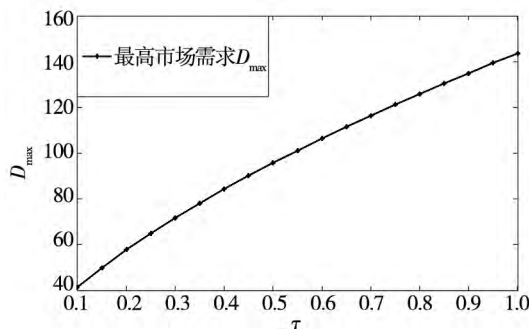


图 10 保鲜努力 τ 对市场最高需求的影响

Fig. 10 The influence of τ on the highest D

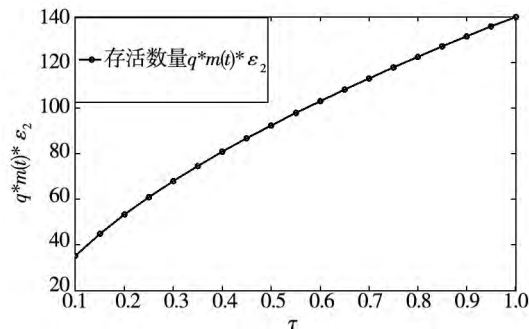


图 11 保鲜努力 τ 对产品存活数量的影响

Fig. 11 The influence of τ on the quantity loss

命题 3 当订货数量为外生变量时, 分销商的最

优决策为 1) 当 $\frac{4qm(\tau) - 2a\theta(\tau) - 3B + A}{2k} < 0$ 时

$$p^* = \frac{1}{3k} \{ [a\theta(\tau) \varepsilon_1 - qm(\tau) \varepsilon_2]^2 + aAa\theta(\tau) \varepsilon_1 + (6B - 8A) qm(\tau) \varepsilon_2 + A^2 \}^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3k} [a\theta(\tau) \varepsilon_1 - qm(\tau) \varepsilon_2 + A]$$

2) 当 $\frac{4qm(\tau) - 2a\theta(\tau) - 3B + A}{2k} > 0$ 时

$$p^* = \frac{a\theta(\tau) \varepsilon_1 - qm(\tau) \varepsilon_2 + B}{k}$$

在这两种情况下, 零售商的最优零售价格随着保鲜努力投入的增加而增大, 利润也随之增加。

从表 3 中还可以看出, 保鲜努力的投入对备货因子 z 的影响不显著, 随着保鲜努力 τ 的持续增大, 备货因子 z 的变化始终很微弱, 并且这种变化的幅度随着 τ 的增大而减小。分销商运到市场的产品始终能够满足市场的最小需求, 但无法满足市场最大需求。为了满足市场最大需求必定要订购大量的产品, 但市场需求的波动会导致产品的浪费, 故分销商势必无法满足所有市场需求。

同时从图 8 可以看出, 零售价格 p 与保鲜努力 τ 成正相关, 随着保鲜努力的增大, 分销商制定的零售价格也随之增大, 增幅随这 τ 的增大逐渐呈现减缓趋势, 在现实交易中这可能是由于过高的价格消除了顾客购买的欲望。

同样, 对命题 3 中情形 2) 进行数据分析, 可以得到类似规律, 这里就不再对情形 2) 进行了, 相关结论参照情形 1)。

5 结束语

新鲜产品独特的性质决定了冷链相比于传统供应链具有不同的性质。本文引入保鲜努力用以刻画分销商在冷链中投入的保鲜工作, 进一步描述新鲜产品到达市场的数量与质量。使用了中国 500 强民营企业卓尔控股有限公司旗下的小雪冷链(武汉)物流有限公司的运营数据验证了加法形式需求函数的合理性, 从而使用加法形式需求函数刻画市场需求。与其他研究冷链分销商决策问题的文献相比, 本文完善了冷链分销商决策问题的相关研究。

由于加法形式需求函数的复杂性, 本文分别在保鲜努力、零售价格和订货数量外生的情况下,

研究另外两个变量,得出以下结论:(1)当保鲜努力外生时,分销商的最优订货数量和最优零售价格只与保鲜努力有关,且互相无联系,即最优订货数量和最优零售价格随着保鲜努力的确定也随之确定;(2)当零售价格外生时,分销商的最优保鲜努力与产品实际单位成本关于保鲜努力函数的一阶导数零点有关。当确定了最优保鲜努力时,分销商的最优订货数量也随之确定。根据该结论,本文分析了卓尔冷链2017年5月—2017年10月的交

易数据,为该公司提供相应的保鲜努力投入策略;(3)当订货数量外生时,分销商制定的零售价格随保鲜努力增加而增大,所获得的利润也随着保鲜努力而递增,但边际利润随保鲜努力递减。

最后,由于加法形式需求函数给模型推导带来的复杂性,本文研究了保鲜努力、零售价格、订货数量这三个决策变量其中之一外生时,冷链分销商的决策行为。从数值上研究了冷链分销商在三个变量联合决策时的行为,显示了本文的可拓性。

参考文献:

- [1] Blackburn J, Scudder G. Supply chain strategies for perishable products: The case of fresh produce [J]. *Production & Operations Management*, 2010, 18(2): 129–137.
- [2] Chao X, Gong X, Shi C, et al. Approximation algorithms for capacitated perishable inventory systems with positive lead times [J]. *Management Science*, 2018, 64(11): 5038–5061.
- [3] Hu P, Shum S, Yu M. Joint inventory and markdown management for perishable goods with strategic consumer behavior [J]. *Operations Research*, 2016, 64(1): 118–134.
- [4] Lodree E J, Uzochukwu B M. Production planning for a deteriorating item with stochastic demand and consumer choice [J]. *International Journal of Production Economics*, 2008, 116(2): 219–232.
- [5] Chen S C, Teng J T. Inventory and credit decisions for time-varying deteriorating items with up-stream and down-stream trade credit financing by discounted cash flow analysis [J]. *European Journal of Operational Research*, 2015, 243(2): 566–575.
- [6] 毛照昉, 刘弯弯, 李辉. 季节性易逝品预售与回购联合决策研究 [J]. *管理科学学报*, 2016, 19(2): 74–84.
Mao Zhaofang, Liu Wanwan, Li Hui. Joint strategy of advance-selling and buy-back for seasonal perishable products [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2016, 19(2): 74–84. (in Chinese)
- [7] 张新鑫, 申成霖, 侯文华. 考虑竞争者进入威胁的易逝品动态定价机制 [J]. *管理科学学报*, 2016, 19(10): 34–47.
Zhang Xinxin, Shen Chenglin, Hou Wenhua. Dynamic pricing for perishable product considering the threat of entry and consumer behaviors [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2016, 19(10): 34–47. (in Chinese)
- [8] 周树华, 张正洋, 张艺华. 构建连锁超市生鲜农产品供应链的信息管理体系探讨 [J]. *管理世界*, 2011, (3): 1–6.
Zhou Shuhua, Zhang Zhengyang, Zhang Yihua. Discussion on the information management system of fresh agricultural products supply chain of supermarket [J]. *Management World*, 2011, (3): 1–6. (in Chinese)
- [9] Bolton J M, Liu W B. Creating an effective china cold supply chain—Current status, challenges and implementation considerations [R]. Accenture Report. America: 2006.
- [10] Cai X, Chen J, Xiao Y, et al. Fresh-product supply chain management with logistics outsourcing [J]. *Omega*, 2013, 41(4): 752–765.
- [11] Sun G. Research on the fresh agricultural product supply chain coordination with supply disruptions [J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2013, (5): 135–142.
- [12] 浦徐进, 金德龙. 生鲜农产品供应链的运作效率比较: 单一“农超对接”vs. 双渠道 [J]. *中国管理科学*, 2017, (1): 98–105.
Pu Xujin, Jin Delong. The operational efficiency measurement of argo-food supply chain: The single “farmer-supermarket direct purchase” vs. dual channel [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2017, (1): 98–105. (in Chinese)
- [13] 但斌, 丁松, 伏红勇. 信息不对称下销地批发市场的生鲜供应链协调 [J]. *管理科学学报*, 2013, 16(10): 40–50.
Dan Bin, Ding Song, Fu Hongyong. Fresh supply chain coordination by wholesale market in sale place under information asymmetry [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2013, 16(10): 40–50. (in Chinese)
- [14] Cai X, Chen J, Xiao Y, et al. Optimization and coordination of fresh product supply chains with freshness-keeping effort [J]. *Production and Operations Management*, 2010, 19(3): 261–278.
- [15] Xiao Y, Jian C, Xu X. Fresh product supply chain coordination under CIF business model with long distance transportation

- [J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2008, 28(2): 19–34.
- [16] Cai X, Zhou X. Optimal policies for perishable products when transportation to export market is disrupted [J]. *Production and Operations Management*, 2014, 23(5): 907–923.
- [17] Xiao Y, Chen J. Supply chain management of fresh products with producer transportation [J]. *Decision Sciences*, 2012, 43(5): 785–815.
- [18] Wu Q, Mu Y, Feng Y. Coordinating contracts for fresh product outsourcing logistics channels with power structures [J]. *International Journal of Production Economics*, 2015, 160(2): 94–105.
- [19] 吴庆, 但斌, 钱宇, 等. 努力水平影响损耗的低值易逝品 TPL 协调合同 [J]. *管理科学学报*, 2014, (12): 15–26.
Wu Qing, Dan Bin, Qian Yu, et al. Third party logistics coordinating contracts for low value perishable products with loss dependent on logistics effort levels [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2014, (12): 15–26. (in Chinese)
- [20] 王磊, 但斌. 基于消费者选择行为的生鲜农产品保鲜和定价策略研究 [J]. *管理学报*, 2014, 11(3): 449–454.
Wang Lei, Dan Bin. Fresh-keeping and pricing strategy for fresh agricultural product based on customer choice [J]. *Chinese Journal of Management*, 2014, 11(3): 449–454. (in Chinese)
- [21] 肖勇波, 吴鹏, 王雅兰. 基于顾客选择行为的多质量等级时鲜产品定价策略研究 [J]. *中国管理科学*, 2010, 18(1): 58–65.
Xiao Yongbo, Wu Peng, Wang Yalan. Pricing strategies for fresh products with multiple quality levels based on customer choice behavior [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2010, 18(1): 58–65. (in Chinese)
- [22] 毛照昉, 王方圆. 基于消费者行为和估值折扣差异的易逝品两期定价决策研究 [J]. *管理学报*, 2017, 14(3): 441–450.
Mao Zhaofang, Wang Fangyuan. Two-period pricing decision on perishable products considering difference of customer behavior and valuation discount [J]. *Chinese Journal of Management*, 2017, 14(3): 441–450. (in Chinese)
- [23] 马利军, 刘芳梅, 林旭东. 加法形式需求函数模式下具有风险厌恶零售商的供应链合作博弈分析 [J]. *系统管理学报*, 2011, 20(4): 398–405.
Ma Lijun, Liu Fangmei, Lin Xudong. Channel bargaining with risk-averse retailer under the additive demand model [J]. *Journal of System & Management*, 2011, 20(4): 398–405. (in Chinese)
- [24] Ha A Y. Supplier-buyer contracting: Asymmetric cost information and cutoff level policy for buyer participation [J]. *Naval Research Logistics*, 2015, 48(1): 41–64.

Optimal decisions of cold chain distributor under uncertain in demand

ZHENG Yu-ting¹, LI Jian-bin¹, CHEN Zhi-yuan^{2*}, MING Mang-mang¹

1. School of Management, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China;

2. School of Economics and Management, Wuhan University, Wuhan 430072, China

Abstract: The paper studies a distributor in fresh products supply chain (cold chain). The freshness-keeping effort is introduced in order to depict the quantity and quality of the fresh products arriving in the market and the distributor's optimal decisions. Compared with the previous studies, this paper uses an additive demand function to depict the market demand. Relative enterprise data are used to justify the rationality of this demand function. The paper finds that when the fresh effort is exogenous, the optimal order quantity and the optimal retail price of the distributor are only associated with the freshness-keeping effort. When the retail price is exogenous, the optimal freshness-keeping effort of the distributor depends on the zero point of the first order optimization condition of the actual unit cost of the product. When the order quantity is exogenous, the retail price and the profit from freshness-keeping effort increase with the freshness-keeping effort, but the marginal profit from freshness-keeping effort decreases with freshness-keeping effort. Applying the results to Zall Cold Chain, optimal strategies of freshness-keeping effort are suggested.

Key words: freshness product supply chain; freshness-keeping effort; additive demand

附录

命题1 将文中等式(3)对 z 分别进行一阶求导和二阶求导,得到 $\frac{d \pi_d(z | \tau, p, w)}{dz} = p \int_z^B \frac{1}{B-A} du - \frac{c(\tau) + w}{m(\tau) \varepsilon_2}$,
 $\frac{d^2 \pi_d(z | \tau, p, w)}{dz^2} = -\frac{p}{B-A} < 0$, 所以 $\pi_d(z | \tau, p, w)$ 是凹函数. 并且由于 $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{d \pi_d(z | \tau, p, w)}{dz} = p - \frac{c(\tau) + w}{m(\tau) \varepsilon_2} > 0$,
 $\lim_{z \rightarrow B} \frac{d \pi_d(z | \tau, p, w)}{dz} = 0 - \frac{c(\tau) + w}{m(\tau) \varepsilon_2} < 0$,

所以存在唯一 $z^* \in (A, B)$ 使 $\frac{d \pi_d(z | \tau, p, w)}{dz} = 0$, 即 $p(1 - z^*) - \frac{c(\tau) + w}{m(\tau) \varepsilon_2} = 0$.

可得 $z^* = B - \frac{(c(\tau) + w)(B - A)}{pm(\tau) \varepsilon_2}$, 又因为 $z = qm(\tau) \varepsilon_2 - d(p)$ 因此可以得到最优的订货量

$$q^* = \frac{B + a\theta(\tau) \varepsilon_1 - kp}{m(\tau) \varepsilon_2} - \frac{(c(\tau) + w)(B - A)}{pm^2(\tau) \varepsilon_2^2}.$$

下面考虑分销商的最优零售价格, 将 q^* 代入文中式(3) 则分销商的利润函数可以改写为

$$\pi_d(p | z^*, \tau, w) = pd(p) + \int_A^{z^*} \frac{pu}{B-A} du + \int_{z^*}^B \frac{pz^*}{B-A} du - (c(\tau) + w) \left[\frac{B + a\theta(\tau) \varepsilon_1 - kp}{m(\tau) \varepsilon_2} - \frac{(c(\tau) + w)(B - A)}{pm^2(\tau) \varepsilon_2^2} \right] \quad (8)$$

将式(8) 分别对 p 进行一阶求导和二阶求导得到

$$\frac{d \pi_d(p | z^*, \tau, w)}{dp} = a\theta(\tau) \varepsilon_1 - 2kp + \int_A^{z^*} \frac{u}{B-A} du + B \int_{z^*}^B \frac{1}{B-A} du + \frac{(c(\tau) + w)k}{m(\tau) \varepsilon_2} - \frac{(c(\tau) + w)^2(B - A)}{p^2 m^2(\tau) \varepsilon_2^2} \quad (9)$$

$$\frac{d^2 \pi_d(p | z^*, \tau, w)}{dp^2} = -2k + \frac{(c(\tau) + w)^2(B - A)}{p^3 m^2(\tau) \varepsilon_2^2}$$

由于 $z^* \in (A, B)$, 即 $A < B - \frac{(c(\tau) + w)(B - A)}{pm(\tau) \varepsilon_2} < B$, 那么 $0 < \frac{c(\tau) + w}{pm(\tau) \varepsilon_2} < 1$ 另外, 由假设2可知 $0 < \frac{B - A}{p} < 2$, 所以 $\frac{d^2 \pi_d}{dp^2} < 0$. 令 $M = \frac{c(\tau) + w}{m(\tau) \varepsilon_2}$, 那么式(9) 可以改写为

$$\frac{d \pi_d(p | z^*, \tau, w)}{dp} = a\theta(\tau) \varepsilon_1 - 2kp + \frac{B + A}{2} + kM - \frac{B - A}{2p^2} M^2$$

由 $0 < \frac{c(\tau) + w}{pm(\tau) \varepsilon_2} < 1$ 得知, $p > M$, 所以 $p \in (M, +\infty)$.

且因为 $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{d \pi_d(p | z^*, \tau, w)}{dp} = -\infty < 0$, $\lim_{p \rightarrow M} \frac{d \pi_d(p | z^*, \tau, w)}{dp} = a\theta(\tau) \varepsilon_1 - kM + A > 0$.

所以, 必定存在 $p^* \in (M, +\infty)$ 使 $\frac{d \pi_d}{dp} = 0$ 从而分销商的利润达到最大, p^* 满足 $\theta(\tau) \varepsilon_1 - 2kp + \frac{B + A}{2} + kM -$

$$\frac{B - A}{2p^2} M^2 = 0, \text{ 即 } p^3 - \frac{a\theta(\tau) \varepsilon_1 + \frac{B + A}{2} + kM}{2k} p^2 + \frac{(B - A) M^2}{4k} = 0.$$

令 $N = \frac{a\theta(\tau) \varepsilon_1 + \frac{B + A}{2} + kM}{2k}$, 则 p^* 满足 $p^3 - Np^2 + \frac{(B - A) M^2}{4k} = 0$. 将 p^* 代入式(8), 分销商的利润函数则可以

$$\text{改写为 } \pi_d(p | z^*, \tau, w) = -3kp^{*2} + 4kNp^* - [a\theta(\tau) \varepsilon_1 + B]M \quad (10)$$

那么根据盛金公式可以得到 $\Delta = \frac{3(B - A) M^2}{16k^2} [27(B - A) M^2 - 16kN^3]$

$$(i) \text{ 当 } \Delta > 0 \text{ 则 } p^* = \frac{N + \left[N^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{9(B - A) M^2}{4k} + \sqrt{\Delta} \right) \right]^{\frac{1}{3}} + \left[N^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{9(B - A) M^2}{4k} - \sqrt{\Delta} \right) \right]^{\frac{1}{3}}}{3}$$

$$(ii) \text{ 当 } \Delta = 0 \text{ 即 } \frac{M^2}{N^2} = \frac{16kN}{27(B - A)} \text{ 则 } p^* = N + \frac{9(B - A) M^2}{4kN^2} = N + \frac{9(B - A)}{4k} \times \frac{16kN}{27(B - A)} = \frac{7}{3}N$$

将 $p^* = \frac{7}{3}N$ 代入式(10) 得到 $\pi_d = -7kN^2 - [a\theta(\tau) \varepsilon_1 + B]M < 0$

显然, 在这种情况下分销商处于亏损状态, 因此, 关于 $\Delta = 0$ 的假设是不合理的, 即 $p^* = \frac{7}{3}N$ 这种情况不予考虑.

(iii) 当 $\Delta < 0$ 无符合条件实数根.

命题 2 将文中等式 (5) 对 τ 求导, 得到

$$\frac{d \pi_d(\tau | z^*, p, w)}{d \tau} = (p - M) a \theta'(\tau) \varepsilon_1 + \left[\frac{M(B - A)}{p} - (B + a \theta(\tau) \varepsilon_1 - kp) \right] \frac{d M}{d \tau} \quad (11)$$

令 $I(\tau) = \frac{M(B - A)}{p} - (B + a \theta(\tau) \varepsilon_1 - kp)$ 不难看出 $I(\tau) < 0$ 于 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 并且

$$I'(\tau) = \frac{(B - A)}{p} M'(\tau) - a \theta'(\tau) \varepsilon_1 \quad (12)$$

令 $I'(\tau) = \frac{(B - A)}{p} M'(\tau) - a \theta'(\tau) \varepsilon_1 = 0$ 其解为 τ^l 则 $\frac{(B - A)}{p} M'(\tau^l) = a \theta'(\tau^l) \varepsilon_1$ 由于 $\frac{B - A}{p} > 0$ $a \theta'(\tau^l) \varepsilon_1 > 0$, 所以 $M'(\tau^l) > 0$ 因此可以得到 $\tau^l > \tau^0$ 并且

$$I''(\tau) = \frac{(B - A)}{p} M''(\tau) - a \theta''(\tau) \varepsilon_1 > 0 \quad (13)$$

令 $N(\tau) = \frac{(p - M) a \theta'(\tau) \varepsilon_1}{I(\tau)}$, $N(\tau) < 0$ 于 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 于是式 (11) 又可以表示为

$$\frac{d \pi_d(\tau | z^*, p, w)}{d \tau} = I(\tau) [N(\tau) + M'(\tau)]$$

于是可以得出以下结论:

(1) 若 $\tau^u < \tau^0$ 则 $M'(\tau) < 0$ 进而 $\frac{d \pi_d(\tau | z^*, p, w)}{d \tau} > 0$, 即 π_d 在区间 (τ^l, τ^u) 上单调递增, 因此分销商的最优保鲜努力 $\tau^* = \tau^u$;

(2) 若 $\tau^l < \tau^0 < \tau^u$, 由以上的假设易知 $M'(\tau)$ 是单调递增的, 对于 $N(\tau)$ 则有

$$N'(\tau) = \frac{[-M'(\tau) a \theta'(\tau) \varepsilon_1 + (p - M) a \theta''(\tau) \varepsilon_1] I(\tau) - (p - M) a \theta'(\tau) \varepsilon_1 I'(\tau)}{I^2(\tau)}$$

(i) 当 $\tau \in (\tau^l, \tau^0)$ 时, $M'(\tau) < 0$ 且已知 $N(\tau) < 0$ 则由式 (12) 可知 $\frac{d \pi_d(\tau | z^*, p, w)}{d \tau} > 0$;

(ii) 当 $\tau \in (\tau^0, \tau^l)$ 时, $I'(\tau) < 0$, 容易得到 $N'(\tau) > 0$, 即 $N(\tau)$ 于 (τ^0, τ^l) 上递增;

(iii) 当 $\tau \in (\tau^l, +\infty)$ 时, $I'(\tau) > 0$, $N'(\tau)$ 的符号需要进一步判断.

在式 (13) 中 $-M'(\tau) a \theta'(\tau) \varepsilon_1 I(\tau) > 0$, 如果 $(p - M) a \theta''(\tau) \varepsilon_1 I(\tau) - (p - M) a \theta'(\tau) \varepsilon_1 I'(\tau) > 0$, 即 $(p - M) a [\theta''(\tau) \varepsilon_1 I(\tau) - \theta'(\tau) \varepsilon_1 I'(\tau)] > 0$ 则可以判断 $N(\tau)$ 于 $\tau \in (\tau^l, +\infty)$ 上也是单调递增的, 下面证明这个猜想.

令 $h(\tau) = \theta''(\tau) \varepsilon_1 I(\tau) - \theta'(\tau) \varepsilon_1 I'(\tau)$ 则

$$h'(\tau) = \theta'''(\tau) \varepsilon_1 I(\tau) - \theta''(\tau) \varepsilon_1 I'(\tau) < 0$$

因此 $h(\tau)$ 是单调递减函数, 并且

$$h(\tau^l) = \theta'''(\tau^l) \varepsilon_1 I(\tau^l) - \theta''(\tau^l) \varepsilon_1 I'(\tau^l) = \theta'''(\tau^l) \varepsilon_1 I(\tau^l) - 0 > 0$$

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} h(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} [\theta'''(\tau) \varepsilon_1 I(\tau) - \theta''(\tau) \varepsilon_1 I'(\tau)]$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \theta'''(\tau) \varepsilon_1 I(\tau) - 0 > 0 \quad (14)$$

至此, 可以得出当 $\tau \in (\tau^l, +\infty)$ 时, $h(\tau) > 0$, 即 $(p - M) a [\theta''(\tau) \varepsilon_1 I(\tau) - \theta'(\tau) \varepsilon_1 I'(\tau)] > 0$, 以上猜想被证实, 进而可以判断 $N(\tau)$ 于 $\tau \in (\tau^l, +\infty)$ 上是单调递增的. 由 (ii) (iii) 可知 $N(\tau)$ 于 $(\tau^0, +\infty)$ 上递增, 则可以得到以下结论:

(a) 若 $N(\tau^u) + M'(\tau^u) \leq 0$ 则 $\frac{d \pi_d(\tau | z^*, p, w)}{d \tau} \geq 0$, π_d 于 (τ^0, τ^u) 上单调递增, 结合 (i) 得到 π_d 于 (τ^l, τ^u) 上单调递增, 因此 $\tau^* = \tau^u$;

(b) 若 $N(\tau^u) + M'(\tau^u) > 0$ 此时 $\frac{d \pi_d(\tau | z^*, p, w)}{d \tau} < 0$ 结合 (i) 得到 $\tau^* = \tau^N$, τ^N 满足 $N(\tau^N) + M'(\tau^N) = 0$;

(3) 当 $\tau^0 < \tau^l$ 时, 可以得到 $h(\tau) < 0$ 依然成立, 因此 $h(\tau)$ 在 $\tau \in (0, +\infty)$ 上单调递减, 根据式 (14) 可知 $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} h(\tau) > 0$, 因此可以得到 $h(\tau) > 0$ 在 $\tau \in (0, +\infty)$ 上恒成立, 进而得到 $N'(\tau) > 0$. 于是可以得到以下结论:

(a) 若 $N(\tau^l) + M'(\tau^l) \geq 0$ 则 $\frac{d \pi_d(\tau | z^*, p, w)}{d \tau} < 0$, $\tau^* = \tau^l$;

(b) 若 $N(\tau^u) + M'(\tau^u) \leq 0$ 则 $\frac{d \pi_d(\tau | z^*, p, w)}{d \tau} \geq 0$, $\tau^* = \tau^u$;

若 $N(\tau^l) + M(\tau^l) < 0 < N(\tau^u) + M(\tau^u)$ 则 $\tau^* = \tau^N, \sigma^N$ 满足 $N(\tau^N) + M(\tau^N) = 0$.

命题3 对文中等式(7)进行求导得到

$$\frac{d \pi_d(p, \sigma | q, w)}{dz} = \frac{1}{k} \left(z - z \int_A^z \frac{1}{B-A} dx + \int_A^z \frac{x}{B-A} dx \right) - p \int_A^z \frac{1}{B-A} dx - p + \frac{a\theta(\tau) \varepsilon_1}{k}$$

$$\frac{d^2 \pi_d(p, \sigma | q, w)}{dz^2} = -\frac{2(z-A) + p}{B-A} < 0$$

$$\lim_{z \rightarrow A} \frac{d \pi_d(p, \sigma | q, w)}{dz} = \frac{qm(\tau) \varepsilon_2}{k} > 0$$

$$\lim_{z \rightarrow B} \frac{d \pi_d(p, \sigma | q, w)}{dz} = \frac{4qm(\tau) \varepsilon_2 - 2a\theta(\tau) \varepsilon_1 - 3B + A}{2k}$$

1) 若 $\frac{4qm(\tau) \varepsilon_2 - 2a\theta(\tau) \varepsilon_1 - 3B + A}{2k} < 0$ 则必然存在唯一 z^* 使 $\frac{d \pi_d(p, \sigma | q, w)}{dz} = 0$ 即必然存在唯一 p^* 使

$$\frac{d \pi_d(p, \sigma | q, w)}{dp} = 0. \text{ 那么 } z^* \text{ 必定满足}$$

$$\frac{d \pi_d(p, \sigma | q, w)}{dz} = \frac{1}{k} \left(z - z \int_A^z \frac{1}{B-A} dx + \int_A^z \frac{x}{B-A} dx \right) - p \int_A^z \frac{1}{B-A} dx - p + \frac{a\theta(\tau) \varepsilon_1}{k} = 0 \quad (15)$$

求解上式,可以得到

$$-3z^2 + [4A + 2qm(\tau) \varepsilon_2 - 2a\theta(\tau) \varepsilon_1]z + [2(B-2A)qm(\tau) \varepsilon_2 + 2Aa\theta(\tau) \varepsilon_1 - A^2] = 0 \quad (16)$$

由式(16)得

$$z^2 + \frac{2}{3} [a\theta(\tau) \varepsilon_1 - qm(\tau) \varepsilon_2 - 2A]z + \frac{1}{9} [a\theta(\tau) \varepsilon_1 - qm(\tau) \varepsilon_2 - 2A]^2 =$$

$$\frac{1}{3} [2(B-2A)qm(\tau) \varepsilon_2 + 2Aa\theta(\tau) \varepsilon_1 - A^2] + \frac{1}{9} [a\theta(\tau) \varepsilon_1 - qm(\tau) \varepsilon_2 - 2A]^2$$

所以

$$z + \frac{1}{3} [a\theta(\tau) \varepsilon_1 - qm(\tau) \varepsilon_2 - 2A] =$$

$$\pm \sqrt{\frac{1}{3} [2(B-2A)qm(\tau) \varepsilon_2 + 2Aa\theta(\tau) \varepsilon_1 - A^2] + \frac{1}{9} [a\theta(\tau) \varepsilon_1 - qm(\tau) \varepsilon_2 - 2A]^2}$$

因为 $z + \frac{1}{3} [a\theta(\tau) \varepsilon_1 - qm(\tau) \varepsilon_2 - 2A] = \frac{1}{3} [2z + kp - 2A]$ 并且 $A < z < B$ 所以 $z - A > 0, \frac{1}{3} [2z + kp -$

$2A] > 0$ 因此可以得到

$$z + \frac{1}{3} [a\theta(\tau) \varepsilon_1 - qm(\tau) \varepsilon_2 - 2A] =$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{[a\theta(\tau) \varepsilon_1 - qm(\tau) \varepsilon_2]^2 + A^2 + 2Aa\theta(\tau) \varepsilon_1 + 2(3B-4A)qm(\tau) \varepsilon_2}$$

因此可以得到

$$z^* = \frac{\sqrt{[a\theta(\tau) \varepsilon_1 - qm(\tau) \varepsilon_2]^2 + A^2 + 2Aa\theta(\tau) \varepsilon_1 + 2(3B-4A)qm(\tau) \varepsilon_2} - [a\theta(\tau) \varepsilon_1 - qm(\tau) \varepsilon_2] + 2A}{3}$$

$$p^* = \frac{\sqrt{[a\theta(\tau) \varepsilon_1 - qm(\tau) \varepsilon_2]^2 + A^2 + 2Aa\theta(\tau) \varepsilon_1 + 2(3B-4A)qm(\tau) \varepsilon_2} + 2[a\theta(\tau) \varepsilon_1 - qm(\tau) \varepsilon_2 + A]}{3k}$$

由式(7)及式(15)得到

$$\pi_d(p, \sigma | q, w) = kp^* \frac{z^*}{B-A} - [c(\tau) + w]q$$

2) 若 $\frac{4qm(\tau) \varepsilon_2 - 2a\theta(\tau) \varepsilon_1 - 3B + A}{2k} > 0$, 则 π_d 在 $z \in (A, B)$ 上单调递增, 因此 $z^* = B, p^* =$

$\frac{a\theta(\tau) \varepsilon_1 - qm(\tau) \varepsilon_2 + B}{k}$ 分销商利润函数可改写为

$$\pi_d(p, \sigma | q, w) = p^* [a\theta(\tau) \varepsilon_1 - kp^*] + p^* \frac{A+B}{2} - [c(\tau) + w]q$$