参数暧昧环境下投资者决策与管制措施研究①
——基于随机禀赋与风险资产之间相关系数暧昧性的视角

何俊勇[1]，郭荣怡[2]，张顺明[3*]，石丽娜[4]

(1. 北京第二外国语学院经济学院，北京 100024；2. 华夏银行博士后科研工作站，北京 100005；3. 中国人民大学财政金融学院，北京 100872；4. 北京航空航天大学经济管理学院，北京 100191)

摘要：假定金融市场中简单投资者具有暧昧厌恶偏好，在期末获得 1 个单位随机禀赋(非金融资产收益)，而当前时刻他们对随机禀赋与风险资产未来收益之间的相关系数存在暧昧性，考察这种暧昧性对资产定价和社会福利的影响. 研究表明：相关系数暧昧性将导致投资者有限参与和资产定价扭曲. 如果随机禀赋与风险资产负相关，且风险资产权益溢价为正，则简单投资者的超额收益为正；如果不相关，或者风险资产权益溢价为零，则简单投资者无法获得超额收益；其它情况下简单投资者的超额收益为负. 为缓解参数暧昧性，提高投资者参与市场的积极性，市场管理者可能实施提高复杂投资者的准入门槛、增强信息披露等管制措施. 进一步研究发现，提高复杂投资者的准入门槛将减少其投资者占比，降低社会福利水平；而加强信息披露，提高市场透明度的措施可以提高社会福利水平.

关键词：相关系数暧昧性；暧昧厌恶；资产定价；社会福利水平

中图分类号：F830.59 **文献标识码**：A **文章编号**：1007－9807(2020)10－0001－20

0 引 言

暧昧性(ambiguity)描述的是市场主体在作出投资决策时，经济环境所具有的不确定性，有别于经典金融理论中风险的概念，暧昧不确定性无法在事前用唯一的先验概率测度来描述. Knight[1]最早提出了暧昧性的概念，将经济环境的不确定性区分为风险和 Knight 不确定性，其中后者被 Ellsberg[2]重新命名为暧昧性.

自提出暧昧性这一概念以来，大量学者便开始探讨暧昧环境下投资者的决策问题，Gilboa 和 Schmeidler[3]首先对暧昧厌恶投资者的投资决策问题进行了公理化分析，提出最大最小期望效用理论(maxmin expected utility，MEU)，为暧昧环境下投资者行为模式的研究建立了系统的理论框架. MEU 模型在研究暧昧不确定性时存在一定瑕疵，它无法对暧昧性本身的大小和投资者暧昧厌恶程度加以区分，而且 MEU 模型所描述的投资者过度悲观. 为了考察投资者的暧昧程度，Ghirardato 等[4]提出了 α-MEU 模型，Klibanoff 等[5]构建了暧昧环境下的光滑模型. Izhakian[6,7]提出了不确定概率期望效用理论，为实证研究暧昧性对资产定价的影响奠定了理论基础[8,9]. 但由于 MEU 模型简单易用，在求解暧昧环境下最优决策问题时容易得到解析解，同时还能合理刻画暧昧厌恶投资者的决策行为，所以 MEU 模型在暧昧环境下的投资决策分析中应用广泛[10].

在 MEU 分析框架的基础上，暧昧厌恶的概念被引入到了市场均衡和资产定价的理论分析中，产生了许多暧昧环境下的资产定价理论，例

① 收稿日期：2017－09－13；修订日期：2020－05－02.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(71573220；71773123)；北京第二外国语学院首都对外文化贸易基地科研资助项目(WHMY19A001).
通讯作者：张顺明(1966—)，男，湖北广水人，博士，教授，博士生导师. Email：szhang@ruc.edu.cn

如 Chen 和 Epstein[11]，Epstein 和 Schneider[12]，Epstein 和 Ji[13,14] 建立了连续时间的参数暧昧环境下的资产定价理论，Illeditsch[15] 构建了存在暧昧信息更新的资产定价理论等. 当这些暧昧环境下的定价理论被应用于现实的金融市场时，很多金融异象都得到合理解释，例如 Cao 等[16]，Epstein 和 Schneider[17]，Easley 和 O'Hara[18, 19]，Mele 和 Sangiorgi[20]，这些研究表明，当投资者对经济参数存在暧昧性时，市场会出现有限参与均衡.

Illeditsch[15] 发现当投资者对信息质量存在暧昧性时，投资者会构建风险资产组合来对冲信息质量的暧昧性，这时如果价格变动不大，则投资者不会轻易改变这个风险资产组合，即投资者资产组合惯性. Illeditsch 等[21] 指出金融市场中还存在信息惯性，即新信息并不总反映在均衡股票价格中. 然而，金融市场中的信息对资产定价起决定作用[22].

Huang 等[23] 研究了在部分投资者对风险资产之间相关系数存在暧昧性的情况下，资本市场的有限参与和安全投资转移的现象. 何俊勇和张顺明[24] 探讨了相关系数暧昧性环境下公司的市场选择问题.

虽然上述文献构建了经济学家研究暧昧性的理论框架和研究范式，解释了一些金融市场“异象”，但是这些文献关注的重点仍然局限在金融市场和金融资产本身存在的暧昧性上，如风险资产的期望收益、方差、风险资产之间的相关系数、暧昧信息、资产溢价等[25－29]，却忽视了市场以外的因素. 他们把金融市场从整个宏观经济中抽象出来单独加以研究，这就隐含了金融市场与整个宏观经济的其他因素不相关的假定，忽略了二者之间的相互作用. 这种关于金融市场和金融资产本身的暧昧性假定可以称为金融市场内部参数暧昧性假定. 事实上，金融市场作为宏观经济的重要组成部分，它与宏观经济本身存在着千丝万缕的联系，特别是投资者净收入这个因素，显然也是投资者在金融市场上做出投资决策时不得不考虑的重要内容.

与金融市场内部参数暧昧性假定不同，本文将投资者的净收入这一宏观经济因素纳入到金融市场均衡和资产定价的研究中,假设投资者对自身非金融收入与风险资产未来收益之间的相关系数存在暧昧性,考察暧昧性对金融市场中的资产定价和政策效果的影响. 探究这种形式的参数暧昧性的原因在于:

第一，无论是以欧美为代表的发达股票市场还是类似我国大陆的新兴股票市场，投资者一般都可以分为两类，一类是机构投资者，一类是散户投资者. 大体来讲，机构投资者主要是一些金融机构，他们的注册和经营需要花费一定成本，同时他们以金融资产作为唯一的经营对象，由此产生的收益是他们唯一的收入来源，而散户投资者的收入来源更加多样化. 一般而言，居民或者家庭总会有工资收入、经营公司的收入、房屋出租收入等等，也会有各种生活开支，把这些除金融资产投资收益以外收入和支出的净值称为散户投资者的随机禀赋. 这里称之为随机禀赋是因为这些收入和支出的净值并不是事前确定的，而与整个国家甚至国际的经济形势密切相关. 但与具有高流动性的金融资产又有所不同，在短期内，这些收入和支出的净值对居民个人或家庭而言又是不可选择的，例如不论经济形势好坏，居民进入和退出劳动力市场并不是那么自由，一个开办的企业也不是随时可以解散和重组，等等.

因此，基于投资者收入模式不同，将投资者区分开来，在此基础上研究投资者的随机禀赋与金融市场的联动性是对经济现实进行模型化的必然要求.

第二，投资者随机禀赋与金融市场风险资产收益之间存在一定的相关关系. 例如，股票市场是一个国家的经济晴雨表，股票市场的表现与国家经济形势密切相关，而国家经济形势又会对居民收入产生重大的影响. 金融市场之外的随机禀赋是散户投资者现金流的重要组成部分，其重要性甚至超过金融资产的投资收益，所以二者之间相关性的大小会对散户投资者未来财富的期望收益和波动性产生重要影响，从而影响散户投资者在金融市场上的投资决策，进而影响到金融市场均衡和资产定价. 因此，要研究我国沪深股票市场的定价特征和市场管制的政策效果，就不得不考虑这个相关系数在其中所起到的作用.

第三，已有文献表明，要准确估计金融资产未来收益的各阶矩信息已经十分困难，而随机禀

赋与金融资产之间相关系数的估计不仅需要分析金融市场的数据，还要分析居民的收入和支出的数据，散户投资者要完成这个参数的估计几乎是不可能的，目前也没有任何机构会专门对这个参数进行研究和披露，所以要研究散户投资者的投资决策，就不得不予以充分考虑.

基于 Illeditsch[15] 和 Easley 等[19]，本文假设金融市场中存在两种可交易资产，一种是无风险资产，期初和期末的价值都为 1; 另一种是风险资产，期末的收益服从正态分布. 假设经济中存在两类投资者: 简单投资者和复杂投资者. 简单投资者的净收入包括两部分，一部分是金融市场上的投资收益，另一部分是期末得到的随机禀赋. 随机禀赋服从正态分布，且不可被投资者自由选择. 随机禀赋与风险资产的未来收益之间存在相关关系，但是简单投资者对两者之间的相关系数存在暧昧性. 简单投资者是暧昧厌恶的，其偏好用 MEU 模型[3] 来刻画. 复杂投资者的收入全部为金融市场上交易金融资产获得收益，他们所面临的决策环境只存在风险而不存在暧昧性，因此他们调整资产持有头寸最大化自己的期望效用.

在以上假设的基础上，本文构建了一般均衡模型，探讨参数暧昧性对市场均衡和资产定价的影响. 进一步地分析，将复杂投资者所占比例 μ 内生化以后，考察金融市场的管制措施对市场均衡、资产定价和社会福利水平的影响.

相对于前述文献，本文在以下方面做了拓展: 首先，研究重点是散户投资者的随机禀赋及其与金融资产的相关性对金融市场和资产定价产生的影响. 由于目前大部分研究金融市场的理论文献更多是撇开居民收入单纯地研究投资者的行为模式和投资决策对市场均衡和资产定价的作用，很少有文献关注居民非金融资产收入与金融市场之间的相互作用，而对于散户投资者来讲，非金融资产的收入在居民收入中可能占据很大的比例，非金融资产收入与金融市场之间的相关性必然会对散户投资者的投资决策产生重要的影响，所以对散户投资者的随机禀赋及其与金融资产的相关性的研究具有现实意义; 其次，研究的暧昧性的来源与以上文献不同，他们大多都是假设投资者对金融市场上风险资产的参数存在暧昧性，例如风险资产的期望收益、方差以及风险资产之间的相关系数等. 而本文认为，散户投资者的随机禀赋与金融资产之间的相关性也是个难以精确测算的参数，因此假设投资者对随机禀赋与金融资产之间的相关系数存在暧昧性. 最后，本文的结论与上述文献也有差异，例如由于随机禀赋的存在，简单投资者持有风险资产除了有获取收益的需求外，还有对冲未来随机禀赋的需要，这使得简单投资者在风险资产的交易上可能比复杂投资者更加激进，甚至迫使复杂投资者与之对赌.

1　模型设定

假设金融市场上存在两种可供交易的资产: 一种是无风险资产，不妨假设为现金，其单位资产价值恒为 1，供给具有完全弹性; 另一种是风险资产，其市场供给为 1 单位，资产价格为 p，期末价值为随机变量，记为 $\tilde{\nu}$，假设

$$\tilde{\nu} = \bar{\nu} + \tilde{\varepsilon} \tag{1}$$

式中 $\bar{\nu} > 0$，$\tilde{\varepsilon} \sim N(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$，$\sigma_{\varepsilon} > 0$. 这里所描述的风险资产可以理解为金融市场上的股票，且假设市场上不存在卖空限制，也不需要支付保证金和利息.

假设市场上交易者的数量是个连续统 [0, 1]，他们在进入金融市场前是完全同质的，每人的初始禀赋为 1 单位风险资产，他们的效用函数均为关于财富的常数绝对风险厌恶(CARA) 效用函数，风险厌恶系数为 1，即投资者关于财富的效用函数为 $u(w) = -e^{-w}$. 假设最初所有人都是简单投资者，在金融市场开放之前，选择继续作为简单投资者或者花费成本 c 转变为复杂投资者，复杂投资者所占的比例记为 μ. 假设简单投资者除了可以在金融市场上交易金融资产以外，还会在期末获得一部分随机禀赋 $\widetilde{Z}$，其中 $\widetilde{Z} \sim N(0, \sigma_Z^2)$，$\sigma_Z > 0$.

这里的简单投资者可以认为是市场中的散户投资者，而复杂投资者可以认为是机构投资者，可以认为成本 c 为开办一家机构所需要支付的费用或者理解为信息收集和处理所需要的花费，

$c > 0$，随机禀赋 $\tilde{Z}$ 的意义如引言所述.

假设简单投资者的随机禀赋与金融市场上的风险资产之间存在相关关系，其相关系数假设为 ρ，但是投资者对 ρ 的取值存在暧昧性，投资者并不能准确了解两者之间相关系数的真实值，也无法给出 ρ 的准确分布，假设相关系数的真实值为 $\hat{\rho}$，那么投资者只能估计出 $\hat{\rho} \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}]$，其中 $-1 \leqslant \underline{\rho} \leqslant \hat{\rho} \leqslant \bar{\rho} \leqslant 1$. 为了简单起见，可以假设 $\underline{\rho} = \hat{\rho} - \Delta\rho$，$\bar{\rho} = \hat{\rho} + \Delta\rho$，其中 $\Delta\rho > 0$ 表示的是投资者暧昧性的大小.

本模型的时间线是这样的：将交易时期分为 3 段，在 0 时刻，所有投资者都是简单投资者，初始禀赋为 1 单位风险资产，他们都清楚如果继续作为简单投资者，那么在期末将会获得 1 个随机禀赋，然后投资者决定是否支付成本 c 成为复杂投资者；在 1 时刻后，市场开放，投资者根据自己所得信息和观察到的资产价格进行交易；在期末市场达到均衡，投资收益被兑现，金融市场关闭，投资者根据所得收益进行消费.

2　市场一般均衡

首先假设复杂投资者的比例 μ 为固定值，然后将 μ 内生化，考察当投资者可以根据预期的转换成本自由选择继续作为简单投资者还是转变成为复杂投资者时投资者的均衡比例，并基于此来分析市场的定价效率、讨论市场管制措施的政策效果.

2.1　需求函数

假设 D_0 为复杂投资者在风险资产上持有的头寸，由于复杂投资者的初始禀赋为 1 单位风险资产，支付一个转换成本 c，则在交易期末的财富为

$$\tilde{w}_0 = p + (\tilde{v} - p) D_0 - c \tag{2}$$

投资者效用函数为 CARA 效用函数，根据附录 A，在给定 D_0 和风险资产价格 p 的条件下，复杂投资者期望效用可表示为

$$\mathrm{E}[-\exp(-\tilde{w}_0)] = -\exp\left[-\left(\mathrm{E}(\tilde{w}_0) - \frac{1}{2}\mathrm{Var}(\tilde{w}_0)\right)\right] \tag{3}$$

式中 $\mathrm{E}(\tilde{w}_0)$ 和 $\mathrm{Var}(\tilde{w}_0)$ 分别是期望算子和方差算子，且

$$\mathrm{E}(\tilde{w}_0) = p + (\bar{v} - p) D_0 - c$$

$$\mathrm{Var}(\tilde{w}_0) = D_0^2 \sigma_\varepsilon^2$$

根据假设，复杂投资者的期末财富全部为市场交易所得，不存在随机禀赋与金融市场之间的相关系数暧昧性，他们根据期望效用最大化准则在金融市场选择持有头寸，因此复杂投资者的需求函数为

$$D_0^* = \frac{\bar{v} - p}{\sigma_\varepsilon^2}$$

这个结果是具有 CARA 效用函数的投资者最优化选择的标准结果. 在本文的设定中，复杂投资者代表金融市场的机构投资者，作为一个公司，经营收入就是它的所有财产，不像散户一样在期末面临一个随机禀赋，所以得到这个结果也在预料之中.

简单投资者代表的是散户投资者，他们的资产一部分来源于金融资产的投资收益，还有一部分来源于随机禀赋，对简单投资者而言，随机禀赋和风险资产之间的相关系数存在暧昧性，在此情况下，期望效用函数无法合理描述简单投资者的偏好，这里采用 Gilboa 和 Schmeidler[3] 提出的最大最小期望效用理论来刻画简单投资者的偏好，所以简单投资者的最优化问题为

$$\max_{D_\mathrm{T}} \min_{\rho \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}]} \mathrm{E}_\rho(-\mathrm{e}^{-\tilde{w}_\mathrm{T}}) \tag{4}$$

式中 $\tilde{w}_\mathrm{T}$ 为预算约束，$\tilde{w}_\mathrm{T} = p + (\tilde{v} - p) D_\mathrm{T} + \tilde{Z}$，$\mathrm{E}_\rho(\cdot)$ 表示当相关系数为 ρ 时的期望算子. 附录 B 已证明，上述最优化问题等价为

$$\max_{D_\mathrm{T}} \min_{\rho \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}]} CE_\mathrm{T} = \max_{D_\mathrm{T}} \min_{\rho \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}]} \left(\mathrm{E}_\rho[\tilde{w}_\mathrm{T}] - \frac{1}{2}\mathrm{Var}_\rho(\tilde{w}_\mathrm{T})\right) \tag{5}$$

式中 CE_T 为 ρ 已知的条件下风险资产的确定性等价. $\mathrm{E}_\rho(\tilde{w}_\mathrm{T}) = p + (\bar{v} - p) D_\mathrm{T}$，$\mathrm{Var}_\rho(\tilde{w}_\mathrm{T}) = \sigma_\varepsilon^2 D_\mathrm{T}^2 + \sigma_Z^2 + 2\rho D_\mathrm{T} \sigma_\varepsilon \sigma_Z$，则

$$\mathrm{E}_\rho[\tilde{w}_\mathrm{T}] - \frac{1}{2}\mathrm{Var}_\rho(\tilde{w}_\mathrm{T}) = -\frac{1}{2}[\sigma_\varepsilon^2 D_\mathrm{T}^2 + \sigma_Z^2 + 2\rho D_\mathrm{T} \sigma_\varepsilon \sigma_Z] + p + (\bar{v} - p) D_\mathrm{T}$$

将相关条件代入后，简单投资者最优化目标函数可写为

$$\min_{\rho\in[\underline{\rho},\bar{\rho}]} CE_{\mathrm{T}}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2D_{\mathrm{T}}^2-\dfrac{1}{2}\sigma_Z^2+g_{\max}D_{\mathrm{T}}+p,\ D_{\mathrm{T}}<0\\ -\dfrac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2D_{\mathrm{T}}^2-\dfrac{1}{2}\sigma_Z^2+g_{\min}D_{\mathrm{T}}+p,\ D_{\mathrm{T}}\geqslant 0\end{cases}$$

其中

$$g(\rho)=\bar{v}-p-\rho\sigma_\varepsilon\sigma_Z,\ g_{\min}=\bar{v}-p-\bar{\rho}D\sigma_\varepsilon\sigma_Z$$

$$g_{\max}=\bar{v}-p-\underline{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z$$

所以简单投资者的需求函数为

$$D_{\mathrm{T}}=\begin{cases}\dfrac{g_{\max}}{\sigma_\varepsilon^2},\ g_{\max}<0\\ 0,\quad g_{\min}\leqslant 0\leqslant g_{\max}\\ \dfrac{g_{\min}}{\sigma_\varepsilon^2},\ g_{\min}>0\end{cases}$$

当 $\bar{v}=1$，$\sigma_\varepsilon=\sigma_Z=0.5$，$\bar{\rho}=0.3$，$\underline{\rho}=-0.3$ 时，简单投资者和复杂投资者的需求曲线如图 1 所示，其中虚线表示复杂投资者的需求曲线，实线表示简单投资者的需求曲线.

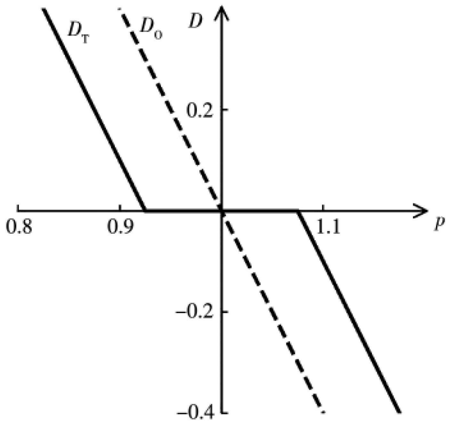

图 1　两类投资者的需求曲线

Fig. 1 Demand curves of investors

由于简单投资者具有暧昧厌恶偏好并用 MEU 模型来表示其效用函数，因此简单投资者在评估一项投资的价值所考量的是这项投资在最糟糕的情况下给自己带来的效用. 如果在所有情况下这项投资都会有正的期望收益，那么简单投资者就认为这项资产被市场低估，简单投资者就会买进该项资产；相反，如果在所有情况下这项投资都会有负的期望收益，那么简单投资者就认为这项资产被市场高估，就会卖出该项资产；如果这项投资的期望收益在某些情况下为正值，在另一些情况下为负值，那么简单投资者将无法判断这项资产被高估还是低估，由于暧昧厌恶，简单投资者会不参与这项资产的交易.

2.2　一般均衡

在均衡条件下，市场将会出清，即

$$\mu D_0+(1-\mu)D_{\mathrm{T}}=1 \tag{6}$$

将两类投资者的需求函数分别代入上式即可得市场均衡价格和风险资产的均衡持有头寸，可以得到定理 1.

定理 1　假设 $0<\mu<1$，市场的一般均衡是以下 3 种均衡类型中的一种。

1) 当 $\dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu}<\underline{\rho}\leqslant 1$ 时，市场处于第 1 类均衡类型，是共同参与均衡，市场均衡价格为

$$p=\bar{v}-[\sigma_\varepsilon^2+(1-\mu)\sigma_\varepsilon\sigma_Z\underline{\rho}]$$

简单投资者对风险资产的均衡持有头寸为 $D_{\mathrm{T}}^*=1-\dfrac{\mu\sigma_Z\underline{\rho}}{\sigma_\varepsilon}$，复杂投资者的均衡持有头寸为 $D_0^*=1+\dfrac{(1-\mu)\sigma_Z\underline{\rho}}{\sigma_\varepsilon}$.

2) 当 $-1\leqslant\underline{\rho}\leqslant\dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu}\leqslant\bar{\rho}\leqslant 1$ 时，市场处于第 2 类均衡类型，是有限参与均衡，市场均衡价格为

$$p^*=\bar{v}-\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\mu}$$

此时，简单投资者不参与风险资产的交易，即 $D_{\mathrm{T}}^*=0$，复杂投资者持有头寸为 $D_0^*=\dfrac{1}{\mu}$.

3) 当 $-1\leqslant\bar{\rho}<\dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu}$ 时，市场处于第 3 类均衡类型，是共同参与均衡，市场均衡价格为

$$p=\bar{v}-[\sigma_\varepsilon^2+(1-\mu)\sigma_\varepsilon\sigma_Z\bar{\rho}]$$

简单投资者对风险资产的均衡持有头寸为 $D_{\mathrm{T}}^*=1-\dfrac{\mu\sigma_Z\bar{\rho}}{\sigma_\varepsilon}$，复杂投资者均衡持有头寸为 $D_0^*=1+\dfrac{(1-\mu)\sigma_Z\bar{\rho}}{\sigma_\varepsilon}$.

当 $\mu=0.5$，$\sigma_\varepsilon=0.1$，$\sigma_Z=0.4$ 时，简单投资者和复杂投资者的均衡需求随 $\underline{\rho}$ 和 $\bar{\rho}$ 的变动如图 2 所示，其中虚线表示复杂投资者的需求曲线，实线表示简单投资者的需求曲线，上图表示的是第 1 类均衡结果，下图表示的是第 3 类均衡结果. 第 2 类均衡是有限参与均衡，简单投资者不参与

风险资产的市场交易，图中没有标出. 可以看出，当 $\bar{\rho}<0$ 时，简单投资者比复杂投资者持有更多的风险资产，且当 $\bar{\rho}<-0.5$ 时，复杂投资者进入了风险资产的空头，而简单投资者持有的风险资产超过了市场上的初始供给.

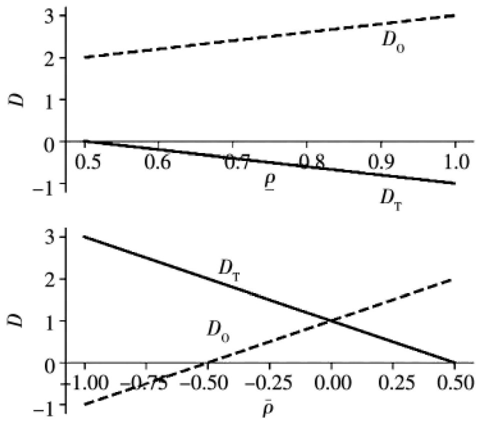

图 2 投资者均衡需求随 $\underline{\rho}$ 和 $\bar{\rho}$ 的变动

Fig. 2 Demand of investors varies with $\underline{\rho}$ and $\bar{\rho}$

从定理 1 可知，由于非金融收入与金融市场之间相关系数存在暧昧性，当 $-1\leqslant\underline{\rho}\leqslant\dfrac{\sigma_{\varepsilon}}{\sigma_{Z}\mu}\leqslant\bar{\rho}\leqslant 1$ 时，简单投资者无论如何调整金融资产的头寸，都无法确知所获得的收益能否对冲不确定的非金融收入，暧昧厌恶的简单投资者将选择不参与风险资产交易，金融市场将处于有限参与均衡。这个结果在预料之中，类似的结果在研究金融市场内部参数暧昧性的文献中也经常遇到. 所不同的是市场处于共同参与均衡的情形. 在金融市场内部参数暧昧性假定下，金融市场只可能出现两种均衡，一种是有限参与均衡，另一种是投资者均持有风险资产多头头寸的共同参与均衡. Easley 等[18,19] 认为，暧昧厌恶的投资者往往会表现得更加保守，他们的风险资产头寸只会比复杂投资者更少，而不会进入与复杂投资者相反的头寸. Huang 等[23] 主张，风险资产之间相关系数暧昧性可能导致简单投资者的交易行为比复杂投资者更加激进，但是两种投资者对赌的均衡仍然不可能出现. 本文定理 1 的结果显示，在第 1 类市场均衡下，$D_{\mathrm{T}}<0$，$D_0>0$，简单投资者确信，风险资产与随机禀赋高度正相关，简单投资者选择进入风险资产的空头头寸以对冲未来收入的随机波动，此时复杂投资者进入风险资产的多头头寸，市场呈现出对赌均衡. 在第 3 类市场均衡下，风险资产与随机禀赋间的相关系数取 $\bar{\rho}$ 时简单投资者将面临最差处境，在此情形下，简单投资者会认为两者之间的相关系数就是 $\bar{\rho}$. 当 $0<\bar{\rho}<\dfrac{\sigma_{\varepsilon}}{\sigma_{Z}\mu}$ 时，简单投资者会持有部分风险资产，但由于简单投资者认为风险资产与未来随机禀赋正相关，简单投资者对风险资产的态度会更加谨慎，其持有的风险资产头寸也会相对较少，即 $D_{\mathrm{T}}<D_0$，此时简单投资者对风险资产的持有头寸表现相对保守；当 $\bar{\rho}<0$ 时，简单投资者确信风险资产与未来随机禀赋负相关，持有风险资产不但可以获取其期望收益，还可以对冲未来不确定的随机禀赋，因此风险资产将更受简单投资者青睐，在风险资产的持有头寸上，简单投资者会更加激进，即 $D_{\mathrm{T}}>D_0$，特别是当 $-1<\bar{\rho}\leqslant-\dfrac{\sigma_{\varepsilon}}{(1-\mu)\sigma_{Z}}$ 时，$D_0\leqslant 0$，复杂投资者持有风险资产空头头寸，简单投资者持有风险资产多头头寸，两类投资者在风险资产上形成对赌. 可以看出，随机禀赋的存在，改变了简单投资者对风险资产的风险容忍程度，这使得简单投资者表现出了相对"激进"的行为特征. 因此，本文认为，金融市场内部参数的暧昧性与金融市场外部参数的暧昧性对市场均衡会产生不同的影响.

以上 3 种均衡广泛存在于金融市场的子市场中，以期货市场为例. 假设简单投资者是生产不锈钢的企业主，由于不锈钢的价格事先无法确定，未来不锈钢的销售利润是企业主未来的随机禀赋. 期货市场存在可交易的螺纹钢期货合约，虽然企业主无法准确判断未来不锈钢的销售收入与螺纹钢期货间的相关系数，但是企业主有理由相信，二者之间存在高度正相关关系，企业主会选择进入螺纹钢期货合约的空头，以降低未来收入的波动性，这就是第 1 类均衡的结果. 对于玻璃期货而言，虽然玻璃期货与不锈钢未来销售收入可能存在一定的相关关系，例如玻璃价格上涨可能意味着宏观经济走强，不锈钢的需求可能也会增加. 但企业主很难确定他们之间相关性的大小，保险起见，他们不会进入玻璃期货的交易之中，这就是第 2 类均衡的结果. 企业主的随机禀赋不但受到不锈钢价格的影响，还会受到原材料

铁的价格影响. 铁的价格上升会增加生产成本，降低企业主利润. 因此，企业主有理由相信，未来的销售利润与铁矿石期货之间存在高度负相关关系，企业主会进入铁矿石期货的多头头寸，这就是第 3 类市场均衡的结果.

3　风险资产权益溢价

假设模型中的风险资产代表了股票，那么股票的股权溢价可以表示为

$$EP \equiv \mathrm{E}_{\hat{\rho}}(\tilde{v} - p^*)$$

其中 $\mathrm{E}_{\hat{\rho}}(\cdot)$ 表示当相关系数取真实值 $\hat{\rho}$ 时相应表达式的期望.

当市场处于第 1 类均衡时

$$\mathrm{E}_{\hat{\rho}}(\tilde{v} - p^*) = \sigma_\varepsilon^2 + (1-\mu)\sigma_\varepsilon\sigma_Z\underline{\rho}$$

此时 $\dfrac{\partial EP}{\partial \Delta\rho} < 0$. 在第 1 类均衡中，未来的随机禀赋 $\tilde{Z}$ 与风险资产的收益高度正相关. 此时简单投资者在做出投资决策时会认为相关系数取值为 $\underline{\rho} = \hat{\rho} - \Delta\rho$，根据均衡条件，$\underline{\rho} > 0$，为了对冲掉部分未来随机禀赋的波动性，简单投资者持有风险资产的空头头寸. 当 Δρ 增大时，风险资产和未来随机禀赋的正相关性减弱，此时简单投资者只能持有更少的风险资产空头来对冲掉未来随机禀赋的部分波动性，所以风险资产的空方力量减弱，价格上升，导致风险资产的权益溢价降低.

当市场处于第 2 类均衡时

$$\mathrm{E}_{\hat{\rho}}(\tilde{v} - p^*) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\mu}$$

此时 $\dfrac{\partial EP}{\partial \Delta\rho} = 0$. 简单投资者不参与风险资产的交易，所有风险资产被复杂投资者持有，因此相关系数暧昧性对风险资产的价格无影响，也就不会改变风险资产的权益溢价.

当市场处于第 3 类均衡类型时

$$\mathrm{E}_{\hat{\rho}}(\tilde{v} - p^*) = \sigma_\varepsilon^2 + (1-\mu)\sigma_\varepsilon\sigma_Z\bar{\rho}$$

此时 $\dfrac{\partial EP}{\partial \Delta\rho} > 0$. 简单投资者持有风险资产多头头寸，此时简单投资者认为相关系数取值 $\bar{\rho} = \hat{\rho} + \Delta\rho$，当 $\Delta\rho$ 增大时，简单投资者面临的相关系数暧昧性上升，对随机禀赋导致的未来财富波动性大小越没把握，所以简单投资者越不愿参与风险资产的交易，为了吸引简单投资者参与风险资产的交易，风险资产只有提供更多的权益溢价. 特别地，当 $\bar{\rho} < 0$ 时，$\Delta\rho$ 的增大导致风险资产和随机禀赋之间的负相关性减弱，随机禀赋能够对冲的风险减少，所以简单投资者变得不再那么激进，风险资产的需求减少，价格降低，这也导致了风险资产的权益溢价上升. 因此，本文有下面的结论。

命题 1　当 $\mu(\mu \in (0,1))$ 为定值，相关系数暧昧性的降低对风险资产的权益溢价的影响取决于简单投资者对风险资产的持有头寸. 当 $\dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu} < \underline{\rho} \leqslant 1$ 时，简单投资者对风险资产持有空头头寸，此时相关系数暧昧性的降低会使得权益溢价增大；当 $\underline{\rho} \leqslant \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu} \leqslant \bar{\rho}$ 时，简单投资者不持有风险资产，此时相关系数暧昧性的变化对风险资产的权益溢价无影响；当 $-1 \leqslant \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu}$ 时，简单投资者对风险资产持有多头头寸，此时相关系数暧昧性的降低会使得权益溢价减小.

这个命题具有以下含义：随着信息披露制度的完善，市场透明度逐渐增加，市场上可获得的公开信息越来越多，投资者对经济参数的估计越来越准确，经济参数的暧昧性逐渐降低，一般而言风险资产的权益溢价会逐渐下降，Easley 等[19]就解释了这一现象. 但是，当简单投资者对未来随机禀赋与风险资产之间的相关系数存在暧昧性时，市场透明度的提高却并不一定意味着权益溢价下降，当简单投资者确信风险资产与随机禀赋之间是强正相关，即 $\underline{\rho} > \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu}$ 时，市场透明度的提高导致的 Δρ 下降却会引起权益溢价上升. 只有当简单投资者确信随机禀赋与风险资产之间的相关系数小于 $\dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu}$ 时，市场透明度的上升才会引起权益溢价减小.

4　CAPM 分析

假设金融市场上的风险资产只有 1 种，因此市场收益率可记为

$$\tilde{R}_{\mathrm{M}} = \frac{\tilde{v}}{p} - 1$$

简单投资者和复杂投资者各自的超额收益分别为

$$\tilde{R}_{\mathrm{T}} = \frac{\tilde{w}_{\mathrm{T}}}{p} - 1 = \frac{D_{\mathrm{T}}(\tilde{v} - p) + \tilde{Z}}{p}$$

$$\tilde{R}_{\mathrm{O}} = \frac{\tilde{w}_{\mathrm{O}}}{p - c} - 1 = \frac{D_{\mathrm{O}}(\tilde{v} - p)}{p - c}$$

根据 CAPM 模型中 β 值的计算公式，简单投资者和复杂投资者的未来收益所对应的 β 值分别为

$$\beta_{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{Cov}_{\hat{\rho}}(\tilde{R}_{\mathrm{M}}, \tilde{R}_{\mathrm{T}})}{\mathrm{Var}_{\hat{\rho}}(\tilde{R}_{\mathrm{M}})} = D_{\mathrm{T}} + \frac{\hat{\rho}\sigma_Z}{\sigma_\varepsilon}$$

$$\beta_{\mathrm{O}} = \frac{\mathrm{Cov}_{\hat{\rho}}(\tilde{R}_{\mathrm{O}}, \tilde{R}_{\mathrm{T}})}{\mathrm{Var}_{\hat{\rho}}(\tilde{R}_{\mathrm{M}})} = \frac{pD_{\mathrm{O}}}{p - c}$$

由此，可以计算两类投资者以股票市场为基准的超额收益

$$\alpha_{\mathrm{T}} = \mathrm{E}_{\hat{\rho}}[\widetilde{R}_{\mathrm{T}}] - \beta_{\mathrm{T}}\mathrm{E}_{\hat{\rho}}[\widetilde{R}_{\mathrm{M}}] = -\frac{\hat{\rho}\,\sigma_Z(\bar{v} - p)}{\sigma_\varepsilon\, p}$$

$$\alpha_{\mathrm{O}} = \mathrm{E}_{\hat{\rho}}[\widetilde{R}_{\mathrm{O}}] - \beta_{\mathrm{O}}\mathrm{E}_{\hat{\rho}}[\widetilde{R}_{\mathrm{M}}] = 0$$

在本文的模型中，金融市场上的风险资产只有 1 种，所以机构投资者在股票市场上总是持有市场组合，所以机构投资者无法获得超额收益，因此 $\alpha_{\mathrm{O}} = 0$.

对于简单投资者所获得的超额收益进行计算时，本文是把简单投资者的随机禀赋看成一项不可自行选择的资产，然后以股票市场的收益和风险给简单投资者的资产组合进行了定价，由此计算这个资产组合对应的超额收益.

在第 1 类均衡类型下，$\bar{v} - p > 0$，$\hat{\rho} > 0$，简单投资者所获得的超额收益为负值. 之所以出现这种现象，是因为在第 1 类市场均衡下，简单投资者确信随机禀赋与风险资产的未来收益是高度正相关的，为了对冲掉随机禀赋给未来财富带来的波动性，简单投资者会选择进入风险资产的空头头寸，而这时风险资产的权益溢价为正值，这使得对于简单投资者来说，随机禀赋和风险资产构成的资产组合的均值为负值，因此在这种均衡类型下 $\alpha_{\mathrm{T}} < 0$，可以看作是简单投资者为了对冲随机禀赋给未来财富带来的波动性所付出的代价.

在第 2 类均衡类型下，$\bar{v} - p > 0$，所以 α_{T} 的符号取决于相关系数真实值 $\hat{\rho}$ 的符号. 当 $\hat{\rho} > 0$ 时，$\alpha_{\mathrm{T}} < 0$；当 $\hat{\rho} < 0$ 时，$\alpha_{\mathrm{T}} > 0$；当 $\hat{\rho} = 0$ 时，$\alpha_{\mathrm{T}} = 0$. 通过上面的计算可以得到，计算简单投资者所获得的超额收益的过程其实就是以股票市场的市场组合的风险和收益为随机禀赋定价的过程. 由于随机禀赋均值为 0，所以从市场组合的角度看，如果随机禀赋和风险资产的未来收益正相关，随机禀赋的定价为正，所以超额收益为负；相反，如果二者负相关，随机禀赋的定价为负，超额收益为正；如果二者不相关，则随机禀赋的定价为 0，超额收益为 0.

在第 3 类市场均衡下，简单投资者对风险资产持有多头头寸，$\bar{v} - p$ 的符号取决于相关系数可能取得的最大值 $\bar{\rho}$. 当 $-\dfrac{\sigma_\varepsilon}{(1-\mu)\sigma_Z} < \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu}$ 时，$\bar{v} - p > 0$，所以此时超额收益 α_{T} 的符号取决于相关系数真实值 $\hat{\rho}$ 的大小. 当 $\hat{\rho} > 0$ 时，$\alpha_{\mathrm{T}} < 0$，当 $\hat{\rho} < 0$ 时，$\alpha_{\mathrm{T}} > 0$，当 $\hat{\rho} = 0$ 时，$\alpha_{\mathrm{T}} = 0$. 当 $-1 < \bar{\rho} < -\dfrac{\sigma_\varepsilon}{(1-\mu)\sigma_Z}$ 时，随机禀赋与风险资产之间高度负相关，此时 $\bar{v} - p < 0$，$\alpha_{\mathrm{T}} < 0$. 当 $\bar{\rho} = -\dfrac{\sigma_\varepsilon}{(1-\mu)\sigma_Z}$ 时，$\alpha_{\mathrm{T}} = 0$. 之所以出现这种现象，是因为在第 3 类均衡类型下，简单投资者持有风险资产的数量与 $\bar{\rho}$ 有关. 当 $-\dfrac{\sigma_\varepsilon}{(1-\mu)\sigma_Z} < \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu}$ 时，简单投资者持有的风险资产数量较少，此时风险资产的权益溢价为正值，所以简单投资者持有的风险资产和随机禀赋构成的资产组合收益为正，且当 $\hat{\rho} > 0$ 时，资产组合风险较大，所以获得负的超额收益，当 $\hat{\rho} < 0$ 时，资产组合风险较小，所以获得正的超额收益，当 $\hat{\rho} = 0$ 时，资产组合获得零超额收益；当随机禀赋与风险资产之间高度负相关时，简单投资者会持有大量风险资产的多头头寸，这导致风险资产的权益溢价为负，所以简单投资者持有的风险资产和随机禀赋

构成的资产组合收益为负，简单投资者获得负的超额收益.

5　投资者均衡比例

讨论在均衡状态下有多少投资者愿意花费成本 c 转变为复杂投资者. 投资者是否愿意转变成复杂投资者取决于转变成复杂投资者给他带来的事前效用大还是继续作为简单投资者的事前效用大. 如果前者大，则投资者愿意花费成本 c 转变成复杂投资者，消除相关系数的暧昧性带来的影响，否则将继续作为简单投资者参与市场交易.

投资者选择成为复杂投资者和继续作为简单投资者的事前期望效用可以总结为以下命题。

命题 2　投资者选择成为复杂投资者和继续作为简单投资者的事前效用分别为

$$V_{\mathrm{O}0} = -\exp\left[-\left(p^* - c + \frac{f^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)\right]$$

$$V_{\mathrm{T}0} = \begin{cases} -\exp\left[-\left(p^* + \dfrac{(f-\underline{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z)^2}{2\sigma_\varepsilon^2} - \dfrac{\sigma_Z^2}{2}\right)\right], & \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu} < \underline{\rho} \leqslant 1 \\ -\exp\left[-\left(p^* - \dfrac{\sigma_Z^2}{2}\right)\right], & -1 \leqslant \underline{\rho} \leqslant \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu} \leqslant \bar{\rho} \leqslant 1 \\ -\exp\left[-\left(p^* + \dfrac{(f-\bar{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z)^2}{2\sigma_\varepsilon^2} - \dfrac{\sigma_Z^2}{2}\right)\right], & -1 \leqslant \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu} \end{cases}$$

其中

$$f = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 + (1-\mu)\sigma_\varepsilon\sigma_Z\underline{\rho}, & \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu} < \underline{\rho} \leqslant 1 \\ \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\mu}, & -1 \leqslant \underline{\rho} \leqslant \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu} \leqslant \bar{\rho} \leqslant 1 \\ \sigma_\varepsilon^2 + (1-\mu)\sigma_\varepsilon\sigma_Z\bar{\rho}, & -1 \leqslant \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu} \end{cases}$$

f 在数值上等于风险资产的权益溢价.

在第 1 类均衡下，简单投资者进入风险资产的空头头寸，复杂投资者进入风险资产的多头头寸，风险资产的权益溢价 $f>0$，风险资产的权益溢价 f 较大说明在市场上做多风险资产所获得的收益也就越多，这种更高的交易价值又导致了复杂投资者效用的增加，这表现为 $V_{\mathrm{O}0}$ 中的 $\dfrac{f^2}{2\sigma_\varepsilon^2}$ 这一项. 而由于简单投资者在风险资产上持有空头头寸，所以简单投资者在风险资产的交易中会产生损失，但是简单投资者这种对冲未来随机禀赋的操作又使得简单投资者因财富波动性的降低而获益，这几个方面的作用综合起来的结果表现为 $V_{\mathrm{T}0}$ 中的 $\dfrac{(f-\underline{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}$ 这一项. 由于 $f-\underline{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z<0$，所以 f 增大会导致简单投资者效用降低.

第 2 类均衡类型是有限参与均衡，简单投资者为了规避相关系数的暧昧性而不参与交易风险资产，所以风险资产的权益溢价 f 不会对简单投资者的初始禀赋产生影响. 风险资产的权益溢价 f 对复杂投资者效用的作用依然存在，由 $V_{\mathrm{O}0}$ 中 $\dfrac{f^2}{2\sigma_\varepsilon^2}$ 这一项来表示.

在第 3 类均衡下，风险资产的权益溢价 f 会对两类投资者的事前效用产生不同的影响. 复杂投资者由于不存在随机禀赋，他只在金融市场上交易风险资产，所以在复杂投资者看来，决定风险资产交易价值的只是 f 的符号，具体来说，当 $f>0$ 即 $-\dfrac{\sigma_\varepsilon}{(1-\mu)\sigma_Z}<\bar{\rho}<\dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu}$ 时，复杂投资者进入风险资产的多头，f 越大说明风险资产的权益溢价越大，所以交易价值越大，从而对复杂投资者的效用具有拉升的作用; 当 $f<0$ 即 $\bar{\rho}<-\dfrac{\sigma_\varepsilon}{(1-\mu)\sigma_Z}$ 时，风险资产的权益溢价为负值，复杂投资者进入风险资产的空头头寸，所以 f 越大，$|f|$ 越小，风险资产的交易价值越小，从而对复杂投资者的效用具有拉低的作用. 简单投资者在第 3 类均衡类型下总是进入风险资产的多头头寸，他除了在金融市场上交易风险资产以外，未来还不得不接受与风险资产未来收益负相关的随机禀赋，因此简单投资者不仅仅关心交易风险资产带来的收益，还要关心包含未来随机禀赋在内的整个资产组合的风险. 类似于第 1 种情形的分析，风险资产的权益溢价 f 对简单投资者的效用的影响综合起来的结果表现为 $V_{\mathrm{T}0}$ 中的 $\dfrac{(f-\bar{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}$ 项. 由于 $f-\bar{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z>0$，所以 f 的增大

会引起简单投资者效用提高.

投资者是否愿意花费成本 c 从简单投资者转变为复杂投资者取决于转变为复杂投资者的事前效用高还是继续作为简单投资者的事前效用高，这里定义收益函数 $B(\mu)$ 为在不考虑成本 c 的情况下这两者对应的确定性等价的差值，即

$$B(\mu)\equiv\begin{cases}\dfrac{f^2-(f-\underline{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}+\dfrac{\sigma_Z^2}{2},\ \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu}<\underline{\rho}\leqslant 1\\ \dfrac{f^2}{2\sigma_\varepsilon^2}+\dfrac{\sigma_Z^2}{2},\ -1\leqslant\underline{\rho}\leqslant\dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu}\leqslant\bar{\rho}\leqslant 1\\ \dfrac{f^2-(f-\bar{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}+\dfrac{\sigma_Z^2}{2},\ -1\leqslant\bar{\rho}<\dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu}\end{cases}$$

将命题2 中 f 的表达式代入并化简可得以下命题.

命题 3 花费成本 c 转变为复杂投资者所获得的收益函数为

$$B(\mu)\equiv\begin{cases}\underline{\rho}^2\sigma_Z^2(1-\mu)+\underline{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z+\dfrac{\sigma_Z^2(1-\underline{\rho}^2)}{2},\\ \qquad\dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu}<\underline{\rho}\leqslant 1\\ \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{2\mu^2}+\dfrac{\sigma_Z^2}{2},\ -1\leqslant\underline{\rho}\leqslant\dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu}\leqslant\bar{\rho}\leqslant 1\\ \bar{\rho}^2\sigma_Z^2(1-\mu)+\bar{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z+\dfrac{\sigma_Z^2(1-\bar{\rho}^2)}{2},\\ \qquad -1\leqslant\bar{\rho}<\dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu}\end{cases}$$

它是关于 μ 的单调递减连续函数.

当 $\bar{\rho}=0.5$，$\underline{\rho}=0.25$，$\sigma_\varepsilon=0.1$，$\sigma_Z=0.5$ 时，$B(\mu)$ 的曲线如图3 所示. 从图中可以直接观看出，$B(\mu)$ 是关于 μ 的单调递减连续函数.

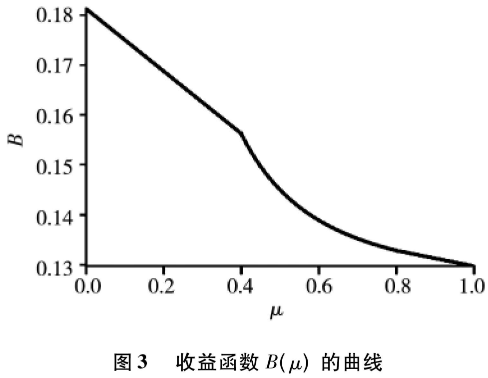

图3 收益函数 $B(\mu)$ 的曲线

Fig. 3 Curve of profit function $B(\mu)$

要理解 $B(\mu)$ 关于 μ 的递减性需要注意风险资产的权益溢价 $f(\rho)$ 与复杂投资者所占比例 μ 的关系.

注 1 当 $\bar{\rho}\geqslant 0$ 时，市场的 μ 可能处于3 类均衡类型中的任何一类，在此条件下，简单投资者要么选择进入风险资产的空头(第 1 类均衡)，要么不参与风险资产的交易(第 2 类均衡)，要么参与风险资产的多头(第 3 类均衡)，但是简单投资者人均持有风险资产的多头头寸要小于复杂投资者人均持有风险资产的多头头寸，所以此时复杂投资者所占比例 μ 的上升会导致风险资产的需求上升，从而引起均衡价格上升，这会使得风险资产的权益溢价 f 下降; 当 $\bar{\rho}<0$ 时，市场只可能处于第 3 类均衡类型，不但 $D_T^*>0$ 且 $D_T^*>D_O^*$，即简单投资者对风险资产持有头寸比复杂投资者更多，此时如果复杂投资者所占比例 μ 上升会导致对风险资产的需求下降，从而引起均衡价格下降，所以风险资产的权益溢价 f 将会上升.

根据注 1，对于 $B(\mu)$ 关于 μ 的单调性可以这样理解，当 $\bar{\rho}\geqslant 0$ 时，风险资产的权益溢价 f 是 μ 的减函数，如果 μ 上升会引起风险资产的权益溢价 f 降低，这会导致持有风险资产多头的投资者受损，而此时，复杂投资者对风险资产持有更多多头头寸，所以风险资产的权益溢价 f 的降低会对复杂投资者的效用产生更大的不利影响，因此 μ 的上升使得转变为复杂投资者所获得的收益函数 $B(\mu)$ 下降; 当 $\bar{\rho}<0$ 时，风险资产的权益溢价 f 是 μ 的增函数，如果 μ 上升会引起风险资产的权益溢价 f 上升，这会导致持有风险资产多头的投资者受益，而此时，简单投资者对风险资产持有更多的多头头寸，所以风险资产的权益溢价 f 的上升会对简单投资者的效用产生更大的积极影响，因此 μ 的上升同样使得转变为复杂投资者所获得的收益函数 $B(\mu)$ 下降.

投资者是否愿意花费成本 c 转变为复杂投资者取决于收益函数 $B(\mu)$ 与成本 c 的对比，记 $\underline{c}$ 和 $\bar{c}$ 分别为收益函数 $B(\mu)$ 可能取得的下确界和上确界，即 $\underline{c}=\lim\limits_{\mu\to 1^-}B(\mu)$，$\bar{c}=\lim\limits_{\mu\to 0^+}B(\mu)$，当 $c\leqslant\underline{c}$ 时，所有投资者都愿意花费成本 c 转变为复杂投资者，此时 $\mu=1$; 当 $c\geqslant\bar{c}$ 时，所有投资者都宁愿继续作为简单投资者参与市场交易，即 $\mu=0$; 当

$c \in (\underline{c}, \bar{c})$ 时，存在唯一的 μ^* 使得 $B(\mu^*) = c$，此时是否转变为复杂投资者对投资者来说无差异.

由于 $\bar{c} - \underline{c}$ 取决于 $\underline{\rho}$ 和 $\bar{\rho}$，而 $\underline{\rho}$ 和 $\bar{\rho}$ 又与相关系数暧昧性的大小 $\Delta\rho$ 有关，所以收益函数 $B(\mu)$ 的取值范围 $\bar{c} - \underline{c}$ 受到相关系数暧昧性大小 $\Delta\rho$ 的影响，对此有以下命题.

命题 4　收益函数 $B(\mu)$ 的取值范围 $\bar{c} - \underline{c}$ 与相关系数暧昧性大小 $\Delta\rho$ 之间存在如下关系

$$\frac{\partial(\bar{c} - \underline{c})}{\partial\Delta\rho}\begin{cases} > 0, \bar{\rho} > 0 \\ = 0, \bar{\rho} = 0 \\ < 0, \bar{\rho} < 0 \end{cases} \tag{7}$$

6　金融市场管制，市场均衡和社会福利

为了规范市场秩序，提高市场的定价效率，降低不对称信息对市场价格的扭曲，世界各国都对本国的金融市场进行着严格的市场管制. 金融管制措施纷繁复杂，本文主要研究以下两种管制措施的效果: 1) 提高机构投资者的准入门槛; 2) 加强金融市场的信息披露以降低信息不对称程度，提高市场透明度.

6.1　提高机构投资者准入门槛

提高机构投资者的准入门槛的金融监管措施可以理解为成本 c 的增大，假设简单投资者对相关系数暧昧性 $\Delta\rho$ 保持不变，研究转变成本 c 的增大对均衡条件下复杂投资者所占比例 μ^*、风险资产的权益溢价 EP^* 和社会福利水平 WEL^* 带来的影响.

在均衡条件下复杂投资者所占比例 μ^* 由 $B(\mu^*) = c$ 决定，$B(\cdot)$ 只与简单投资者的暧昧程度 $\underline{\rho}$ 和 $\bar{\rho}$ 有关，而与转换成本 c 无关，

同时考虑到 $B(\cdot)$ 是关于 μ 的减函数，所以转换成本 c 的提高会导致 μ^* 的减少. 这个结果是显然的，因为转换成本的上升降低了投资者转变为复杂投资者所获得的收益，所以愿意花费成本 c 转变为复杂投资者的比例减少.

在将复杂投资者所占比例 μ 内生化并达到均衡后，风险资产的权益溢价可以表示为

$$EP^* = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 + (1 - \mu^*)\sigma_\varepsilon\sigma_Z\underline{\rho}, & \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} < \underline{\rho} \leqslant 1 \\ \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\mu^*}, & -1 \leqslant \underline{\rho} \leqslant \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} \leqslant \bar{\rho} \leqslant 1 \\ \sigma_\varepsilon^2 + (1 - \mu^*)\sigma_\varepsilon\sigma_Z\bar{\rho}, & -1 \leqslant \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} \end{cases} \tag{8}$$

对 μ^* 求导可得到命题 5.

命题 5　当简单投资者的相关系数暧昧性保持不变时，有

$$\frac{\partial EP^*}{\partial\mu^*}\begin{cases} > 0, \bar{\rho} > 0 \\ = 0, \bar{\rho} = 0 \\ < 0, \bar{\rho} < 0 \end{cases} \tag{9}$$

出现这个结果的原因，可以参考注 1，因为 f 和 EP^* 在数值上相等，此处不再赘述. 根据命题 5，随着市场准入门槛 c 的提高，复杂投资者在投资者中所占比例 μ 下降，但风险资产的权益溢价的变动方向并不确定，而是取决于 $\bar{\rho}$ 的符号.

由于在 $\mu = \mu^*$ 时，投资者转变为复杂投资者或者继续作为简单投资者是无差异的，所以可以用任何一方事前效用的确定性等价来度量. 在这里，本文定义社会福利函数为继续作为简单投资者事前效用的确定性等价减去常数 $\bar{v} - \dfrac{\sigma_Z^2}{2}$，记 $f^* = f|_{\mu=\mu^*}$ 有

$$WEL^* = \begin{cases} -f^* + \dfrac{(f^* - \underline{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}, & \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} < \underline{\rho} \leqslant 1 \\ -f^*, & -1 \leqslant \underline{\rho} \leqslant \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} \leqslant \bar{\rho} \leqslant 1 \\ -f^* + \dfrac{(f^* - \bar{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}, & -1 \leqslant \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} \end{cases} \tag{10}$$

将 WEL^* 对 μ^* 求导，可得

$$\frac{\partial WEL^*}{\partial\mu^*} = \begin{cases} \mu^*\sigma_Z^2\underline{\rho}^2, & \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} < \underline{\rho} \leqslant 1 \\ \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{(\mu^*)^2}, & -1 \leqslant \underline{\rho} \leqslant \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} \leqslant \bar{\rho} \leqslant 1 \\ \mu^*\sigma_Z^2\bar{\rho}^2, & -1 \leqslant \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} \end{cases} \tag{11}$$

据此可以得到以下命题.

命题 6 如果简单投资者对相关系数暧昧性保持不变，即 $\underline{\rho}$ 和 $\bar{\rho}$ 保持不变，则复杂投资者比例的上升会提高社会福利水平，相反，简单投资者比例的上升将降低社会福利水平.

当 $\bar{\rho} = 0.5$, $\underline{\rho} = 0.25$, $\sigma_\varepsilon = 0.1$, $\sigma_Z = 0.5$ 时，WEL^* 的曲线如图 4 所示. 从图 4 可以看出，社会福利水平 WEL^* 是均衡条件下复杂投资者占比 μ^* 的增函数.

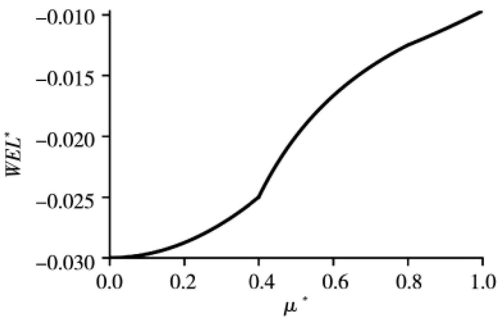

图 4 WEL^* **福利函数曲线**

Fig. 4 Curve of social welfare function WEL^*

从图 3 和图 4 可以看出，均衡条件下复杂投资者的占比 μ^* 是转换成本 c 的减函数，而社会福利水平 WEL^* 是均衡条件下复杂投资者占比 μ^* 的增函数，因此，如果以提高转换成本 c 的方法提高机构投资者的准入门槛，将会降低复杂投资者在投资者中所占比例，降低社会的福利水平，而对风险资产的权益溢价的影响取决于 $\bar{\rho}$ 的符号.

6.2 降低相关系数暧昧性

参数暧昧性的存在使得投资者无法准确把握某些重要的经济参数，导致投资者决策偏离最优标准，从而扭曲了资产定价效率，因此增强信息披露，降低投资者的参数暧昧性，提高市场透明度一直以来都是金融市场管制的重要措施. 本节主要研究的内容就是在保持转换成本 $c \in (\underline{c}, \bar{c})$ 不变的条件下，降低参数暧昧性对均衡条件下复杂投资者比例 μ^* 、风险资产的权益溢价 EP^* 和社会福利水平 WEL^* 带来的影响.

均衡条件下复杂投资者在投资者中所占比例 μ^* 与简单投资者对相关系数的暧昧程度 $\Delta\rho$ 的关系由隐函数 $B(\mu^*, \Delta\rho) = c$ 确定，根据隐函数求导法则可以得到以下公式

$$\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\Delta\rho} = -\frac{\dfrac{\partial B(\mu^*, \Delta\rho)}{\partial\Delta\rho}}{\dfrac{\partial B(\mu^*, \Delta\rho)}{\partial\mu^*}} = \begin{cases} -\dfrac{f(1-\mu^*)\sigma_Z\sigma_\varepsilon + g_{\max}\mu^*\sigma_Z\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z^2\sigma_\varepsilon^2\underline{\rho}^2}, & \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} < \underline{\rho} \leqslant 1 \\ 0, & -1 \leqslant \underline{\rho} \leqslant \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} \leqslant \bar{\rho} \leqslant 1 \\ \dfrac{f(1-\mu^*)\sigma_Z\sigma_\varepsilon + g_{\min}\mu^*\sigma_Z\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z^2\sigma_\varepsilon^2\bar{\rho}^2}, & -1 \leqslant \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} \\ & \text{且 } \bar{\rho} \neq 0 \end{cases} \tag{12}$$

当 $\bar{\rho} = 0.5$, $\underline{\rho} = 0.25$, $\sigma_\varepsilon = 0.1$, $\sigma_Z = 0.5$ 时，$\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\Delta\rho}$ 的曲线如图 5 所示.

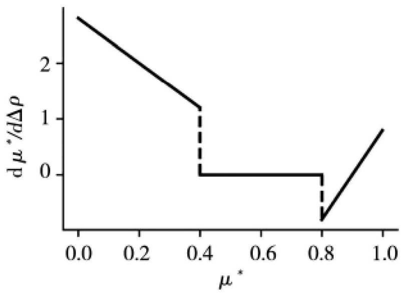

图 5 $\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\Delta\rho}$ **随** μ^* **的变化**

Fig. 5 $\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\Delta\rho}$ varies with μ^*

根据式(12) 可以得到以下命题.

命题 7 在保持转换成本 $c \in (\underline{c}, \bar{c})$ 不变的条件下，参数暧昧性与复杂投资者在投资者中所占比例之间存在如下关系

1) 当 $\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} < \underline{\rho} \leqslant 1$ 时

$$\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\Delta\rho} \begin{cases} > 0, & \mu^* > \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sigma_\varepsilon}{2\underline{\rho}\sigma_Z} \\ = 0, & \mu^* = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sigma_\varepsilon}{2\underline{\rho}\sigma_Z} \\ < 0, & \mu^* < \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sigma_\varepsilon}{2\underline{\rho}\sigma_Z} \end{cases}$$

2) 当 $-1 \leqslant \underline{\rho} \leqslant \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} \leqslant \bar{\rho} \leqslant 1$ 时

$$\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\Delta\rho} = 0$$

3) 当 $-\dfrac{\sigma_\varepsilon}{(1-\mu^*)\sigma_Z} \leqslant \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}$ 时

$$\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\Delta\rho} > 0$$

4) 当 $-1 < \bar{\rho} < -\dfrac{\sigma_\varepsilon}{(1-\mu^*)\sigma_Z}$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\Delta\rho}\begin{cases} > 0, & \mu^* > \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sigma_\varepsilon}{2\bar{\rho}\sigma_Z} \\ = 0, & \mu^* = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sigma_\varepsilon}{2\bar{\rho}\sigma_Z} \\ < 0, & \mu^* < \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sigma_\varepsilon}{2\bar{\rho}\sigma_Z} \end{cases}$$

出现这个结果的原因在于: 在第 1 种均衡类型下，复杂投资者持有风险资产多头头寸，简单投资者持有风险资产的空头头寸，投资者转变为复杂投资者后交易风险资产所获得的收益给投资者带来的效用由 f^2 来决定，选择继续作为简单投资者所获得的收益给投资者带来的效用由 $g^2_{\max}$ 来决定. 随着相关系数暧昧性大小 $\Delta\rho$ 的增大，$\underline{\rho}$ 逐渐减小，这导致 f^2 和 $g^2_{\max}$ 都逐渐下降，但是 f^2 的下降速度由 $1-\mu$ 来控制，而 $g^2_{\max}$ 的下降速度由 μ 来控制，所以当 μ 较大时，$g^2_{\max}$ 下降更快，所以相对来说选择转变成为复杂投资者更具有吸引力，这就引起均衡情况下复杂投资者所占比例 μ^* 上升. 反之，当 μ 较小时，f^2 下降更快，所以相对来说选择继续作为简单投资者更具有吸引力，这就引起均衡情况下复杂投资者所占比例 μ^* 下降，而当 $\mu = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sigma_\varepsilon}{2\underline{\rho}\sigma_Z}$ 时，复杂投资者的均衡比例 μ^* 不变. 在第 2 类均衡类型下，简单投资者不参与风险资产的交易，所有风险资产都被复杂投资者持有，这时两类投资者的效用都与相关系数暧昧性大小 $\Delta\rho$ 无关，所以它的改变并不会改变均衡情况下复杂投资者所占比例 μ^*. 在第 3 类市场均衡下，需要分两种情况分别讨论，当 $-\dfrac{\sigma_\varepsilon}{(1-\mu^*)\sigma_Z} \leqslant \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}$ 时，复杂投资者和简单投资者都持有部分风险资产，投资者转变为复杂投资者后交易风险资产所获得的收益给投资者带来的效用由 f^2 来决定，选择继续作为简单投资者通过风险资产的交易和随机禀赋所获得的收益给投资者带来的效用由 $g^2_{\min}$ 来决定. 随着 $\Delta\rho$ 的增大，$\bar{\rho}$ 逐渐增大，这导致 f^2 逐渐上升而 $g^2_{\min}$ 逐渐下降，所以相对来说选择转变成为复杂投资者更具有吸引力，这就引起均衡情况下复杂投资者所占比例 μ^* 上升; 当 $-1 < \bar{\rho} < -\dfrac{\sigma_\varepsilon}{(1-\mu^*)\sigma_Z}$ 时，复杂投资者持有风险资产空头头寸，简单投资者持有风险资产的多头头寸，投资者转变为复杂投资者后交易风险资产所获得的收益给投资者带来的效用由 f^2 来决定，选择继续作为简单投资者通过风险资产的交易和随机禀赋所获得的收益给投资者带来的效用由 $g^2_{\min}$ 来决定. 随着 $\Delta\rho$ 的增大，$\bar{\rho}$ 逐渐增大，这导致 f^2 和 $g^2_{\min}$ 都逐渐下降，但是 f^2 的下降速度由 $1-\mu$ 来控制，而 $g^2_{\min}$ 的下降速度由 μ 来控制，所以当 μ 较大时，$g^2_{\min}$ 下降更快，所以相对来说选择转变成为复杂投资者更具有吸引力，这就引起复杂投资者均衡比例 μ^* 上升. 反之，当 μ 较小时，f^2 下降更快，所以相对来说选择继续作为简单投资者更具有吸引力，这就引起复杂投资者均衡比例 μ^* 下降，而当 $\mu = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sigma_\varepsilon}{2\bar{\rho}\sigma_Z}$ 时，复杂投资者均衡比例 μ^* 不变.

相关系数暧昧性大小 $\Delta\rho$ 对风险资产权益溢价 EP^* 的影响有两条途径，一方面 $\Delta\rho$ 的变化会引起 $\bar{\rho}$ 和 $\underline{\rho}$ 的变化，另一方面 $\Delta\rho$ 的变化又会引起 μ^* 的改变，这两方面的变化都会引起风险资产权益溢价 EP^* 的变动，综合这两方面的效应可总结为下面的命题.

命题 8　在保持转换成本 $c \in (\underline{c}, \bar{c})$ 不变的条件下，参数暧昧性与风险资产的权益溢价之间存在如下关系

$$\frac{\partial EP^*}{\partial\Delta\rho}\begin{cases} < 0, & \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} < \underline{\rho} \leqslant 1, \text{或 } 0 < \underline{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z} \\ = 0, & -1 \leqslant \underline{\rho} \leqslant \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} \leqslant \bar{\rho} \leqslant 1 \\ > 0, & -1 \leqslant \bar{\rho} < 0, \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z} < \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} \end{cases}$$

风险资产权益溢价 EP^* 与相关系数暧昧性大小 $\Delta\rho$ 的关系如图 6 所示(其中 $\sigma_\varepsilon = 0.1$，$\sigma_Z = 0.5$)，随着简单投资者对相关系数估算的不同，

暧昧性大小对风险资产权益溢价 EP^* 产生的影响也有所差异.

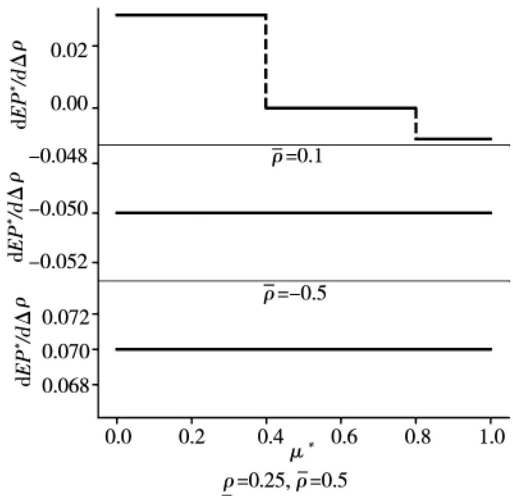

图 6 暧昧性对风险资产溢价 EP^* 的影响

Fig 6. Effect of ambiguity on risky asset premium EP^*

在第 1 种均衡类型下，复杂投资者持有风险资产多头头寸，简单投资者持有风险资产的空头头寸，随着相关系数暧昧性大小 $\Delta\rho$ 的增大，一方面 $\underline{\rho}$ 逐渐下降，这引起风险资产权益溢价 EP^* 下降，另一方面，$\Delta\rho$ 的增大又会引起投资者的均衡分布 μ^* 发生改变，而且改变的方向并不确定，这两方面的作用中第 1 种作用是主要的，所以相关系数暧昧性大小 $\Delta\rho$ 的增大导致风险资产权益溢价 EP^* 下降；在第 2 类均衡类型下，简单投资者不参与风险资产的交易，所有风险资产都被复杂投资者持有，这时风险资产权益溢价 EP^* 与相关系数暧昧性大小 $\Delta\rho$ 无关，所以暧昧性大小 $\Delta\rho$ 的改变并不会改变风险资产权益溢价 EP^*. 在第 3 类均衡类型下，当 $0 < \bar{\rho} < \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z \mu^*} \leqslant 1$ 时，两类投资者都持有风险资产的多头头寸，且复杂投资者人均持有头寸要大于简单投资者，此时随着相关系数暧昧性大小 $\Delta\rho$ 的增大，一方面 $\bar{\rho}$ 逐渐上升，这引起风险资产权益溢价 EP^* 上升，另一方面，$\Delta\rho$ 的增大又会引起投资者的均衡分布 μ^* 增大，从而导致风险资产权益溢价 EP^* 下降。当 $\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z} < \bar{\rho} < \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z \mu^*}$ 时，这两方面的作用中第 1 种作用是主要的，所以相关系数暧昧性大小 $\Delta\rho$ 的增大导致风险资产权益溢价 EP^* 上升；当 $0 < \bar{\rho} < \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z}$ 时，这两方面的作用中第 2 种作用是主要的，所以相关系数暧昧性大小 $\Delta\rho$ 的增大导致风险资产权益溢价 EP^* 下降；当 $-1 \leqslant \bar{\rho} < 0$ 时，复杂投资者人均持有头寸要小于简单投资者，甚至复杂投资者可能会进入风险资产的空头，此时随着相关系数暧昧性大小 $\Delta\rho$ 的增大，第 1 种作用占主导，所以相关系数暧昧性大小 $\Delta\rho$ 的增大导致风险资产权益溢价 EP^* 上升.

相关系数暧昧性大小 $\Delta\rho$ 对福利函数 WEL^* 的影响同样有两条途径，一方面 $\Delta\rho$ 的变化会引起 $\bar{\rho}$ 和 $\underline{\rho}$ 的变化，另一方面 $\Delta\rho$ 的变化又会引起 μ^* 的改变，这两方面的变化都会引起福利函数 WEL^* 的变动，这两方面效果的综合作用可以总结为下面的命题.

命题 9 在保持转换成本 $c \in (\underline{c}, \bar{c})$ 不变的条件下，相关系数暧昧性与社会福利水平之间存在如下关系

$$\frac{\partial WEL^*}{\partial \Delta\rho}\begin{cases} < 0, & -1 \leqslant \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z \mu^*} < \underline{\rho} \leqslant 1 \\ = 0, & -1 \leqslant \underline{\rho} \leqslant \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z \mu^*} \leqslant \bar{\rho} \leqslant 1 \\ < 0, & -1 \leqslant \bar{\rho} < \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z \mu^*} \end{cases}$$

当 $\bar{\rho} = 0.8$，$\underline{\rho} = 0.4$，$\sigma_\varepsilon = 0.1$，$\sigma_Z = 0.5$ 时，社会福利水平 WEL^* 随暧昧性大小 $\Delta\rho$ 的变动 $\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\Delta\rho}$ 的曲线如图 7 所示.

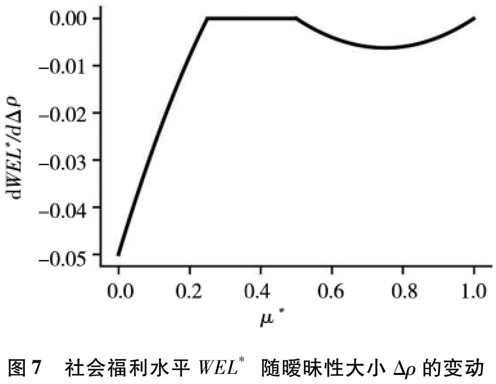

图 7 社会福利水平 WEL^* 随暧昧性大小 $\Delta\rho$ 的变动

Fig.7 Social welfare varies WEL^* with the amount of ambiguity $\Delta\rho$

由此可见，通过增强信息披露，提高市场透明度，降低投资者相关系数暧昧性的管制措施可以起到两方面的效果，一方面这个举措可以缩小

区间长度 $\bar{\rho}-\underline{\rho}$ ，降低有限参与均衡发生的可能性，另一方面在共同参与均衡下，这个管制措施可以有效提高社会福利水平.

7　结束语

金融市场是国家宏观经济的重要组成部分，与宏观经济中非金融因素之间存在着千丝万缕的联系，金融市场上投资者行为决策也受到来自宏观经济中非金融因素的影响，因此要全面研究金融市场上风险资产定价与管制措施的政策效果就必须考虑金融市场与宏观经济中非金融因素的相互作用. 非金融收入是影响投资者决策的重要宏观经济变量，而这一变量与金融市场之间的相关性难以准确把握，投资者在金融市场上决策时往往面临着二者之间相关系数的暧昧性，这正是本文研究的起点. 本文认为，由于金融市场具有高度的流动性，投资者可以根据需求在短时间内构建自己的投资组合，此时投资者无法将非金融收入作为决策变量进行选择，同时由于非金融收入会受到宏观经济因素和其他变量的制约，因此，其本身又是一随机变量，本文将其模型化为不可自行选择的随机禀赋. 机构投资者和散户投资者的收入模式存在差异，机构投资者在金融市场的投资收益往往构成其绝大部分的收入来源，而散户投资者的金融资产收益往往只占其总收入很小的一部分. 本文假设投资者是暧昧厌恶的，并采用 MEU 模型[3] 刻画投资者偏好，以此为基础构建一般均衡模型，考察金融市场均衡和资产定价所具有的特点，并进一步研究金融市场管制措施的政策效果及其对社会福利水平的影响.

本文研究发现: 第一，在市场均衡方面，由于存在随机禀赋，简单投资者对待风险资产的态度并不总是像 Easley 等[19] 描述的那样保守，平抑财富波动性的需求可能会使简单投资者在风险资产的持有上比复杂投资者更加激进，当风险资产与随机禀赋高度负相关时，这种对冲的需求可能迫使复杂投资者进入风险资产的空头头寸与其进行对赌. 第二，在资产定价方面，本文的结论在两个方面与 Easley 等[19] 和 Huang 等[23] 不同: 首先，暧昧性的增加并不总导致风险资产权益溢价的提高，主要原因是在于，简单投资者可能会进入风险资产的空头头寸与复杂投资者进行对赌; 其次，在 CAPM 分析中，发现复杂投资者在风险资产的交易中获得的超额收益总是零，而随机禀赋的存在改变了简单投资者未来财富的波动性，其获得的超额收益可能为正、为负，或为零. 第三，在管制措施的政策效果方面，如果市场管理者提高机构投资者的准入门槛，均衡条件下机构投资者的比例将会下降，风险资产权益溢价的变动方向并不确定，社会福利水平将会降低，因此这种管制措施往往带来负面效应; 如果市场管理者增强信息披露，提高市场透明度，那么均衡条件下机构投资者的比例和风险资产的权益溢价的变动方向无法准确确定，但是这种市场管制措施能够有效降低投资者暧昧性，提高社会福利水平.

参考文献:

[1] Knight F. Risk, Uncertainty and Profit [M]. Boston: Houghton Mifflin, 1921.
[2] Ellsberg D. Risk, ambiguity, and thesavage axioms [J]. The Quarterly Journal of Economics, 1961, 75(4): 643 –669.
[3] Gilboa I, Schmeidler D. Maxmin expected utility with non-unique prior [J]. Journal of Mathematical Economics, 1989, 18 (2): 141 –153.
[4] Ghirardato P, Maccheroni F, Marinacci M. Differentiating ambiguity and ambiguity attitude [J]. Journal of Economic Theory, 2004, 118(2): 133 –173.
[5] Klibanoff P, Marinacci M, Mukerji S. A smooth model of decision making under ambiguity [J]. Econometrica, 2005, 73 (6): 1849 –1892.
[6] Izhakian Y. Expected utility with uncertain probabilities theory [J]. Journal of Mathematical Economics, 2017, 69: 91 –103.
[7] Izhakian Y. A theoretical foundation of ambiguity measurement [J]. Journal of Economic Theory, 2020, 187: 105001.
[8] Brenner M, Izhakian Y. Asset pricing and ambiguity: Empirical evidence [J]. Journal of Financial Economics, 2018, 130 (3): 503 –531.

[9] Augustin P, Izhakian Y. Ambiguity, volatility, and credit risk [J]. The Review of Financial Studies, 2020, 33(4): 1618 – 1672.

[10] 刘婧颖, 张顺明. 不确定环境下行为决策理论评述[J]. 系统工程, 2015, 33(2): 110 – 117.
Liu Jingying, Zhang Shunming. Review on behavioral decision-making theory with uncertainty [J]. System Engineering, 2015, 33(2): 110 – 117. (in Chinese)

[11] Chen Z J, Epstein L. Ambiguity, risk, and asset returns in continuous time [J]. Econometrica, 2002, 70(4): 1403 – 1443.

[12] Epstein L, Schneider M. Recursive multiple-priors [J]. Journal of Economic Theory, 2003, 113(1): 1 – 31.

[13] Epstein L, Ji S L. Ambiguous volatility and asset pricing in continuous time [J]. The Review of Financial Studies, 2013, 26(7): 1740 – 1786.

[14] Epstein L, Ji S L. Ambiguous volatility, possibility and utility in continuous time [J]. Journal of Mathematical Economics, 2014, 50: 269 – 282.

[15] Illeditsch P K. Ambiguous information, portfolio inertia, and excess volatility [J]. The Journal of Finance, 2011, 66(6): 2213 – 2247.

[16] Cao H H, Wang T, Zhang H H. Model uncertainty, limited market participation, and asset prices [J]. Review of Financial Studies, 2005, 18(4): 1219 – 1251.

[17] Epstein L, Schneider M. Ambiguity, information quality, and asset pricing [J]. The Journal of Finance, 2008, 63(1): 197 – 228.

[18] Easley D, O'Hara M. Ambiguity and nonparticipation: The role of regulation [J]. Review of Financial Studies, 2009, 22(5): 1817 – 1843.

[19] Easley D, O'Hara M, Yang L. Opaque trading, disclosure, and asset prices: Implications for hedge fund regulation [J]. Review of Financial Studies, 2014, 27(4): 1190 – 1237.

[20] Mele A, Sangiorgi F. Uncertainty, information acquisition, and price swings in asset markets [J]. The Review of Economic Studies, 2015, 82(4): 1533 – 1567.

[21] Illeditsch P K, Ganguli J V, Condie S. Information Inertia [R]. Colchester: University of Essex, 2019.

[22] 陈国进, 张润泽, 谢沛霖, 等. 知情交易、信息不确定性与股票风险溢价[J]. 管理科学学报, 2019, 22(4): 53 – 74.
Chen Guojin, Zhang Runze, Xie Peilin, et al. Informed trading, information uncertainty and stock risk premium [J]. Journal of Management Sciences in China, 2019, 22(4): 53 – 74. (in Chinese)

[23] Huang H H, Zhang S, Zhu W. Limited participation under ambiguity of correlation [J]. Journal of Financial Markets, 2017, 32: 97 – 143.

[24] 何俊勇, 张顺明. 在相关系数暧昧环境下的市场微观结构研究[J]. 中国管理科学, 2018, 26(4): 139 – 154.
He Junyong, Zhang Shunming. Market microstructure under ambiguity of correlation [J]. China Journal of Management Science, 2018, 26(4): 139 – 154. (in Chinese)

[25] Peijnenburg K. Life-cycle asset allocation with ambiguity aversion and learning [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2018, 53(5): 1963 – 1994.

[26] 何俊勇, 张顺明. 光滑暧昧模型下的不透明交易和管制措施研究[J]. 管理科学学报, 2017, 20(2): 76 – 93.
He Junyong, Zhang Shunming. Studies on opaque trading and regulations under smooth ambiguity model [J]. Journal of Management Sciences in China, 2017, 20(2): 76 – 93. (in Chinese)

[27] 费 晨, 余 鹏, 费为银, 等. 道德风险下带有 Knight 不确定的最优动态契约设计[J]. 管理科学学报, 2019, 22(6): 86 – 96.
Fei Chen, Yu Peng, Fei Weiyin, et al. Dynamics of contract design with moral hazards under Knightian uncertainty [J]. Journal of Management Sciences in China, 2019, 22(6): 86 – 96. (in Chinese)

[28] 郭荣怡, 张顺明, 纪 晨. 暧昧环境下的不对称信息更新与资产定价研究[J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(7): 1633 – 1655.
Guo Rongyi, Zhang Shunming, Ji Chen. Studies on asymmetric information updating and asset pricing in ambiguous economy [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2018, 38(7): 1633 – 1655. (in Chinese)

[29] 石丽娜, 张顺明. 暧昧与部分知情交易的资产定价[J]. 管理科学学报, 2018, 21(12): 70 – 94.
Shi Lina, Zhang Shunming. Ambiguity and asset prices with incompletely informed trading [J]. Journal of Management Sciences in China, 2018, 21(12): 70 – 94. (in Chinese)

Investment decisions and market regulations in economy with parameter ambiguity: Based on ambiguity of correlation between stochastic endowment and risky asset

HE Jun-yong[1], *GUO Rong-yi*[2], *ZHANG Shun-ming*[3*], *SHI Li-na*[4]
1. School of Economics, Beijing International Studies University, Beijing 100024, China;
2. Huaxia Bank Post-doctoral Scientific Research Workstation, Beijing 100005, China;
3. School of Finance, Renmin University of China, Beijing 100872, China;
4. School of Economics and Management, Beihang University, Beijing 100191, China

Abstract: The paper assumes that naïve investors in financial markets are ambiguity averse, and that they will obtain stochastic endowments (non-financial asset profits) at the end of the term and are currently ambiguous about the correlation coefficient between stochastic endowment and the payment of a risky asset. The effects of correlation ambiguity on asset pricing and aggregate social welfare are investigated. Our results demonstrate that correlation ambiguity might lead to limited participation and distortion of asset pricing. If the correlation coefficient is negative, and equity premium is positive, naïve investors will obtain positive excess returns. If there is no correlation, or no equity premium, they cannot obtain excess return. And under other conditions they will obtain negative excess return. The regulators might implement policies, such as increasing the registration costs for sophisticated or strengthening disclosure requirements, to mitigate the ambiguity and improve participation. Further studies show that increasing registration costs will reduce the fraction of sophisticated investors and decrease the social welfare; whereas strengthening the disclosure requirements and market transparency can increase the aggregate social welfare.
Key words: ambiguity of correlation; ambiguity aversion; asset pricing; aggregate social welfare

附录

A　式(3)的证明

由于 $\tilde{v}$ 服从正态分布，根据式(1)和式(2)，在给定复杂投资者的持有头寸 D_0 和风险资产价格 p 的条件下，复杂投资者在交易期末的期望效用为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[-\exp(-\tilde{w}_0)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\exp\{-[p+(\tilde{v}-p)D_0-c]\} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon}\exp\left[-\frac{(\tilde{v}-\bar{v})^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right]\mathrm{d}\tilde{v} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} -\exp[-(p-pD_0-c)] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon}\exp\left[-\frac{(\tilde{v}-\bar{v})^2+2D_0\sigma_\varepsilon^2\tilde{v}}{2\sigma_\varepsilon^2}\right]\mathrm{d}\tilde{v} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} -\exp[-(p-pD_0-c)] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon}\exp\left\{-\frac{[\tilde{v}-(\bar{v}-D_0\sigma_\varepsilon^2)]^2+2D_0\sigma_\varepsilon^2\bar{v}-(D_0\sigma_\varepsilon^2)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right\}\mathrm{d}\tilde{v} \\
&= -\exp\left\{-\left[p+(\bar{v}-p)D_0-c-\frac{1}{2}D_0^2\sigma_\varepsilon^2\right]\right\}
\end{aligned}
$$

根据模型假设，复杂投资者在交易期末的财富 w_0 服从正态分布，且

$$\mathrm{E}(\tilde{w}_0) = p+(\bar{v}-p)D_0-c,\ \mathrm{Var}(\tilde{w}_0) = D_0^2\sigma_\varepsilon^2$$

其中 $\mathrm{E}(\tilde{w}_0)$ 和 $\mathrm{Var}(\tilde{w}_0)$ 分别是期望和方差算子，所以

$$\mathrm{E}[-\exp(-\tilde{w}_0)] = -\exp\left[-\left(\mathrm{E}(\tilde{w}_0)-\frac{1}{2}\mathrm{Var}(\tilde{w}_0)\right)\right]$$

B　问题(4)与问题(5)的等价性证明

$$\mathrm{E}_\rho(-\mathrm{e}^{-\tilde{w}_\mathrm{T}}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} -\mathrm{e}^{-\tilde{w}_\mathrm{T}} \times \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon\sigma_Z\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(\tilde{v}-\bar{v})^2}{\sigma_\varepsilon^2}-\frac{2\rho(\tilde{v}-\bar{v})\tilde{Z}}{\sigma_\varepsilon\sigma_Z}+\frac{\tilde{Z}^2}{\sigma_Z^2}\right]\right\}\mathrm{d}\tilde{v}\,\mathrm{d}\tilde{Z}$$

将 $\tilde{w}_{\mathrm{T}} = p + (\tilde{v} - p) D_{\mathrm{T}} + \tilde{Z}$ 代入上式，并令 $Q_1(\tilde{v}, \tilde{Z}) = \frac{(\tilde{v} - \bar{v})^2}{\sigma_\varepsilon^2} - \frac{2\rho(\tilde{v} - \bar{v})\tilde{Z}}{\sigma_\varepsilon \sigma_Z} + \frac{\tilde{Z}^2}{\sigma_Z^2}$，可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_\rho(-\mathrm{e}^{-\tilde{w}_{\mathrm{T}}}) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} -\mathrm{e}^{-[p+(\tilde{v}-p)D_{\mathrm{T}}+\tilde{Z}]} \times \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon\sigma_Z\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} Q_1(\tilde{v}, \tilde{Z})\right\} \mathrm{d}\tilde{v}\mathrm{d}\tilde{Z} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} -\mathrm{e}^{-(p-pD_{\mathrm{T}})} \times \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon\sigma_Z\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} [Q_1(\tilde{v}, \tilde{Z}) + 2(1-\rho^2)(D_{\mathrm{T}}\tilde{v} + \tilde{Z})]\right\} \mathrm{d}\tilde{v}\mathrm{d}\tilde{Z} \\
&= -\mathrm{e}^{-\left[p-pD_{\mathrm{T}}+\frac{2D_{\mathrm{T}}\bar{v}-(\sigma_\varepsilon^2 D_{\mathrm{T}}^2+\sigma_Z^2+2\rho D_{\mathrm{T}}\sigma_\varepsilon\sigma_Z)}{2}\right]} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon\sigma_Z\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} Q_2(\tilde{v}, \tilde{Z})\right\} \mathrm{d}\tilde{v}\mathrm{d}\tilde{Z}
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
Q_2(\tilde{v}, \tilde{Z}) = {} & \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}(\tilde{v} - \bar{v} + D + \rho\sigma_\varepsilon\sigma_Z)^2 - \frac{2\rho}{\sigma_\varepsilon\sigma_Z}(\tilde{v} - \bar{v} + D\sigma_\varepsilon^2 + \rho\sigma_\varepsilon\sigma_Z)(\tilde{Z} + \sigma_Z^2 + \rho D_{\mathrm{T}}\sigma_\varepsilon\sigma_Z) + \\
& \frac{1}{\sigma_Z^2}(\tilde{Z} + \sigma_Z^2 + \rho D\sigma_\varepsilon\sigma_Z)^2
\end{aligned}
$$

从而

$$
\mathrm{E}_\rho(-\mathrm{e}^{-\tilde{w}_{\mathrm{T}}}) = -\exp\left\{-\left[p + (\bar{v} - p)D_{\mathrm{T}} - \frac{\sigma_\varepsilon^2 D_{\mathrm{T}}^2 + \sigma_Z^2 + 2\rho D_{\mathrm{T}}\sigma_\varepsilon\sigma_Z}{2}\right]\right\}
$$

由于

$$
\mathrm{E}_\rho(\tilde{w}_{\mathrm{T}}) = p + (\bar{v} - p)D_{\mathrm{T}}, \ \mathrm{Var}_\rho(\tilde{w}_{\mathrm{T}}) = \sigma_\varepsilon^2 D_{\mathrm{T}}^2 + \sigma_Z^2 + 2\rho D_{\mathrm{T}}\sigma_\varepsilon\sigma_Z
$$

因此

$$
\mathrm{E}_\rho(-\mathrm{e}^{-\tilde{w}_{\mathrm{T}}}) = -\exp\left[-\left(\mathrm{E}_\rho[\tilde{w}_{\mathrm{T}}] - \frac{1}{2}\mathrm{Var}_\rho(\tilde{w}_{\mathrm{T}})\right)\right]
$$

C 定理 1 的证明

求解市场一般均衡，只需要将两类投资者的需求函数分别代入式(6)所示的市场出清条件求解即可. 由于简单投资者的需求函数依不同条件可取 3 种形式，所以下面分情况进行讨论.

当 $g_{\max} < 0$ 时，将 $D_{\mathrm{T}} = \frac{g_{\max}}{\sigma_\varepsilon^2}$ 代入市场出清条件可得风险资产的均衡价格为

$$
p = \bar{v} - [\sigma_\varepsilon^2 + (1 - \mu)\sigma_\varepsilon\sigma_Z \underline{\rho}]
$$

此时，简单投资者对风险资产的均衡持有头寸为 $D_{\mathrm{T}}^* = 1 - \frac{\mu\sigma_Z \underline{\rho}}{\sigma_\varepsilon}$，复杂投资者对风险资产的均衡持有头寸为 $D_{\mathrm{O}}^* = 1 + \frac{(1-\mu)\sigma_Z \underline{\rho}}{\sigma_\varepsilon^2}$. 同时考虑到 $g_{\max} < 0$，可得 $\underline{\rho} > \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z \mu}$.

同理，当 $g_{\min} > 0$ 时，将 $D_{\mathrm{T}} = \frac{g_{\min}}{\sigma_\varepsilon^2}$，代入市场出清条件可得市场均衡价格为

$$
p = \bar{v} - [\sigma_\varepsilon^2 + (1 - \mu)\sigma_\varepsilon\sigma_Z \bar{\rho} D]
$$

简单投资者对风险资产的均衡持有头寸为 $D_{\mathrm{T}}^* = 1 - \frac{\mu\sigma_Z\bar{\rho}}{\sigma_\varepsilon}$，复杂投资者对风险资产的均衡持有头寸为 $D_{\mathrm{O}}^* = 1 + \frac{(1-\mu)\sigma_Z\bar{\rho}}{\sigma_\varepsilon}$. 此时，$\bar{\rho} < \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z \mu}$，$g_{\min} = \sigma_\varepsilon^2 - \mu\sigma_\varepsilon\sigma_Z\bar{\rho}$.

当 $\underline{\rho} \leqslant \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z \mu} \leqslant \bar{\rho}$ 时，此时市场均衡价格为

$$
p = \bar{v} - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\mu}
$$

简单投资者不参与风险资产的交易，即 $D_{\mathrm{T}}^* = 0$，复杂投资者的持有头寸为 $D_{\mathrm{O}}^* = \frac{1}{\mu}$.

D 命题 4 的证明

命题 4 的证明需要分几种情况分别讨论.

当 $\underline{\rho} > \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z}$ 时，$\underline{c} = \lim\limits_{\mu\to 1^-} B(\mu) = \underline{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z + \frac{\sigma_Z^2(1 - \underline{\rho}^2)}{2}$，$\bar{c} = \lim\limits_{\mu\to 0^+} B(\mu) = \bar{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z + \frac{\sigma_Z^2(1 + \bar{\rho}^2)}{2}$，则 $\bar{c} - \underline{c} = 2\sigma_\varepsilon\sigma_Z\Delta\rho + \hat{\rho}^2\sigma_Z^2 + \sigma_Z^2\Delta\rho^2$，此时

$$\frac{\partial(\bar{c}-\underline{c})}{\partial\Delta\rho}=2\sigma_\varepsilon\sigma_Z+2\sigma_Z^2\Delta\rho>0$$

当 $\underline{\rho}\leqslant\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z}<\bar{\rho}$ 时, $\underline{c}=\lim\limits_{\mu\to1^-}B(\mu)=\frac{\sigma_Z^2+\sigma_\varepsilon^2}{2}$, $\bar{c}=\lim\limits_{\mu\to0^+}B(\mu)=\bar{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z+\frac{\sigma_Z^2(1+\bar{\rho}^2)}{2}$, 则 $\bar{c}-\underline{c}=\sigma_\varepsilon\sigma_Z(\hat{\rho}+\Delta\rho)+\frac{\sigma_Z^2(\hat{\rho}+\Delta\rho)^2}{2}-\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}$, 此时

$$\frac{\partial(\bar{c}-\underline{c})}{\partial\Delta\rho}=\sigma_\varepsilon\sigma_Z+\sigma_Z^2\bar{\rho}>0$$

当 $\bar{\rho}\leqslant\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z}$ 时, $\underline{c}=\lim\limits_{\mu\to1^-}B(\mu)=\bar{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z-\frac{\sigma_Z^2(1+\bar{\rho}^2)}{2}$, $\bar{c}=\lim\limits_{\mu\to0^+}B(\mu)=\bar{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z+\frac{\sigma_Z^2(1+\bar{\rho}^2)}{2}$, 则 $\bar{c}-\underline{c}=\sigma_Z^2\bar{\rho}^2$, 此时

$$\frac{\partial(\bar{c}-\underline{c})}{\partial\Delta\rho}=2\sigma_Z^2\bar{\rho}\begin{cases}>0, & \bar{\rho}>0\\ =0, & \bar{\rho}=0\\ <0, & \bar{\rho}<0\end{cases}$$

综上，命题 4 得证.

E　命题 5 的证明

将复杂投资者所占比例 μ 内生化并达到均衡后，风险资产的权益溢价可以表示为

$$EP^*=\begin{cases}\sigma_\varepsilon^2+(1-\mu^*)\sigma_\varepsilon\sigma_Z\underline{\rho}, & \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}<\underline{\rho}\leqslant1\\ \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\mu^*}, & -1\leqslant\underline{\rho}\leqslant\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}\leqslant\bar{\rho}\leqslant1\\ \sigma_\varepsilon^2+(1-\mu^*)\sigma_\varepsilon\sigma_Z\bar{\rho}, & -1\leqslant\bar{\rho}<\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}\end{cases}$$

当 $\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}<\underline{\rho}\leqslant1$ 时, $EP^*=\sigma_\varepsilon^2+(1-\mu^*)\sigma_\varepsilon\sigma_Z\underline{\rho}$, 那么 $\frac{\partial EP^*}{\partial\mu^*}=-\sigma_\varepsilon\sigma_Z\underline{\rho}$, 由于 $\underline{\rho}>0$, 所以

$$\frac{\partial EP^*}{\partial\mu^*}<0$$

当 $-1\leqslant\underline{\rho}\leqslant\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}\leqslant\bar{\rho}\leqslant1$ 时, $EP^*=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\mu^*}$, 则 $\frac{\partial EP^*}{\partial\mu^*}=-\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\mu^{*2}}$, 此时也有

$$\frac{\partial EP^*}{\partial\mu^*}<0$$

当 $-1\leqslant\bar{\rho}<\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}$ 时, $EP^*=\sigma_\varepsilon^2+(1-\mu^*)\sigma_\varepsilon\sigma_Z\bar{\rho}$, 则 $\frac{\partial EP^*}{\partial\mu^*}=-\sigma_\varepsilon\sigma_Z\bar{\rho}$, 此时

$$\frac{\partial EP^*}{\partial\mu^*}\begin{cases}>0, & -1\leqslant\bar{\rho}<0\\ =0, & \bar{\rho}=0\\ <0, & 0<\bar{\rho}<\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}\end{cases}$$

因此，合并 $\frac{\partial EP^*}{\partial\mu^*}<0$ 的情形，即合并以下几个条件: 1) $\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}<\underline{\rho}\leqslant\bar{\rho}\leqslant1$; 2) $-1\leqslant\underline{\rho}\leqslant\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}\leqslant\bar{\rho}\leqslant1$; 3) $0<\bar{\rho}<\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}$, 得到 $0<\bar{\rho}\leqslant1$. 这样可得命题 5 的结论.

F　命题 7 的证明

根据隐函数求导法则可以得到下式

$$\frac{d\mu^*}{d\Delta\rho}=-\frac{\frac{\partial B(\mu^*,\Delta\rho)}{\partial\Delta\rho}}{\frac{\partial B(\mu^*,\Delta\rho)}{\partial\mu^*}}=\begin{cases}-\frac{f(1-\mu^*)\sigma_Z\sigma_\varepsilon+g_{\max}\mu^*\sigma_Z\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z^2\sigma_\varepsilon^2\underline{\rho}^2}=-\frac{\underline{\rho}\sigma_Z^2(1-2\mu^*)+\sigma_Z\sigma_\varepsilon}{\underline{\rho}^2\sigma_Z^2}, & \frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}<\underline{\rho}\leqslant1\\ 0, & -1\leqslant\underline{\rho}\leqslant\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}\leqslant\bar{\rho}\leqslant1\\ \frac{f(1-\mu^*)\sigma_Z\sigma_\varepsilon+g_{\min}\mu^*\sigma_Z\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z^2\sigma_\varepsilon^2\bar{\rho}^2}=\frac{\bar{\rho}\sigma_Z^2(1-2\mu^*)+\sigma_Z\sigma_\varepsilon}{\bar{\rho}^2\sigma_Z^2}, & -1\leqslant\bar{\rho}<\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}\text{ 且 }\bar{\rho}\neq0\end{cases}$$

当 $\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}<\underline{\rho}\leqslant1$ 时, $f>0$, $g_{\max}<0$, $\frac{d\mu^*}{d\Delta\rho}$ 的符号取决于 $\underline{\rho}\sigma_Z^2(1-2\mu^*)+\sigma_Z\sigma_\varepsilon$ 的符号，此时可得

$$\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\Delta\rho}\begin{cases} > 0, & \mu^* > \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sigma_\varepsilon}{2\underline{\rho}\sigma_Z} \\ = 0, & \mu^* = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sigma_\varepsilon}{2\underline{\rho}\sigma_Z} \\ < 0, & \mu^* < \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sigma_\varepsilon}{2\underline{\rho}\sigma_Z} \end{cases}$$

当 $-1 \leqslant \underline{\rho} \leqslant \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} \leqslant \bar{\rho} \leqslant 1$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\Delta\rho} = 0$

当 $-1 \leqslant \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}$ 且 $\bar{\rho} \neq 0$ 时，$g_{\min} > 0$，在此情况下，当 $-\dfrac{\sigma_\varepsilon}{(1-\mu^*)\sigma_Z} \leqslant \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}$ 时，$f \geqslant 0$，所以此时有 $\dfrac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\Delta\rho} > 0$

当 $-1 < \bar{\rho} < -\dfrac{\sigma_\varepsilon}{(1-\mu^*)\sigma_Z}$ 时，$f < 0$，此时 $\dfrac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\Delta\rho}$ 的符号取决于 $\bar{\rho}\sigma_Z^2(1-2\mu^*) + \sigma_Z\sigma_\varepsilon$，因此可得

$$\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\Delta\rho}\begin{cases} > 0, & \mu^* > \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sigma_\varepsilon}{2\bar{\rho}\sigma_Z} \\ = 0, & \mu^* = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sigma_\varepsilon}{2\bar{\rho}\sigma_Z} \\ < 0, & \mu^* < \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sigma_\varepsilon}{2\bar{\rho}\sigma_Z} \end{cases}$$

综上，命题 7 得证.

G　命题 8 的证明

由于 μ^* 是 $\Delta\rho$ 的函数，根据式(8)可知，当 $\dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} < \underline{\rho} \leqslant 1$ 时

$$\frac{\partial EP^*}{\partial\Delta\rho} = -\sigma_\varepsilon\sigma_Z\underline{\rho}\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\Delta\rho} - (1-\mu^*)\sigma_\varepsilon\sigma_Z = \frac{\sigma_\varepsilon^2 - \underline{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z}{\underline{\rho}} < 0$$

由于此时 $\underline{\rho} > 0$，所以 $\dfrac{\partial EP^*}{\partial\Delta\rho} < 0$

当 $-1 \leqslant \underline{\rho} \leqslant \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} \leqslant \bar{\rho} \leqslant 1$ 时 $\dfrac{\partial EP^*}{\partial\Delta\rho} = 0$

当 $-1 \leqslant \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}$ 时，$\dfrac{\partial EP^*}{\partial\Delta\rho} = -\sigma_\varepsilon\sigma_Z\bar{\rho}\dfrac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\Delta\rho} + (1-\mu^*)\sigma_\varepsilon\sigma_Z = \dfrac{-\sigma_\varepsilon^2 + \bar{\rho}\sigma_\varepsilon\sigma_Z}{\bar{\rho}}$，所以

$$\frac{\partial EP^*}{\partial\Delta\rho}\begin{cases} > 0, & \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z} < \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} \\ < 0, & 0 < \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z} \\ > 0, & -1 \leqslant \bar{\rho} < 0 \end{cases}$$

综上，命题 8 得证.

H　命题 9 的证明

根据式(10)可知 $\dfrac{\partial WEL^*}{\partial\Delta\rho} = WEL^{*\prime}_{\Delta\rho} + WEL^{*\prime}_{\mu^*}\dfrac{\mathrm{d}\mu^*}{\Delta\rho}$. 所以

当 $-1 \leqslant \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} < \underline{\rho} \leqslant 1$ 时 $\dfrac{\partial WEL^*}{\partial\Delta\rho} = (1-\mu)[\sigma_\varepsilon\sigma_Z - \underline{\rho}\sigma_Z^2\mu] < 0$.

当 $-1 \leqslant \underline{\rho} \leqslant \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*} \leqslant \bar{\rho} \leqslant 1$ 时 $\dfrac{\partial WEL^*}{\partial\Delta\rho} = 0$.

当 $-1 \leqslant \bar{\rho} < \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_Z\mu^*}$ 时 $\dfrac{\partial WEL^*}{\partial\Delta\rho} = (1-\mu)[-\sigma_\varepsilon\sigma_Z + \bar{\rho}\sigma_Z^2\mu] < 0$.

命题 9 得证.