对赌协议该签吗? 企业股权融资的运营分析[①]

邓　杰[1, 2], 于　辉[1*]
(1. 重庆大学经济与工商管理学院, 重庆 400030; 2. 重庆工商大学会计学院, 重庆 400067)

摘要: 股权融资是成长型企业捕获成长机会、获得跨越式发展的重要手段,然而在股权融资过程中是否应该签订对赌协议这一问题长期困扰着企业家. 以企业价值创造与供需匹配的运营视角研究了零售商与私募股权投资机构(PE)之间的对赌问题,分别基于零售商风险规避和模糊规避两种决策行为构建了有无对赌协议的效用模型,刻画并对比了对赌对两种行为零售商的决策、效用等多方面的影响. 研究发现,尽管风险规避行为下零售商的决策更为保守,但两种行为都存在"对赌协议签订区间"使得对赌协议有助于提升投融资双方的运作效用. 特别地,企业成长性是签订对赌协议的关键因素,当企业成长性较高时应该签订对赌协议,若成长性不足,则应考虑企业估值和运营的利润率情况,从而决定是否签订对赌协议.

关键词: 对赌协议; 股权融资; 风险规避; 模糊规避
中图分类号: F272.3　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1007-9807(2020)10-0060-22

0 引 言

2017年11月,360借壳江南嘉捷上市A股,并签下了一份业绩目标高达89亿元的对赌协议,在投资圈里掀起了一阵资本波澜[1]. 对赌协议也称"估值调整机制(valuation adjustment mechanism, VAM)",是投融资双方为了达成一致协议而附加的对未来不确定情况的约定,使得双方在约定时间到期后可以根据企业的实际绩效对原本的投融资条件进行调整. 对赌协议自2003年登陆中国以来,已经被广泛应用于资本领域,新三板第一门户挖贝网有过统计,2015年和2016年披露对赌协议的新三板企业分别为128家、120家,而2017年截至11月6日这一数据已达到238家,比去年翻了将近1倍[2]. 另据Choice数据显示,2017年A股定增重组、并购重组交易中涉及的对赌协议有500余份[3]. 不同的企业签订对赌协议后有不同的结果,对赌成功者,例如蒙牛、雨润食品等企业得以快速发展,投资方也收获丰厚的资本增值回报; 对赌失败者,例如永乐电器、太子奶、俏江南等则创始人离职、企业严重亏损甚至被收购. 有意思的是,360董事长周鸿祎在几年前曾说过"对赌往往带来双输的局面",而如今在签订对赌协议时,又表示基于360目前的营业收入,对这个对赌承诺非常有信心. 如此"言行不一"的背后自然有其深刻的道理,事实上,从其2019年的财报来看,360已超额完成对赌协议. 由此不禁要问,什么样的企业适合对赌,什么样的企业不应该对赌? 厘清这样的问题将有助于创业者和股权投资者更加科学和谨慎地使用对赌协议,规避"双输".

对赌协议最早是在国外企业并购盛行的背景下提出来的,但无论是在被称为美国风险投资大本营的加州硅谷[4],还是在国外学术研究中都没有关于"对赌协议"或者"估值调整机制"的专门术语[5],而是以"earnout"[6, 7]、"contingent con-

① 收稿日期: 2017-12-29; 修订日期: 2020-02-21.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71571024; 71872021); 教育部人文社会科学研究青年基金资助项目(19YJC630026); 中央高校基本科研业务费资助项目(2018CDJSK02XK17).
通讯作者: 于　辉(1973—), 男, 重庆人, 博士, 教授, 博士生导师. Email: yuhui@cqu.edu.cn

tract”[8]的形式被企业家广泛使用，且 Bazerman 和 Gillespie[9]认为这样的合同通常被视为赌博. 与对赌协议类似，在这样的契约中，投标人事先只需支付一部分费用，余下的则要推迟到目标公司实现确定的业绩目标之后再行支付[10]，这使得当目标公司未来更多地与价值相关的信息变得可用时，买卖双方可以重新对企业价值进行评估[11]. Ragozzino 和 Reuer[12]认为由于这样的契约将过度支付的风险由信息较少的并购方转移到了被并购方，因此可以有效减少并购中的逆向选择问题. 尽管具有上述优点，Caselli 等[13]的研究发现，分期支付以及监管所带来的低效率和缔约成本可能会限制此类协议的使用. Cain 等[14]又通过实证研究表明，在并购中，使用此协议最多的往往是那些企业价值具有较高不确定性的标的企业，比如标的企业是子公司或者私人所有(没有市场价格作为参考基准)，或者是服务、高科技类型的企业(两者未来前景都具有高度不确定性)，这无疑加大了资方的投资风险. 甚至 Viarengo 等[15]认为 earnout 产生的根源就在于投、融资双方对企业未来价值判断的不一致，而鉴于结果验证的复杂性以及管理者潜在的道德风险，投资方提起法律诉讼的情况比获得赔偿的情况更常见，因此，此类协议在国外资本市场上越来越不受欢迎.

相较于国外资本市场，我国相关的法律法规不完善，目前国内关于对赌协议的研究主要从法律层面和企业层面两个角度展开. 在法律层面上，学者主要关注对赌协议的合同属性以及法律效力问题. 目前关于对赌协议的合同属性存在“射幸合同”[16]和“附条件合同”[17]两种说法，尽管学术界关于对赌协议的合同属性尚无统一说法，但是对其法律效力学者普遍是认可的[18, 19]. 本文不探讨对赌协议的法律效力，而是关注企业层面上对赌协议是否应该签订的问题.

在企业层面上，学者主要关注对赌协议的运行机制和管理激励功能[20]. 在运行机制方面，肖菁[21]通过案例分析的方式指出在制定对赌协议时应重视正确评价企业已实现的财务业绩，合理预测未来业绩. 林畅杰[22]基于可持续增长模型探究了签订对赌协议可能引发的财务效应，发现对赌容易诱发企业的短期化行为，削弱企业的长期竞争力. 对此，刘峰涛等[23]以博弈论作为研究方法，发现采用重复对赌协议机制可以有效克服短期利益的束缚和信息风险，避免由于一次性签约业绩目标过高所采取的冒险行为. 在管理激励方面，由于代理人的道德水平是个无法掌控的因素[24]，故需要通过激励契约对逆向选择和道德风险问题进行激励和协调[25]. 李燕萍等[26]指出，当激励契约不完备时，高管从激励契约中获取不到足够的报酬，可能会通过其他手段寻求补偿，进而给企业带来不利影响. 而肖欣荣和田存志[27]研究了私募基金管理者与基金外部投资人的委托代理关系，发现业绩表现费(超过约定业绩后的收益分成)有助于降低私募基金管理者的道德风险，为对赌协议管理激励功能提供了理论依据. 张波等[28]以理论模型证明了对赌协议是能够有效保护投资者收益和激励管理层的最优制度安排. 项海容等[29]利用契约理论也论证了对赌协议对企业家存在激励效应，但不同难度的对赌目标对企业家的激励效应是不同的.

还有 Bates 等[30]研究了并购中的 earnout 对资金受限的收购方的重要意义，发现这种延迟支付部分并购费用的方式为并购方提供了重要的资金来源. 本文通过实证研究表明，该协议约定的未来支付额占到了并购总额度的 30%，超过了收购方当前持有的现金和有价证券总量的 3 倍. 另一方面，还发现资金受限的收购方比资金充足的收购方更有可能使用此协议，因此收购方的财务约束对此类协议在并购中的使用具有积极的和经济上的重大影响. 本文为对赌协议的研究开拓了新的方向.

上述从企业层面探讨对赌协议的文献已经注意到“不确定性”这一要素对对赌结果的影响，Cain 等[14]和 Viarengo 等[15]甚至认为对赌协议在国外资本市场上不受欢迎的根本原因就在于融资企业的不确定性太高. 然而这些文章并没有详细刻画不确定性，无法回答由不确定性引发的企业是否应该签订对赌协议的问题，因此，本文立足于不确定因素本身，以运营视角在企业成长性不确定的情况下探讨了对赌协议的签订问题. 主要原因有以下两点: 其一，对赌协议具有不确定性的根源在于企业自身的不确定性，例如企业面临的市场需求不确定、上游供货不确定、企业的成长性不确定等，这些因素才是造成企业最终财务绩效与对赌结果不确定的根本原因. 其中，成长性不确定

是制约成长型企业发展的重要因素,对对赌的结果有着举足轻重的影响. 其二,激励融资方更好地经营企业是签订对赌协议的一大重要目的,而保持良好的运营状态则是企业实现对赌业绩目标的关键途径,因为运营管理致力于对产品的开发、生产、交付以及产品和服务的配置等进行科学改进[16],故不能剥离运营去研究对赌协议.

本文基于运营视角在成长性不确定的情况下研究了零售商与私募股权投资机构的对赌问题,分别在零售商风险规避和模糊规避(ambiguity averse) 的决策行为下,通过构建有无对赌协议两种情况的效用模型,对比分析了对赌协议的签订对投融资双方的影响,探讨了什么样的企业应该签订对赌协议,什么样的企业不适合签订对赌协议的问题,有助于投融资者更加科学的使用对赌协议,实现合作共赢.

1 问题描述与基本假设

以二级供应链中的零售商为研究对象,如图所示,图 1 为有对赌协议情况,图 2 为无对赌协议情况.

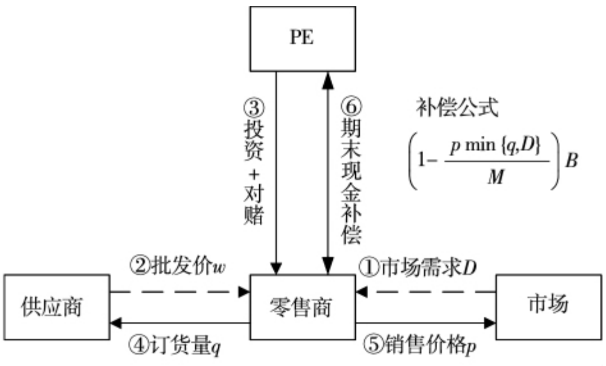

图 1 成长风险下融资对赌流程

Fig. 1 Operational process with VAM under growth risk

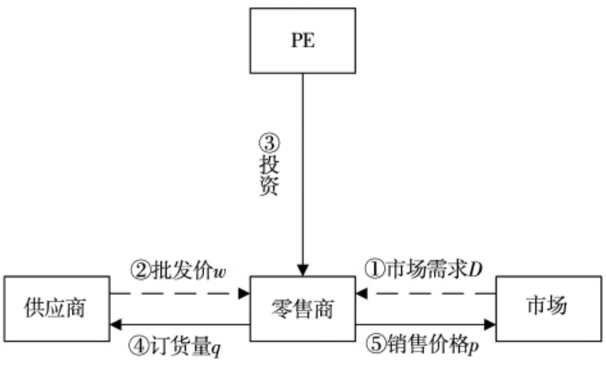

图 2 成长风险下融资不对赌流程

Fig. 2 Operational process without VAM under growth risk

零售商以价格 w 向供应商订货,然后以价格 p 向市场销售,市场需求 $D_0 = a - bp$. 由于企业处于成长期,零售商往往面临良好的市场机会,根据文献[32],管理者可以通过投资产品研发、提升产能、开拓市场等方式来提升企业的运营能力,增强短期效益,进而把控成长机会. 对此,考虑零售商以市场开拓的方式来把握成长机会,可以通过付出努力 e 开拓市场,扩大市场规模. 然而外部环境的不确定性使得企业的成长性也不确定,表现为市场规模的扩张具有随机性,根据文献[33],新的市场需求可以表示为 $D = a - bp + \xi e$,其中 ξ 表示每单位努力带来的需求的随机增加量,其概率密度函数为 f 、累积分布函数为 F 均未知,已知的信息只有其均值 μ 以及方差 σ^2 . 销售努力的成本 $V(e)$ 关于努力水平 e 是单调增且 $V(0) = 0$ 的凸函数,不失一般性,令 $V(e) = 0.5se^2$,其中 s 为努力成本参数, $s > 0$. 出于资金压力和分担风险的原因,零售商引入私募股权投资机构(PE) 进行增资,并签订了以销售额为业绩目标,以现金为补偿形式的对赌协议. 融资后零售商需要决策最优订货量 q 以及努力水平 e .

假定零售商融资时企业处于扩张期,尚未首次公开募股(IPO) ,并假定 PE 以损益表法中的市净率估值法对企业进行估值. 企业融资以及市场扩张之后,产品的成本和销售价格不变,运营决策权仍由原股东(零售商) 控制. 模型不考虑融资成本与税收,在不改变模型本质架构的基础上,本文另作如下假设:

1) 假定零售商以自身所占的净资产为其效用函数,PE 股权投资都有非常明确的目的性,尤其是在签订对赌协议的情况下,给零售商设置的业绩目标真实地反映了 PE 的投资意图,因此假定 PE 的效用由自身净资产和销售额加权组成.

2) 融资资金充足,能够保证零售商进行市场开拓和满足新增的订货成本.

3) 不考虑商品残值和缺货时的企业商誉损失. 从最终的解析结果来讲,考虑这两者只是在最优解的基础上增加了两个扰动因素,对其管理意义的探讨和分析没有任何本质影响.

其它参数设定如下.

表 1　参数说明

Table 1 Parameter description

符号	说明
A	零售商融资前的固定资产
η	零售商融资前自有资金
α	市净率估值法下零售企业的估值倍数
Γ	均值为 μ ,标准差为 σ 的非负分布函数集
M	对赌协议中约定的销售额业绩目标
θ	股权融资后零售商的持股比例
τ	PE 效用函数中净资产的权重

2　零售商股权融资的运营决策

零售商在股权融资之后有充足的资金进行市场开拓,根据前文假设,新的市场需求为 $D = a - bp + \xi e$. 显然,融资之后零售商的订货量 $q \geqslant a - bp$,进而零售商的销售额变为 $S(q,e) = p\min\{q, a - bp + \xi e\}$,净利润为 $p\min\{q,a - bp + \xi e\} - wq - 0.5se^2$. 根据市净率估值法,零售商在股权融资之后对零售企业的持股比例变为

$$\theta = \frac{\alpha(A + \eta)}{\alpha(A + \eta) + B} \tag{1}$$

PE 的持股比例为 $\bar{\theta} = 1 - \theta$. 因此,零售商在销售期末的净资产为

$$TA_{\mathrm{R}}(q,e) = \theta(A + \eta + B + p\min\{q,a - bp + \xi e\} - wq - 0.5se^2) \tag{2}$$

PE 的净资产为

$$TA_{\mathrm{PE}}(q,e) = \bar{\theta}(A + \eta + B + p\min\{q,a - bp + \xi e\} - wq - 0.5se^2) \tag{3}$$

PE 的效用为

$$U_{\mathrm{PE}}(q,e) = \tau TA_{\mathrm{PE}}(q,e) + (1 - \tau) S(q,e) \tag{4}$$

为便于深入分析对赌给零售商带来的影响,将在无对赌协议和有对赌协议两种情况下讨论并对比零售商的运营决策,同时考察零售商在模糊规避(风险中性)和风险规避两种行为下的决策.

2.1　不对赌时不同风险偏好下的运营决策

假定投融资双方有着良好的信任关系,且投资方十分看好融资企业未来的发展,因此在股权投融资时双方不签订对赌协议. 由于零售商只掌握了随机成长因子的部分信息,此时市场具有较强的波动性,决策者的风险态度(尤其是风险规避态度)将极为关键[34]. 假定零售商是风险规避的,采用 Natarajan 等[35] 所提出的最差可能条件风险值(worst-case conditional value at risk, WCVaR)的方法构建模型.

令风险规避型零售商的风险容忍度为 $k(0 < k < 1)$,其值越小,表明零售商风险规避程度越高,反之则越低. 当 $k = 1$ 时,零售商为风险中性(模糊规避). 在零售商不对赌时以 WCVaR 为风险度量准则的决策模型为

$$\max_{q,e} WCVaR_k[TA_{\mathrm{R}}(q,e)] \tag{5}$$

其中

$$WCVaR_k[TA_{\mathrm{R}}(q,e)] = \max_{v \in \mathbb{R}}\left\{v + \frac{1}{k}\min_{F\sim(\mu,\sigma^2)} \mathrm{E}[(TA_{\mathrm{R}}(q,e) - v)_-]\right\}$$

$$(y)_- = \min\{y,0\}$$

$$(y)_+ = \max\{y,0\}$$

要解上述模型,需要分 3 个步骤. 首先,设

$$\phi(q,e,v) = \min_{F\sim(\mu,\sigma^2)} \mathrm{E}[(TA_{\mathrm{R}}(q,e) - v)_-]$$

下面将讨论 $\phi(q,e,v)$ 的解析表达式. 为方便表述,记

$$m = A + \eta + B - 0.5se^2$$

$$t = \frac{\theta wq + v - \theta m}{\theta p}$$

$$h(q,e,v,\xi) = (q - (q - a + bp - \xi e)_+ - t)_-$$

$$\varphi(q,e,v) = \min_{F\sim(\mu,\sigma^2)} \mathrm{E}[h(q,e,v,\xi)]$$

则显然 $\phi(q,e,v) = \theta p\varphi(q,e,v)$. 下面的引理给出了 $\phi(q,e,v)$ 的解析表达式.

引理 1　函数 $\phi(q,e,v)$ 关于 v 连续,且当 $\frac{q - a + bp}{e} < \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu}$ 时

$$\phi(q,e,v)=\begin{cases}0:=\phi_1,\ v\leqslant\theta m-\theta wq+\theta p(a-bp)\\ \theta p(a-bp-t)\dfrac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}:=\phi_2,\theta m-\theta wq+\theta p(a-bp)<v\leqslant\theta(p-w)q+\theta m\\ \theta p\left(q-t-\left(q-a+bp\right)\dfrac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}\right):=\phi_3,\ v>\theta(p-w)q+\theta m\end{cases} \tag{6}$$

当 $\frac{q-a+bp}{e}\geqslant\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}$ 时

$$\phi(q,e,v)=\begin{cases}0:=\phi_4,\ v\leqslant\theta m-\theta wq+\theta p(a-bp)\\ \theta p(a-bp-t)\dfrac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}:=\phi_5,\\ \qquad\theta m-\theta wq+\theta p(a-bp)<v\leqslant\theta m-\theta wq+\theta p\left(a-bp+e\dfrac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}\right)\\ -\theta p\dfrac{e}{2}\left(\sqrt{\left(\dfrac{t-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}+\left(\dfrac{t-a+bp}{e}-\mu\right)\right):=\phi_6,\\ \qquad\theta m-\theta wq+\theta p\left(a-bp+e\dfrac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}\right)<v\leqslant\theta(p-w)q+\theta m\\ \theta p\left[q-t-\dfrac{e}{2}\left(\sqrt{\left(\dfrac{q-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}+\left(\dfrac{q-a+bp}{e}-\mu\right)\right)\right]:=\phi_7,\\ \qquad v>\theta(p-w)q+\theta m\end{cases} \tag{7}$$

证明 见附录.

其次,求解 $WCVaR_k[TA_R(q,e)]$,下面的引理给出了相关的解析表达式.

引理 2 $WCVaR_k[TA_R(q,e)]$ 关于 (q,e) 连续,且当 $\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}<k<1$ 时

$$WCVaR_k[TA_R(q,e)]=$$

$$\begin{cases}\theta m+\theta(p-w)q-\dfrac{\theta p}{k}(N)\dfrac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}:=\omega_1,\ \dfrac{N}{e}<\dfrac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}\\ \theta m+\theta(p-w)q-\dfrac{\theta p}{k}\dfrac{e}{2}\left(\sqrt{\left(\dfrac{N}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}+\left(\dfrac{N}{e}-\mu\right)\right):=\omega_2,\ \dfrac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}\leqslant\dfrac{N}{e}<\mu-\dfrac{(1-2k)\sigma}{2\sqrt{k(1-k)}}\\ \theta m+\theta(p-w)q-\theta p\left(N-e\left(\mu-\sigma\sqrt{\dfrac{1-k}{k}}\right)\right):=\omega_3,\ \mu-\dfrac{(1-2k)\sigma}{2\sqrt{k(1-k)}}\leqslant\dfrac{N}{e}\end{cases} \tag{8}$$

当 $0<k\leqslant\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}$ 时

$$WCVaR_k[TA_R(q,e)]=\theta m-\theta wq-B+\left(\theta+\frac{B}{M}\right)p(a-bp):=\omega_0 \tag{9}$$

其中 $N=q-a+bp$.

证明 见附录.

最后,求解 $\max\limits_{q,e}WCVaR_k[TA_R(q,e)]$. 定理 1 给出了风险规避型零售商在 WCVaR 下的最优决策.

定理 1 当零售商股权融资但不与 PE 对赌时,风险规避型零售商的最优决策为

1) 当 $\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2<\frac{p-(p-w)k}{(p-w)k}$ 时

$$\begin{cases}e_a^*=0\\ q_a^*=a-bp\end{cases} \tag{10}$$

2) 当 $\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 \geqslant \frac{p-(p-w)k}{(p-w)k}$ 时

$$\begin{cases} e_{a}^{*} = \frac{\mu(p-w)}{s} - \\ \quad \frac{\sigma\sqrt{k(p-w)[p-k(p-w)]}}{ks} \\ q_{a}^{*} = a-bp+\mu e_{a}^{*} + \\ \quad \frac{\sigma}{2}\frac{2k(p-w)-p}{\sqrt{k(p-w)[p-k(p-w)]}}e_{a}^{*} \end{cases} \tag{11}$$

证明　见附录.

当零售商的风险容忍度 $k=1$,即零售商为风险中性时,有以下结论.

命题 1　当零售商股权融资但不与 PE 对赌时,风险中性零售商的最优决策为

1) 当 $\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 < \frac{w}{p-w}$ 时

$$\begin{cases} e_{n}^{*} = 0 \\ q_{n}^{*} = a-bp \end{cases}$$

2) 当 $\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 \geqslant \frac{w}{p-w}$ 时

$$\begin{cases} e_{n}^{*} = \frac{\mu(p-w)-\sigma\sqrt{w(p-w)}}{s} \\ q_{n}^{*} = a-bp+\mu e_{n}^{*} + \frac{\sigma}{2}\frac{p-2w}{\sqrt{w(p-w)}}e_{n}^{*} \end{cases} \tag{12}$$

均值的大小代表了零售企业成长性的高低,而方差的大小则意味着成长风险的高低. 因此,根据定理 1 可以发现: 企业的成长性越高,零售商愿意付出的努力水平也越高; 而成长风险的增加则会导致零售商的努力水平降低,尤其是当成长风险过高时,会出现类似于经典的 Scarf 模型[36]中完全不订货的情况,此时零售商不会付出努力去进行市场开拓. 另外,在没有对赌协议的情况下,无论提高还是降低对融资企业的估值倍数,均不会改变零售商的努力水平和订货量,这意味着此时投资方缺少适当的激励措施.

2.2　对赌时不同风险偏好下的运营决策

成长性的不确定使得零售企业未来的经营状况也具有很大的不确定性,即便零售企业的成长因子具有较高的均值,也即成长性具有较高的期望值,PE 仍会承受巨大的风险. 因此,PE 往往要求与零售商签订对赌协议,一方面可以充分保障投资者的利益,另一方面又可以激励零售商付出足够的努力按 PE 的意愿扩张市场,促进企业快速成长,为双方带来高额回报.

PE 投资成长型企业的目的是促进企业业务快速增长,最终成功上市并退出. 而我国企业上市大多数都有营业收入要求,故假设 PE 与零售商签订了以销售额为业绩目标、以现金为补偿形式的对赌协议,那么零售商在销售期末的净资产变为

$$\begin{aligned} TA_{\mathrm{R\_VAM}}(q,e) &= (\theta+B/M)p\min\{q,a- \\ &\quad bp+\xi e\} + \theta(A+\eta+B- \\ &\quad wq-0.5se^2) - B \end{aligned} \tag{13}$$

PE 的净资产为

$$\begin{aligned} TA_{\mathrm{PE\_VAM}}(q,e) &= (\bar{\theta}-B/M)p\min\{q,a- \\ &\quad bp+\xi e\} + \bar{\theta}(A+\eta+B- \\ &\quad wq-0.5se^2) + B \end{aligned} \tag{14}$$

PE 的总效用为

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{PE\_VAM}}(q,e) &= \tau TA_{\mathrm{PE\_VAM}}(q,e) + \\ &\quad (1-\tau)S(q,e) \end{aligned} \tag{15}$$

在 WCVaR 风险度量准则下,零售商此时的决策模型为

$$\max_{q,e} WCVaR_k[TA_{\mathrm{R\_VAM}}(q,e)]\frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{16}$$

用相同的方法,可以求出此时零售商的最优决策.

定理 2　当零售商股权融资且与 PE 对赌时,风险规避型零售商的最优决策为

1) 当 $\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 < \frac{(\theta+B/M)p-((\theta+B/M)p-\theta w)k}{((\theta+B/M)p-\theta w)k}$ 时

$$\begin{cases} e_{\mathrm{a\_VAM}}^{*} = 0 \\ q_{\mathrm{a\_VAM}}^{*} = a-bp \end{cases}$$

2) 当 $\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 \geqslant \frac{(\theta+B/M)p-k((\theta+B/M)p-\theta w)}{k((\theta+B/M)p-\theta w)}$ 时

$$
\begin{cases}
e_{\mathrm{a\_VAM}}^{*} = \dfrac{k\mu\left(\left(\theta+\dfrac{B}{M}\right)p-\theta w\right)-\sigma\sqrt{k\left(\left(\theta+\dfrac{B}{M}\right)p-\theta w\right)\left[\left(\theta+\dfrac{B}{M}\right)p-k\left(\left(\theta+\dfrac{B}{M}\right)p-\theta w\right)\right]}}{\theta k s} \\
q_{\mathrm{a\_VAM}}^{*} = a-bp+\mu e_{\mathrm{a\_VAM}}^{*}+\dfrac{\sigma}{2}\dfrac{2k\left(\left(\theta+\dfrac{B}{M}\right)p-\theta w\right)-\left(\theta+\dfrac{B}{M}\right)p}{\sqrt{k\left(\left(\theta+\dfrac{B}{M}\right)p-\theta w\right)\left[\left(\theta+\dfrac{B}{M}\right)p-k\left(\left(\theta+\dfrac{B}{M}\right)p-\theta w\right)\right]}}e_{\mathrm{a\_VAM}}^{*}
\end{cases}
\tag{17}
$$

证明 同定理 1.

当零售商的风险容忍度 $k = 1$,即零售商为风险中性时,有以下结论.

命题 2 当零售商股权融资且与 PE 对赌时,风险中性零售商的最优决策为

1) 当 $\left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)^2 < \dfrac{\theta w}{(\theta + B/M)p - \theta w}$ 时

$$
\begin{cases}
e_{\mathrm{n\_VAM}}^{*} = 0 \\
q_{\mathrm{n\_VAM}}^{*} = a - bp
\end{cases}
$$

2) 当 $\left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)^2 \geqslant \dfrac{\theta w}{(\theta + B/M)p - \theta w}$ 时

$$
\begin{cases}
e_{\mathrm{n\_VAM}}^{*} = \dfrac{\mu[(\theta+B/M)p-\theta w]-\sigma\sqrt{\theta w[(\theta+B/M)p-\theta w]}}{\theta s} \\
q_{\mathrm{n\_VAM}}^{*} = a-bp+\mu e_{\mathrm{n\_VAM}}^{*}+\dfrac{\sigma}{2}\dfrac{(\theta+B/M)p-2\theta w}{\sqrt{\theta w[(\theta+B/M)p-\theta w]}}e_{\mathrm{n\_VAM}}^{*}
\end{cases}
\tag{18}
$$

对比命题 1 和命题 2 发现,对赌协议的签订对零售商的努力水平有较大影响,通过以下推论进一步探讨对赌协议是否真的对零售商具有激励效应.

推论 1 签订对赌协议会促使零售商提升努力水平和订货量.

证明 首先考察努力水平. 显然,当 $\left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)^2 < \dfrac{w}{p-w}$ 时,$e_{\mathrm{n}}^{*} \leqslant e_{\mathrm{n\_VAM}}^{*}$,故主要考察 $\dfrac{w}{p-w} \leqslant \left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)^2$ 时 $e_{\mathrm{n\_VAM}}^{*}$ 与 e_{n}^{*} 的大小关系. 假设 $e_{\mathrm{n\_VAM}}^{*} - e_{\mathrm{n}}^{*} < 0$,则有

$$
\mu^2\left(\frac{B}{\theta M}\right)^2 p^2 + \sigma^2 w(p-w) + 2\mu\sigma\frac{B}{\theta M}p\sqrt{w(p-w)} < \sigma^2 w\left[\left(1+\frac{B}{\theta M}\right)p - w\right]
$$

这等价于 $\mu^2\dfrac{B}{\theta M}p + 2\mu\sigma\sqrt{w(p-w)} < \sigma^2 w$,由此可得 $2\mu\sqrt{w(p-w)} < \sigma w$,与 $\dfrac{w}{p-w} \leqslant \left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)^2$ 矛盾,因此 $e_{\mathrm{n\_VAM}}^{*} - e_{\mathrm{n}}^{*} > 0$. 再考察订货量,类似地,只需证明当 $\dfrac{w}{p-w} \leqslant \left(\dfrac{\mu}{\sigma}\right)^2$ 时,$q_{\mathrm{n\_VAM}}^{*} > q_{\mathrm{n}}^{*}$ 即可. 前面已经证明了 $e_{\mathrm{n\_VAM}}^{*} > e_{\mathrm{n}}^{*}$,因此

$$
q_{\mathrm{n\_VAM}}^{*} > a - bp + \mu e_{\mathrm{n}}^{*} + \frac{\sigma}{2}\frac{(\theta+B/M)p-2\theta w}{\sqrt{\theta w[(\theta+B/M)p-\theta w]}}e_{\mathrm{n}}^{*}
$$

若能证明

$$
\frac{(\theta+B/M)p-2\theta w}{\sqrt{\theta w[(\theta+B/M)p-\theta w]}} > \frac{p-2w}{\sqrt{w(p-w)}}
\tag{19}
$$

则显然有 $q_{\mathrm{n\_VAM}}^{*} > q_{\mathrm{n}}^{*}$.

式(19)等价于

$$
\frac{p - 2\dfrac{\theta M}{\theta M + B}w}{\sqrt{\dfrac{\theta M}{\theta M + B}p - \left(\dfrac{\theta M}{\theta M + B}\right)^2 w}} > \frac{p-2w}{\sqrt{p-w}}
$$

这是个 $\dfrac{W}{X} > \dfrac{Y}{Z}$ 结构,其中 $X, Z > 0$. 当 $Y = p - 2w \geqslant 0$ 时,显然 $W > 0$,容易证明

$$Z^2 - X^2 =$$

$$\left(1 - \frac{\theta M}{\theta M + B}\right)\left[p - \left(1 + \frac{\theta M}{\theta M + B}\right)w\right] > 0$$

即 $X < Z$,因此式(19) 成立.

当 $\frac{2\theta M}{\theta M + B} w \leqslant p < 2w$ 时, $Y < 0 \leqslant W$,显然有式(19) 成立.

当 $p < \frac{2\theta M}{\theta M + B} w$ 时

$$Z^2 - X^2 =$$

$$\left(1 - \frac{\theta M}{\theta M + B}\right)\left[p - \left(1 + \frac{\theta M}{\theta M + B}\right)w\right] < 0$$

即 $X > Z$,而 $W,Y < 0$,且 $W^2 < Y^2$,因此 $\frac{W}{X} > \frac{Y}{Z}$,式(19) 仍然成立. 故 $q^*_{\mathrm{n\_VAM}} > q^*_{\mathrm{n}}$.

推论 1 验证了本文的猜测: 对赌协议具有激励作用,可令零售商付出更多的努力去开拓市场,提高订货量.

推论 2　在签订对赌协议的情况下,对零售企业采取较高估值反而会降低零售商的努力水平.

证明　由于 $\theta = 1 - \frac{B}{\alpha(A + \eta) + B}$,故零售商的持股比例随着估值水平 α 的增加而增加. 而 $\frac{\mathrm{d}e^*_{\mathrm{n\_VAM}}}{\mathrm{d}\theta} < 0$,因此努力水平会随着估值倍数的增加而降低.

推论 2 表明,在对赌的过程中,对企业采取较高的估值倍数,反而会使企业家有所懈怠,而企业在被低估时更容易激发企业家的积极性,努力开拓市场. 这很好地解释了对赌时投资方不愿意对企业采取较高估值倍数的现象.

推论 3　对赌业绩目标越高,零售商的风险承受能力越低,而企业自身成长性、利润空间、融资额越高,则其市场风险承受能力越强.

证明　当 $\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 \geqslant \frac{\theta w}{(\theta + B/M)p - \theta w}$ 时,零售商会付出努力开拓市场,这个条件又可以变形为 $\sigma \leqslant \mu\sqrt{\frac{[1 + B/(\theta M)]p - w}{w}}$,可以理解为当零售企业的成长风险 σ 不高于 $\mu \times \sqrt{\frac{[1 + B/(\theta M)]p - w}{w}}$ 时,零售商才会付出努力开拓市场,因此,当对赌业绩目标 M 较大时,零售商所能承受的风险上限变低. 类似的,期望成长性 μ 越高、利润空间($p - w$) 越大、融资额越高,风险承受能力越强.

上述推论具有一般性,即当零售商的风险容忍度 $k \neq 1$ 时,用类似的证明方法同样可以得到上述推论的结果.

3　数值仿真

前文以理论研究的形式分别给出并对比了零售商在对赌和不对赌两种情况下的运营决策,发现了零售商在运营过程中关于对赌的一些管理启示. 本节将通过数值仿真进一步考察: 1) 零售商不同的风险属性对其决策以及对赌的影响; 2) 对赌协议在股权投融资中的有效性; 3) 具有什么特点的企业更适合签订对赌协议; 4) 促进投融资双方合作的对赌业绩目标区间是否存在及其影响因素. 以此来分析对赌更深层次的管理意义. 采用 Andersson 等[37] 的方法来生成随机成长因子的均值与方差.

为便于比较,假设有两对情况完全相同的零售商与 PE,不签订对赌协议的零售商与 PE 的编号记为“1”,参与对赌的零售商与 PE 编号记为为“2”. 仿真参数设置见表 2,所有参数量纲已作“1”化处理.

3.1　不同风险偏好下的决策比较

首先考察不同风险容忍度下两种风险态度的决策者的最优决策比较,如图 3 所示.

表 2　仿真基本参数表

Table 2 Simulation parameters

A	B	η	M	α	s	p	w	τ
3 000	3 000	2 000	4 000	5	1	30	20	0.3

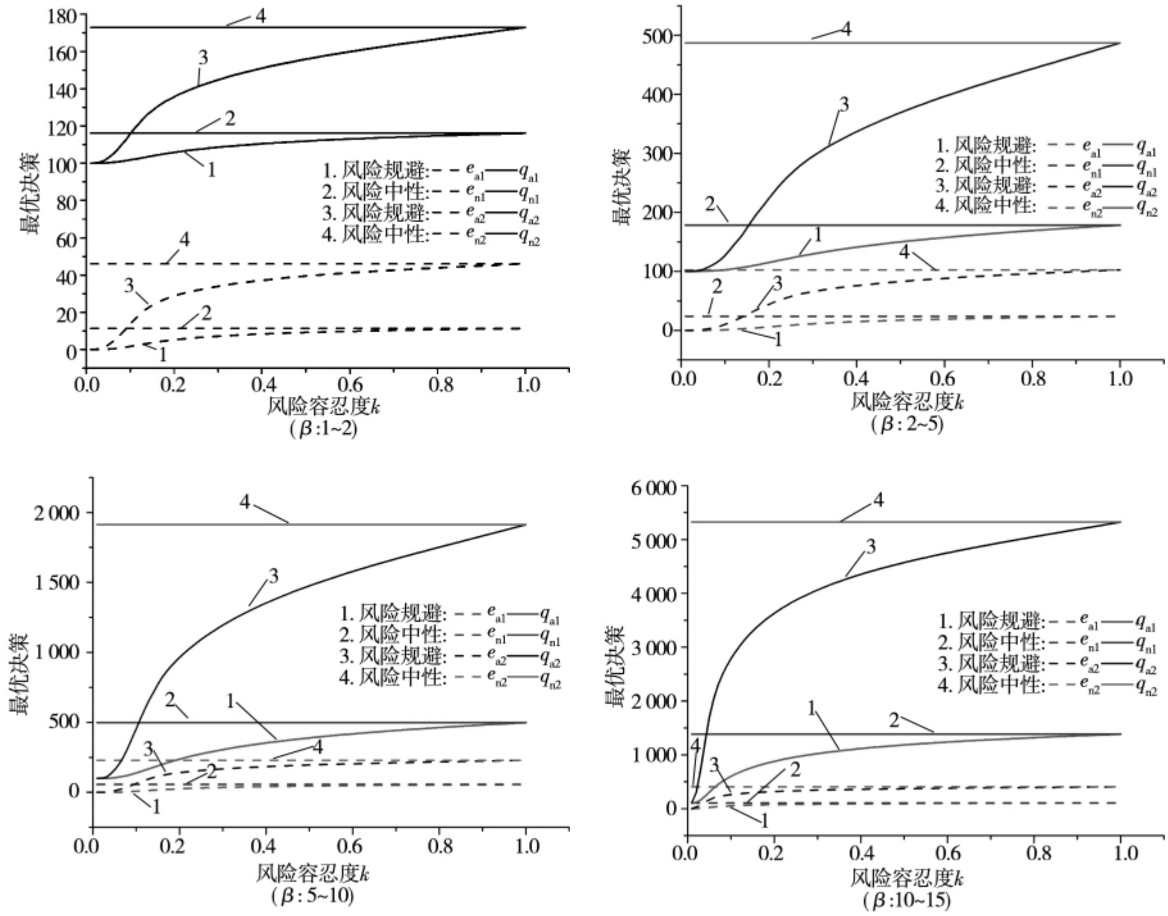

图 3 风险容忍度对零售商最优决策的影响

Fig. 3 Impact of risk tolerance on retailer's optimal decision

按成长性 β 的高低分别考察了 4 类零售企业(β: 1 ~2、β: 2 ~5、β: 5 ~10、β: 10 ~ 15) 的最优决策受风险容忍度的影响情况. 观察图 3 不难发现: 其一,风险规避型决策者的决策始终比风险中性决策者的决策保守,但随着风险规避型决策者风险容忍度的提高,其最优努力水平和订货量也相应提高. 特别是当风险容忍度为 1 时,其决策恰好等于风险中性型决策者的最优决策; 其二,无论零售商是风险规避型还是风险中性,在签订对赌协议时的努力水平和订货量比不签订对赌协议时更高,表明对赌协议对风险规避和风险中性两类决策者都具有激励作用; 其三,当决策者完全无法容忍风险时(即风险容忍度为 0) ,无论是否签订对赌协议,零售商都不会进行市场开拓,其努力水平为零.

考察风险容忍度对零售商的期望资产和 PE 的效用的影响(见图 4) . 从图 4 可以发现,风险规避型零售商的资产始终低于风险中性零售商的资产,且随着零售商风险容忍度的提高,两者逐渐靠近直至相等. 另一方面,零售商的风险态度也会影响 PE 的效用: PE 投资风险规避型零售商获得的效用要低于投资风险中性零售商.

3.2 对赌协议的有效性检验

对赌协议已经被广泛应用于企业并购、股权投融资等领域,但是其是否有效一直缺乏科学的研究探讨. 本节通过对赌与不对赌两种情况的比较,来对对赌协议的有效性进行检验,具体结果如图 5 和图 6 所示.

根据图 5 和图 6 可以发现,无论零售商是风险规避还是风险中性的,始终存在适当的对赌业绩目标区间,使得对赌之后投融资双方的效用都高于不对赌情况下的,将这样的区间称为“对赌协议签订区间”,只要业绩目标在这个区间内,企

业就应该签订对赌协议. 这表明对赌协议是种能够提升融资方效率并保障投资方利益的契约，具有有效性. 但需要注意的是，设置过低的业绩目标对投资方不利，而对于成长性较低的零售企业，过高的业绩目标则会损害零售商的利益. 过低或者过高的对赌业绩目标都可能导致对赌协议失效，因此，尽管对赌协议具有一系列积极作用，但是使用时应注意不要设置超出对赌协议签订区间的业绩目标，具体影响该区间的因素将在后文进行详细分析.

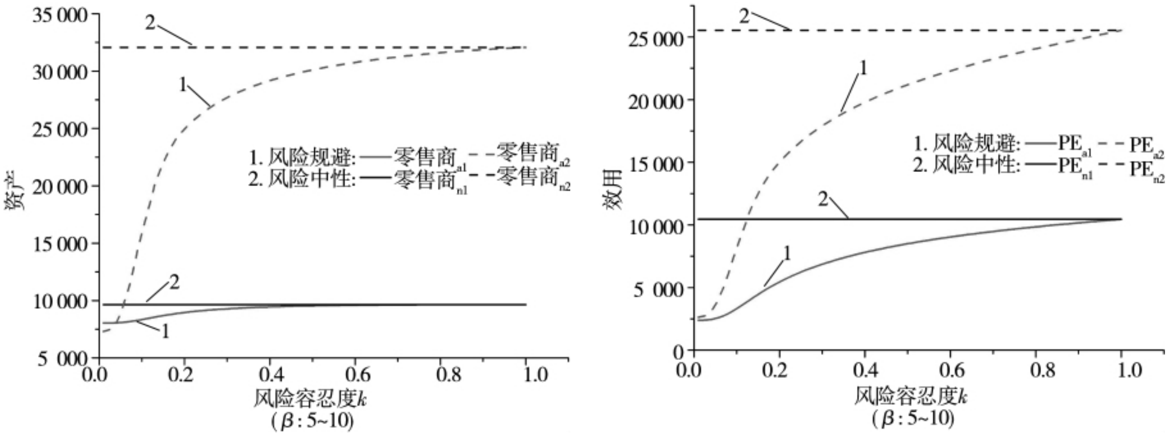

图 4　风险容忍度对零售商资产和 PE 效用的影响

Fig. 4 Impact of risk tolerance on retailer's assets and PE's utility

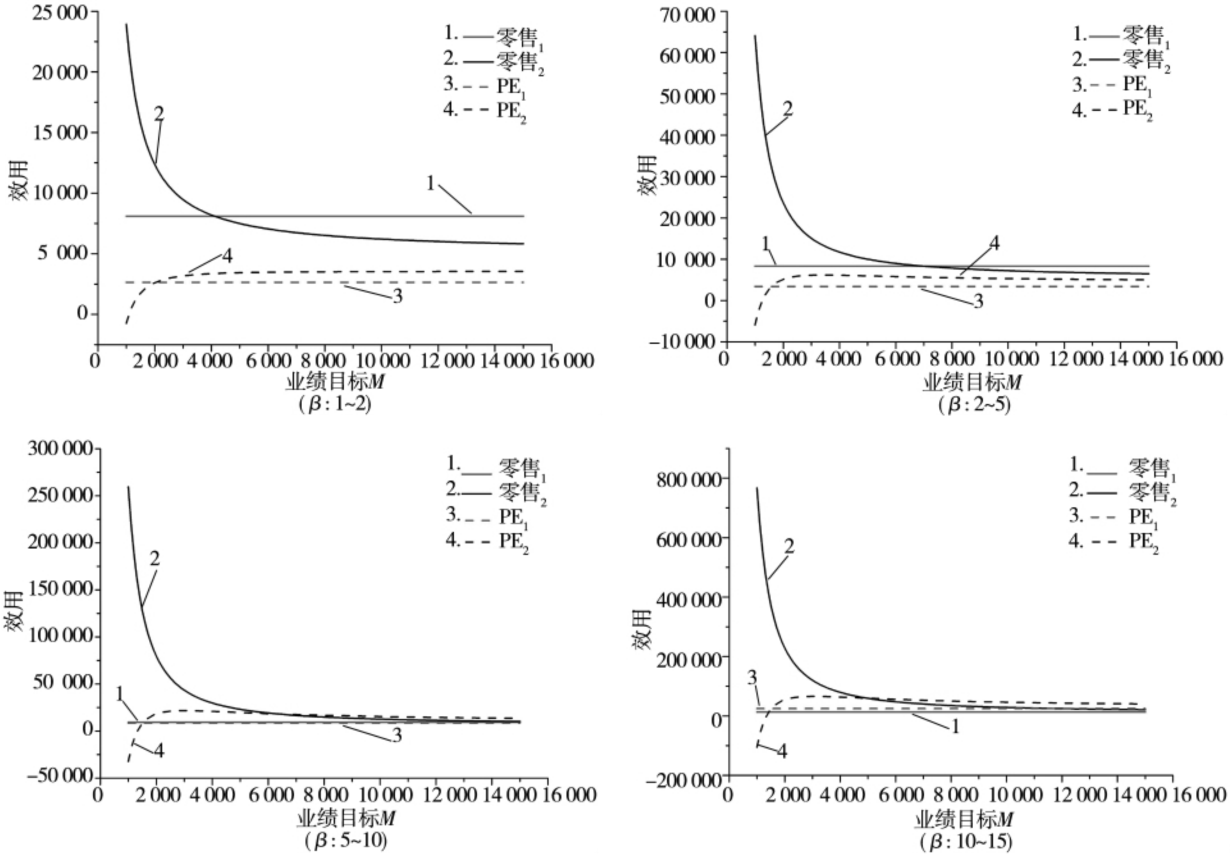

图 5　风险规避时不同成长性下业绩目标对各主体资产的影响对比

Fig. 5 Impact of performance objectives on assets under risk aversion

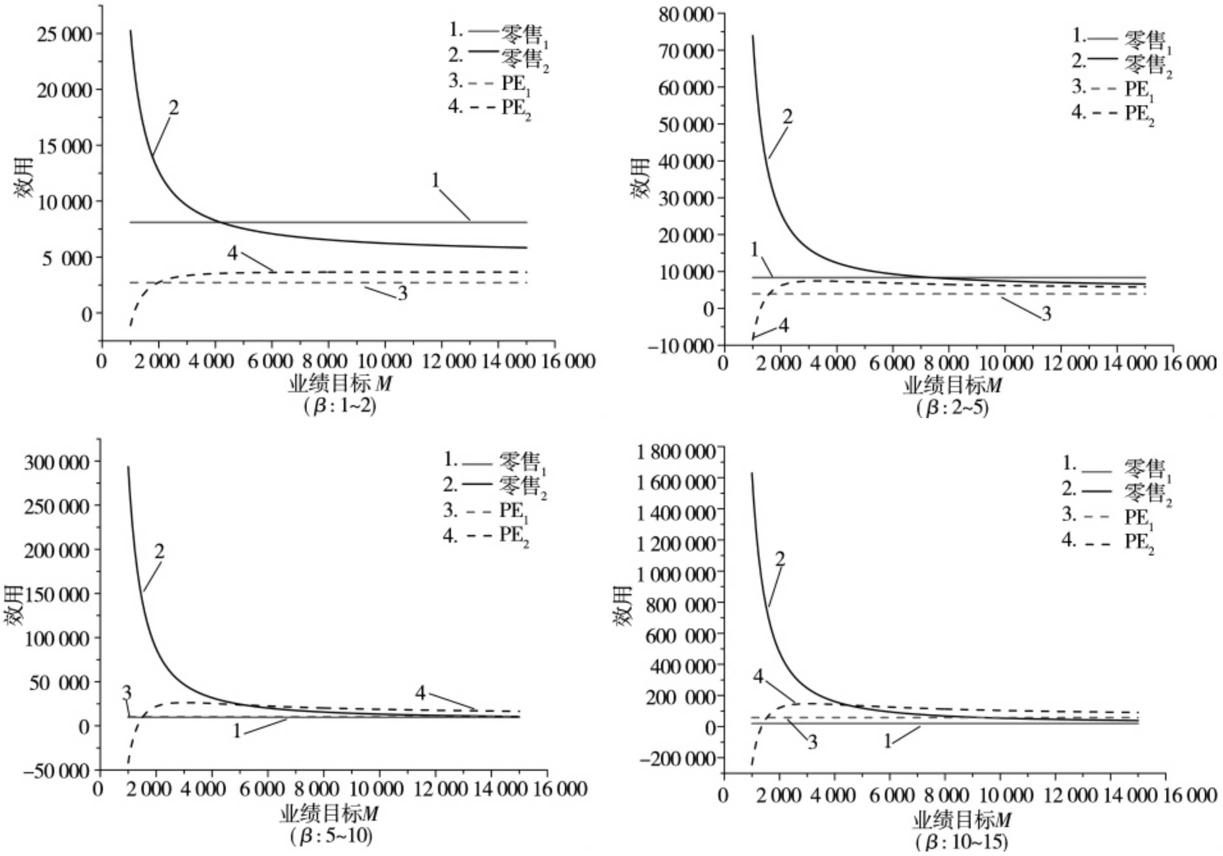

图 6 风险中性时不同成长性下业绩目标对各主体资产的影响对比

Fig. 6 Impact of performance objectives on assets under risk neutral

3.3 适合对赌的企业条件分析

本节主要探讨融资企业具备什么条件时签订对赌协议可以给投融资双方带来好处. 除特别说明,参数设置同表 2. 值得注意的是在表 2 的参数设置系统中,$M = 4\ 000$ 元是比较中性的取值,可以弱化业绩目标对投融资双方行为的影响,便于分析企业估值倍数、成长性、利润率等重要属性在对赌过程中的作用.

对零售企业的估值倍数的设定往往导致投融资双方的争执,更直接决定了投融资双方的持股比例. 首先考察估值倍数的不同对投融资双方有何影响, 如图 7 所示.

通过图 7 可以发现如下几点: 其一,当零售企业的成长性极低时,无论估值高低,对赌总是不利于零售商,提高对零售企业的估值倍数会提升零售商的效用,但会降低 PE 的效用. 企业的成长性极低则意味着零售商的努力成本极高,努力拓展市场带来的收益空间极小,零售商难以通过努力完成对赌业绩目标,对赌弊大于利; 其二,当零售企业具有一定的成长性时,若 PE 对企业的估值较低,签订对赌协议对零售商有利,若估值较高,不对赌才是零售商的最佳选择. 同样,提高估值倍数会增加零售商的效用而降低 PE 的效用. 事实上,当零售企业具备一定的成长性时,意味着努力拓展市场具有一定的收益空间,根据前面的分析,当估值倍数较低时,零售商的努力水平和订货量更高,因此零售商更容易完成对赌业绩目标,从而获得比不对赌时更高的效用,但是随着估值倍数的提高,努力水平和订货量降低,此时的成长性不足以保证在高估值倍数下仍然能够完成对赌,因此其效用会低于不对赌时的效用. 零售商的效用随着估值倍数提高而增加的主要原因是其持股比例提高所导致的资产占有量增加,当企业的成长性较高时,努力水平的高低才是决定零售商效用高低的关键; 其三,当零售企业具有较高成长性时,无论估值高低,签订对赌协议对零售商总是有利的. 值得注意的是在这种情况下零售商与 PE 的效用都会随着估值倍数的增加而降低,这是因

为零售企业在被高估的情况下，其努力水平和订货量降低，尤其是具有较高成长性的企业，下降得更明显，这会从根本上导致零售商和 PE 的效用下降.

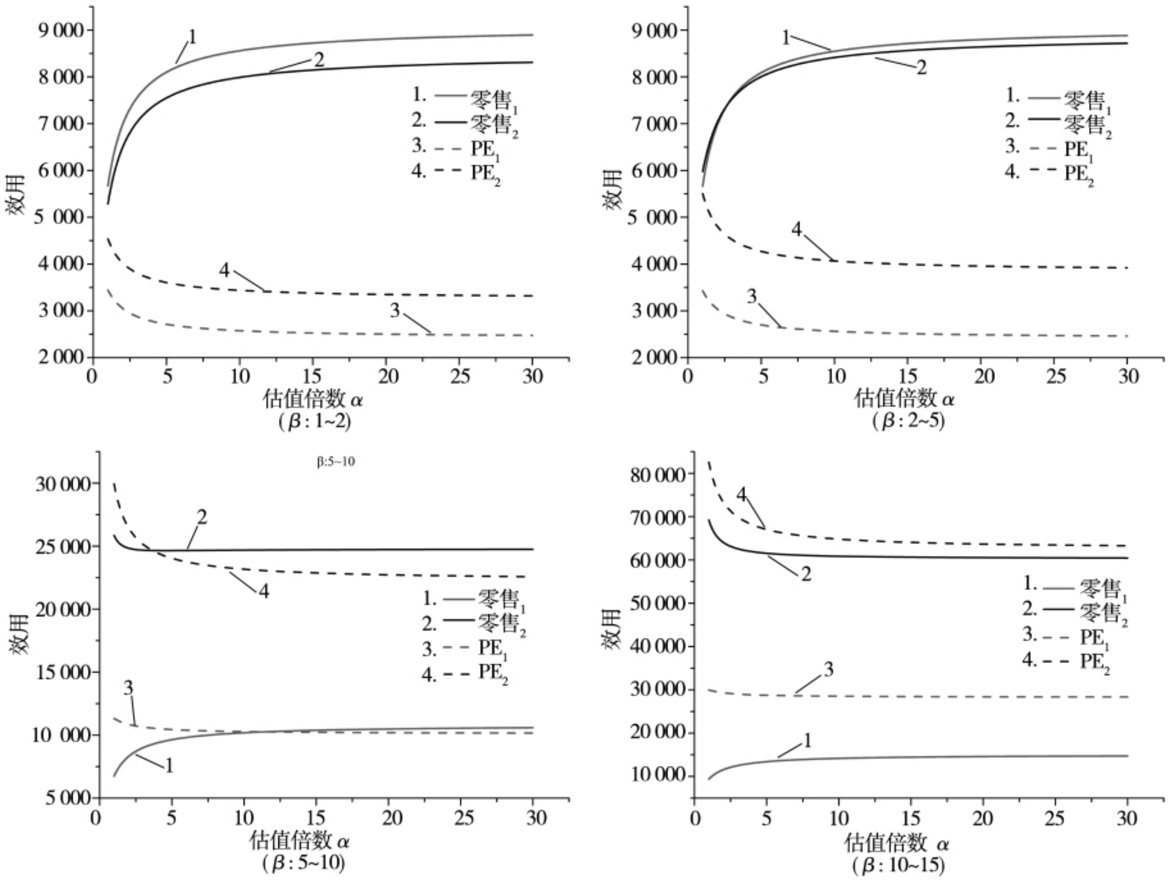

图 7　不同成长性下估值倍数对各主体资产的影响对比

Fig. 7 Impact of valuation on the assets under different growth

从上述结果可以看出，无论是否对赌，设定较低的估值倍数总是对 PE 更有利，因此，对于企业成长性极低的零售商而言，签订对赌协议是十分不利的，而只要企业具备一定的成长性，零售商就应该与 PE 签订对赌协议，可以实现合作共赢. 另外，还发现一个有趣的现象，在签订对赌协议时，若零售企业的成长性较低，零售商会期望获得较高的估值倍数，而如果企业的成长性较高，零售商反而期望获得较低的估值倍数.

此外，在不同利润率 $\left(\dfrac{p-w}{p}\right)$ 下考察对赌与不对赌时零售商与 PE 效用的变化情况，如图 8 所示.

总体而言，无论是否对赌，零售商和 PE 的效用都会随着企业利润率的增加而提高. 当零售企业的成长性极低时，零售商只有在利润率特别高的情况下签订对赌协议才是有利的；当零售企业具有一定的成长性时，只要零售企业的利润率不是特别低，签订对赌协议都是有利的；而当零售企业的成长性较高时，无论利润率高低，零售商都可以签订对赌协议. 利润率的高低对 PE 是否采用对赌协议没有太大影响.

综上所述可以发现，在适当的对赌业绩目标下，PE 在股权投资时总是倾向于签订对赌协议，并对零售企业采取较低的估值倍数，对零售商而言，将是否应该签订对赌协议总结如下.

1) 当零售企业的成长性极低时，零售商不应签订对赌协议，除非有特别高的利润率.

2) 当零售企业具有一定的成长性时，若企业被低估，签订对赌协议是有利于零售商的，若企业被高估，则签订对赌协议对零售商不利；若企业的利润率非常低，无论是被低估还是高估，最好都不要签订对赌协议.

3) 当零售企业具有较高成长性时，即使利润率比较低，零售商也可也签订对赌协议.

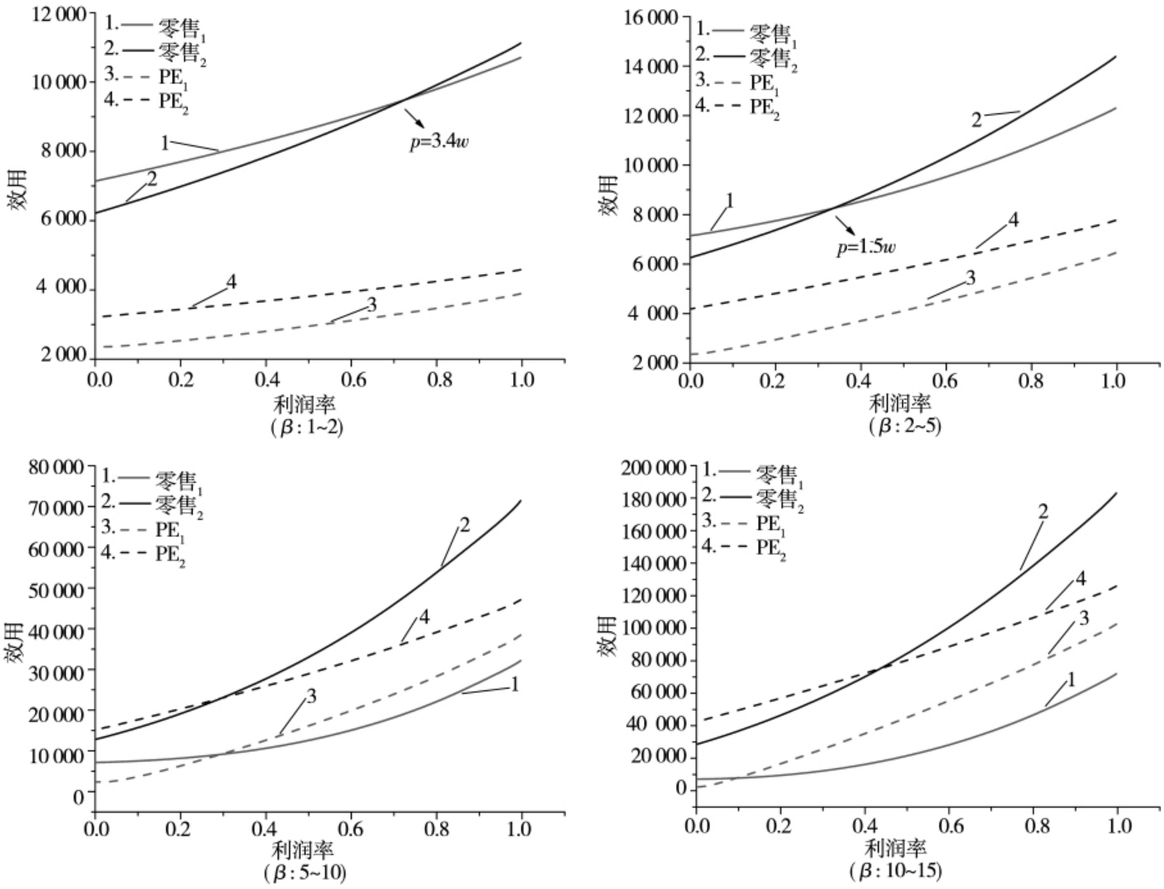

图 8　不同成长性下利润率对各主体资产的影响对比

Fig. 8 Impact of profit margin on the assets under different growth

3.4　对赌协议签订区间的影响因素分析

考察企业的估值倍数、成长性、利润率等因素对对赌协议签订区间的影响. 由于成长性是随机变量，无法设定具体的值，故分别考察成长性在区间［1,2］以及［6,8］内随机变化的情况，分别对应零售企业的低成长性和高成长性两种情形. 估值倍数、利润率变化时保证 PE 对赌的效用高于不对赌时效用的最低业绩目标构成下界，保证零售商在对赌时的效用高于不对赌时效用的最高业绩目标构成上界. 在相同成长性下，处于下界与上界之间的业绩目标都可以看作是能够促进投融资双方协作的合理的对赌业绩目标，将上下界之间的区域称为“对赌协议签订区间”. 不同成长性和利润率下估值倍数的变化对对赌协议签订区间的影响分别如图 9 所示.

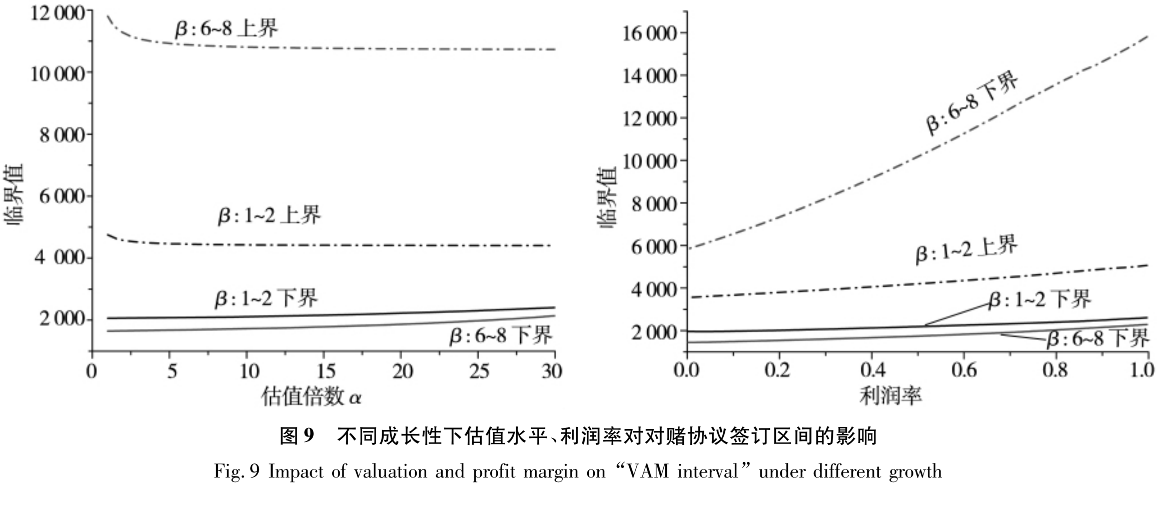

图 9　不同成长性下估值水平、利润率对对赌协议签订区间的影响

Fig. 9 Impact of valuation and profit margin on “VAM interval” under different growth

首先,随着估值倍数的增加,上界下降而下界上升,对赌协议签订区间缩小. 造成这种现象的原因在前文已经提到,零售商在高估值下的努力水平和订货量会下降,使得企业的净利润和销售额降低,导致对赌双方的效用同时下降,故零售商能承受的对赌业绩目标上限下降,而 PE 则会提高下限以保证自身利益. 其次,对于成长性更高的企业,PE 愿意适当降低业绩目标,而零售商能承受更高的业绩目标. 上述结果充分说明在对赌时,追求高估值是不明智的行为,良好的成长性才是股权融资企业快速成长的根本.

其次,对赌协议签订区间随着企业利润率的提高而扩大. 企业的利润率越高,PE 对其期望实现的销售额以及利润也更高,故 PE 越倾向于提高对赌的业绩目标,提升其最低业绩目标. 零售商所能承受的最高业绩目标也随着利润率的增加而提升,并且提升幅度更大,这使得股权投融资双方的合作空间随着利润率的增加整体呈扩大的趋势. 类似地,成长性高的企业会有更大的对赌协议签订区间.

4　结束语

是否应该签订对赌协议是企业股权融资过程中亟待厘清的重要问题. 本文立足于企业价值创造与供需匹配的运营视角,在决策者不同的风险态度下探讨了面临成长风险的企业在股权融资时的对赌问题. 通过投融资双方对赌与不对赌两种情况在决策、效用以及行为等方面的对比,回答了上述问题. 主要研究结论有:

1) 发现了提升投融资双方的运作效用的“对赌协议签订区间”. 发现对赌协议作为被广泛使用的投融资契约,是具有合理性和有效性的,在适当的业绩目标下,签订对赌协议可以同时为投融资双方带来效用的提升,意味着投融资双方存在合作共赢的空间. 总体而言,成长性越高、利润率越高,以及被低估的企业,签订对赌协议后可以极大地提升投融资双方效用. 其中成长性是核心,当企业具有较高成长性时,另外两个条件可适当放宽,若企业的成长性不高,进行对赌的企业则应该具有高利润率和被低估这样的特点,否则签订对赌协议弊大于利.

2) 对赌协议对决策行为的影响取决于决策者的风险态度. 一般而言,对赌协议对于风险规避型和风险中性决策者都具有激励作用,可以促进零售商提升努力水平和订货量. 特别地,在极端情况下,当零售商完全无法容忍风险时,即使签订对赌协议,也无法激励零售商付出努力开拓市场发展企业. 有趣的是,发现参与对赌的零售商在企业被低估时会激发出更高的积极性,付出较高的努力水平进行市场开拓;而在企业获得高估值的时候,反而会变得懈怠. 这从运营的角度解释了投资机构不愿意对融资企业采取较高估值的现象. 反过来,对零售商而言,过度追求较高的估值反而会得不偿失.

3) 对赌协议签订区间受企业的成长性、估值和利润率的影响. 对赌业绩目标的设置是对赌协议中的关键,目标过低无法调动零售商的积极性,对赌协议失去其意义,而目标过高则会给零售商带来极大的风险,甚至致其破产,只有设置合理的业绩目标双方才能实现合作共赢. 对赌协议签订区间,也即投融资双方的合作空间会随着企业成长性、利润率的增加而扩大,估值倍数的提高会缩小双方的合作空间,这意味着成长型企业应关注企业运营结构的优化、产品价值的提升,充分挖掘企业潜力,通过股权融资的助力实现快速成长.

尽管本文以运营视角探讨了企业在股权融资过程中的对赌问题,给出了什么样的企业适合签对赌协议的建议,为促进投融资双方的合作共赢提供了理论指导. 但这只是一些前期的探索工作,还有更多的因素并没有被本文所刻画. 企业的快速成长总是伴随着市场竞争,甚至众多企业寻求外部融资、努力捕获成长机遇的根本原因就是为了从竞争市场中生存下来,因此考虑市场竞争下的股权融资乃至对赌问题是势在必行的. 而 PE 在进行投资时可能也会对估值倍数、投资额、对赌业绩目标等参数进行权衡,如何在多方博弈下寻找共赢的空间有待后续研究工作的进一步深入. 此外,从对赌协议的企业实践来看,决策者的“行为偏好”以及某些“非理性行为”在对赌协议的签订过程以及业绩目标实现的运营过程中具有重要影响,如何进一步把握这些因素对对赌协议在我国的资本实践进行更加本质的探讨,将是未来研究的重要关注点.

参 考 文 献:

[1]创享智库. 360 借壳上市,签对赌协议会毁掉一家企业吗[EB/OL]. https: //www. sohu. com/a/204017724_427022. 2017 - 11 - 13.

Think Tank. 360 listed in backdoor, will signing VAM destroy a company [EB/OL]. https: //www. sohu. com/a/204017724_427022. 2017 - 11 - 13. (in Chinese)

[2]挖贝网. 2017 年 238 家新三板企业签订对赌协议 爱乐祺承诺 3 年赚 7 000 万[EB/OL]. http: //www. wabe i. cn/p/201711/2292579. html. 2017 - 11 - 07.

Wabei. 238 NEEQ enterprises signed VAM in 2017, and Hokids promises to earn 70 million yuan in three years[EB/OL]. http: //www. wabe i. cn/p/201711/2292579. html. 2017 - 11 - 07. (in Chinese)

[3]东方财富网. 年内 A 股现 500 余份对赌协议 127 家重组方未实现业绩承诺[EB/OL]. http: //stock. eastmo ney. com/news/1411,20171117802840463. html. 2017 - 11 - 17.

Eastmoney. com. More than 500 VAM for A-share market this year, and 127 restructuring parties failed to achieve performance commitments[EB/OL]. http: //stock. eastmoney. com/news/1411,20171117802840463. ht ml. 2017 - 11 - 17. (in Chinese)

[4]张 巍. 资本的规则[M]. 北京: 中国法制出版社, 2017.

Zhang Wei. Law of Capital[M]. Beijing: China Legal Publishing House, 2017. (in Chinese)

[5]刘 燕. 对赌协议与公司法资本管制: 美国实践及其启示[J]. 环球法律评论, 2016, (3) : 137 - 156.

Liu Yan. Valuation adjustment mechanism and capital control of company law: American practice and its enlightenment[J]. Global Law Review, 2016, (3) : 137 - 156. (in Chinese)

[6]Barbopoulos L G, Danbolt J, Alexakis D. The role of earnout financing on the valuation effects of global diversification[J]. Journal of International Business Studies, 2018, 49(5) : 523 - 551.

[7]Barbopoulos L G, Paudyal K, Sudarsanam S. Earnout deals: Method of initial payment and acquirers' gains[J]. European Financial Management, 2018, 24(5) : 792 - 828.

[8]Stuart H W. Contingent contracts and value creation[J]. Group Decision and Negotiation, 2017, 26(4) : 815 - 827.

[9]Bazerman M H, Gillespie J J. Betting on the future: The virtues of contingent contracts [J]. Harvard Business Review, 1999, 77(5) : 155 - 160.

[10]Elnahas A M, Hassan M K, Ismail G M. Religion and mergers and acquisitions contracting: The case of earnout agreements[J]. Journal of Corporate Finance, 2017, 42: 221 - 246.

[11]Barbopoulos L, Sudarsanam S. Determinants of earnout as acquisition payment currency and bidder's value gains [J]. Journal of Banking & Finance, 2012, 36(3) : 678 - 694.

[12]Ragozzino R, Reuer J J. Contingent earnouts in acquisitions of privately-held targets[J]. Journal of Management, 2009, 35 (4) : 857 - 879.

[13]Caselli S, Gatti S, Visconti M. Managing M&A risk with collars, earn-outs, and CVRs[J]. Journal of Applied Corporate Finance, 2006, 18(4) : 91 - 104.

[14]Cain M D, Denis D J, Denis D K. Earnouts: A study of financial contracting in acquisition agreements[J]. Journal of Accounting and Economics, 2011, 51(1/2) : 151 - 170.

[15]Viarengo L, Gatti S, Prencipe A. Enforcement quality and the use of earnouts in M&A transactions: International evidence [J]. Journal of Business Finance & Accounting, 2018, 45(3/4) : 437 - 481.

[16]谢海霞. 对赌协议的法律性质探析[J]. 法学杂志, 2010, 191(1) : 73 - 76.

Xie Haixia. Research about the legal character of gamble agreement[J]. Law Science Magazine, 2010, 191(1) : 73 - 76. (in Chinese)

[17]杨明宇. 私募股权投资中对赌协议性质与合法性探析——兼评海富投资案[J]. 证券市场导报, 2014, (2): 61 –71.

Yang Mingyu. Analysis on the nature and legitimacy of valuation adjustment mechanism in private equity investment: Comments on Haifu investment case[J]. Securities Market Herald, 2014, (2): 61 –71. (in Chinese)

[18]赵　昭. 对赌协议的合法性出路[J]. 学术界, 2015, 201(2): 88 –96.

Zhao Zhao. Rethinking equity investment valuation adjustment mechanism for effectiveness of agreement[J]. Academics, 2015, 201(2): 88 –96. (in Chinese)

[19]杨宏芹, 张　岑. 对赌协议法律性质和效力研究——以"海富投资案"为视角[J]. 江西财经大学学报, 2013, 89(5): 123 –128.

Yang Hongqin, Zhang Cen. A study of the legal nature and effectiveness of valuation adjustment mechanism: From the perspective of Haifu investment case[J]. Journal of Jiangxi University of Finance and Economics, 2013, 89(5): 123 –128. (in Chinese)

[20]吕长江, 韩慧博. 业绩补偿承诺、协同效应与并购收益分配[J]. 审计与经济研究, 2014, 29(6): 3 –13.

Lü Changjiang, Han Huibo. VAM, synergy and distribution of gains from M&A[J]. Journal of Audit & Economics, 2014, 29(6): 3 –13. (in Chinese)

[21]肖　菁. 对赌协议与企业财务绩效的关系分析[J]. 财会研究, 2011, (1): 42 –43.

Xiao Jing. Analysis on the relationship between valuation adjustment mechanism and enterprise financial performance[J]. Research of Finance and Accounting, 2011, (1): 42 –43. (in Chinese)

[22]林畅杰. 基于可持续增长模型的对赌协议及其财务效应研究[J]. 国际商务财会, 2014, (6): 84 –87.

Lin Changjie. Research on valuation adjustment mechanism and its financial effect based on sustainable growth model[J]. Finance and Accounting for International Commerce, 2014, (6): 84 –87. (in Chinese)

[23]刘峰涛, 赵袁军, 刘　玮. 重复对赌协议机制下企业两阶段融资博弈[J]. 系统管理学报, 2017, 26(3): 528 –536.

Liu Fengtao, Zhao Yuanjun, Liu Wei. Game of the enterprises´two-stage financing based on repeated valuation adjustment mechanism[J]. Journal of Systems & Management, 2017, 26(3): 528 –536. (in Chinese)

[24]费　晨, 余　鹏, 费为银, 等. 道德风险下带有Knight不确定的最优动态契约设计[J]. 管理科学学报, 2019, 22(6): 86 –96.

Fei Chen, Yu Peng, Fei Weiyin, et al. Dynamics of contract design with moral hazards under Knightian uncertainty[J]. Journal of Management Sciences in China, 2019, 22(6): 86 –96. (in Chinese)

[25]程　红, 汪贤裕, 郭红梅, 等. 道德风险和逆向选择共存下的双向激励契约[J]. 管理科学学报, 2016, 19(12): 36 –45.

Cheng Hong, Wang Xianyu, Guo Hongmei, et al. Bilateral incentive contract with both moral hazard and adverse selection[J]. Journal of Management Sciences in China, 2016, 19(12): 36 –45. (in Chinese)

[26]李燕萍, 孙　红, 张　银. 高管报酬激励、战略并购重组与公司绩效——来自中国A股上市公司的实证[J]. 管理世界, 2008, 24(12): 177 –179.

Li Yanping, Sun Hong, Zhang Yin. Executive compensation incentive, strategic M&A and corporate performance: An empirical study of A-share listed companies in China[J]. Management World, 2008, 24(12): 177 –179. (in Chinese)

[27]肖欣荣, 田存志. 私募基金的管理规模与最优激励契约[J]. 经济研究, 2011, 46(3): 119 –130.

Xiao Xinrong, Tian Cunzhi. The asset under management and optimal contact of privately offered fund[J]. Economic Research Journal, 2011, 46(3): 119 –130. (in Chinese)

[28]张　波, 费一文, 黄培清. "对赌协议"的经济学研究[J]. 上海管理科学, 2009, 31(1): 6 –10.

Zhang Bo, Fei Yiwen, Huang Peiqing. Economic research on "valuation adjustment mechanism"[J]. Shanghai Management Science, 2009, 31(1): 6 –10. (in Chinese)

[29]项海容，李建军，刘 星. 基于激励视角的对赌合约研究[J]. 上海经济研究，2009，(3)：92－98.
Xiang Hairong, Li Jianjun, Liu Xing. Research on the valuation adjustment mechanism contract based on the perspective of incentive[J]. Shanghai Journal of Economics, 2009, (3): 92－98. (in Chinese)

[30]Bates T W, Neyland J, Wang Y. Financing acquisitions with earnouts[J]. Journal of Accounting and Economics, 2018, 66(2/3): 374－395.

[31]卞亦文，闫 欣，杨列勋. 社会学习视角下运营管理决策研究[J]. 管理科学学报，2019，22(5)：18－30.
Bian Yiwen, Yan Xin, Yang Liexun. Operations management decision issues from the social learning perspective[J]. Journal of Management Sciences in China, 2019, 22(5): 18－30. (in Chinese)

[32]Rahmandad H. Impact of growth opportunities and competition on firm-level capability development trade-offs[J]. Organization Science, 2012, 23(1): 138－154.

[33]Taylor T A. Supply chain coordination under channel rebates with sales effort effects[J]. Management Science, 2002, 48(8): 992－1007.

[34]Zhao S, Zhu Q. A risk-averse marketing strategy and its effect on coordination activities in a remanufacturing supply chain under market fluctuation[J]. Journal of Cleaner Production, 2018, 171: 1290－1299.

[35]Natarajan K, Sim M, Uichanco J. Asymmetry and ambiguity in newsvendor models[J]. Management Science, 2018, 64(7): 3146－3167.

[36]Scarf H. A min-max solution of an inventory problem[J]. Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, 1958, 10(2): 201－209.

[37]Andersson J, Jörnsten K, Nonås S L, et al. A maximum entropy approach to the newsvendor problem with partial information[J]. European Journal of Operational Research, 2013, 228(1): 190－200.

Sign valuation adjustment mechanism or not? Operational analysis of enterprise's equity financing

DENG Jie[1,2], *YU Hui*[1*]

1. School of Economics and Business Administration, Chongqing University, Chongqing 400030, China;
2. School of Accountancy, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China

Abstract: Equity financing is an important means for growth-type enterprises to capture growth opportunities and implement leap-forward development. However, whether to sign a valuation adjustment mechanism (VAM) in equity financing has long puzzled entrepreneurs. This paper studies VAM from the perspective of value creation and supply-demand matching. Based on the retaile r's risk aversion and ambiguity aversion decision-making behavior, the utility models with and without VAM are constructed, and the effects of VAM on retailer's policy and utility are compared. The results show that there is a "VAM signing interval", which helps to improve performance, even in the more conservative risk aversion case. In addition, the level of enterprise growth is the key factor for signing the VAM: entrepreneurs should sign the VAM when their enterprise has high growth opportunities; while if the growth opportunity is insufficient, the valuation and profit margin of the enterprise should be considered to determine whether to sign a VAM.

Key words: valuation adjustment mechanism; equity financing; risk aversion; ambiguity averse

附录

引理 1 的证明

当 $t \leqslant a - bp$，即 $v \leqslant \theta m - \theta wq + \theta p(a - bp)$ 时，显然有 $\varphi(q,e,v) = 0$；

当 $t > a - bp$，即 $v > \theta m - \theta wq + \theta p(a - bp)$ 时，$\varphi(q,e,v) = \min\limits_{F\sim(\mu,\sigma^2)} \mathrm{E}[h(q,e,v,\xi)]$ 等价于原问题(P)

$$\min_{F\sim(\mu,\sigma^2)} \int_0^{+\infty} h(q,e,v,x)\,\mathrm{d}F(x)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}F(x) = 1\\ \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{d}F(x) = \mu\\ \int_0^{+\infty} x^2\,\mathrm{d}F(x) = \mu^2 + \sigma^2\\ \mathrm{d}F(x) \geqslant 0\end{cases} \tag{A1}$$

其对偶问题(D)为

$$\begin{aligned}&\max_{y_1,y_2,y_3} y_1 + \mu y_2 + (\mu^2 + \sigma^2) y_3\\ &\text{s.t. } y_1 + xy_2 + x^2 y_3 \leqslant h(q,e,v,x),\ \forall x \geqslant 0\end{aligned} \tag{A2}$$

其中 $F(x)$ 和 (y_1,y_2,y_3) 分别是原函数和对偶函数的自变量.

设原问题的最优解为 $F^*(x)$，对偶问题的最优解为 (y_1^*, y_2^*, y_3^*)，则它们必定满足互补松弛条件

$$\int_0^{+\infty} (h(q,e,v,x) - y_1^* - xy_2^* - x^2 y_3^*)\,\mathrm{d}F^*(x) = 0 \tag{A3}$$

根据互补松弛条件，需求点 x 具有非负概率(即 $\mathrm{d}F^*(x) > 0$)当且仅当 (y_1^*, y_2^*, y_3^*) 满足 $y_1^* + xy_2^* + x^2 y_3^* = h(q,e,v,x)$. 也就是说，原最优解 $F^*(x)$ 应在两段式折线 $h(q,e,v,x)$ 和抛物线 $y_1 + xy_2 + x^2 y_3$ 的公共点处取得. 如图 A1 所示，$h(q,e,v,x)$ 和 $y_1 + xy_2 + x^2 y_3$ 至多有两个公共点，可分为两种情况.

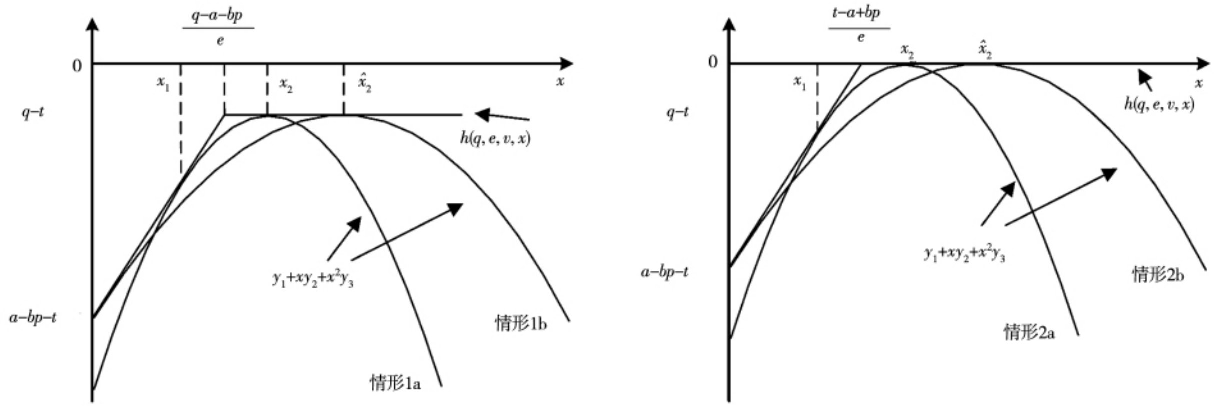

图 A1　函数 $h(q,e,v,x)$ 和 $y_1 + xy_2 + x^2 y_3$ 至多有两个公共点(可分为两种情形)

Fig. A1 Functions $h(q,e,v,x)$ and $y_1 + xy_2 + x^2 y_3$ have at most two common points

情形 1　如果 $t > q$，即 $v > \theta(p - w)q + \theta m$，则

$$h(q,e,v,x) = \begin{cases} a - bp + xe - t, & 0 \leqslant x < \dfrac{q - a + bp}{e}\\ q - t, & x \geqslant \dfrac{q - a + bp}{e}\end{cases} \tag{A4}$$

情形 1a　$h(q,e,v,x)$ 和 $y_1 + xy_2 + x^2 y_3$ 有两个切点，设两切点的横坐标分别为 x_1, x_2，且满足 $0 \leqslant x_1 < \dfrac{q - a + bp}{e} < x_2$. 由相切的性质和原可行性条件，两点分布 $F^*(x):(x_i, p_i)$，$i = 1,2$ 应构造为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{q-a+bp}{e} - \sqrt{\left(\dfrac{q-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2},\ p_1 = \dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{q-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}+\left(\dfrac{q-a+bp}{e}-\mu\right)}{2\sqrt{\left(\dfrac{q-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}} \\ x_2 = \dfrac{q-a+bp}{e} + \sqrt{\left(\dfrac{q-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2},\ p_2 = \dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{q-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}-\left(\dfrac{q-a+bp}{e}-\mu\right)}{2\sqrt{\left(\dfrac{q-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}} \end{cases}$$

又根据上述方程,可以求出 (y_1^*, y_2^*, y_3^*) ,分别为

$$\begin{cases} y_1^* = q - t + x_2^2 y_3 = q - t - \left(\dfrac{q-a+bp}{e} + \sqrt{\left(\dfrac{q-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}\right)^2 \dfrac{e}{4\sqrt{\left(\dfrac{q-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}} \\ y_2^* = -2x_2y_3 = \left(\dfrac{q-a+bp}{e} + \sqrt{\left(\dfrac{q-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}\right)\dfrac{e}{2\sqrt{\left(\dfrac{q-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}} \\ y_3^* = \dfrac{e}{2(x_1-x_2)} = -\dfrac{e}{4\sqrt{\left(\dfrac{q-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}} \end{cases}$$

将最优解分别代入原问题和对偶问题可得最优目标值相等,为

$$\begin{aligned}(a-bp+x_1e-t)p_1+(q-t)p_2 &= q-t-\frac{e}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{q-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}+\left(\frac{q-a+bp}{e}-\mu\right)\right)\\ &= y_1^* + \mu y_2^* + (\mu^2+\sigma^2)y_3^*\end{aligned}$$

另外,情形 1a 的两点应满足关系 $x_1 \geqslant 0$ 且 $x_2 \geqslant \dfrac{q-a+bp}{e}$,即 $\dfrac{q-a+bp}{e} \geqslant \dfrac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}$.

情形 1b $h(q,e,v,x)$ 和 $y_1 + xy_2 + x^2y_3$ 有一个交点和一个切点,设交点和切点的横坐标分别为 $\hat{x}_1, \hat{x}_2$,且满足 $\hat{x}_1 = 0 \leqslant \dfrac{q-a+bp}{e} < \hat{x}_2$,此时计算两点分布 $F^*(x):(\hat{x}_i,\hat{p}_i)$,$i = 1,2$ 为

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = 0,\ \hat{p}_1 = \dfrac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2} \\ \hat{x}_2 = \mu + \dfrac{\sigma^2}{\mu},\ \hat{p}_2 = \dfrac{\mu^2}{\mu^2+\sigma^2} \end{cases} \tag{A5}$$

根据交点和切点的性质,可计算出对偶问题的最优解为

$$y_1^* = q - t + \hat{x}_2^2 y_3 = a - bp - t$$

$$y_2^* = -2\hat{x}_2 y_3 = \frac{2(q-a+bp)}{\hat{x}_2} = \frac{2\mu(q-a+bp)}{\mu^2+\sigma^2}$$

$$y_3^* = -\frac{q-a+bp}{\hat{x}_2^2} = -\frac{\mu^2(q-a+bp)}{(\mu^2+\sigma^2)^2}$$

将最优解分别代入原问题和对偶问题可得最优目标值相等,为

$$(a-bp+\hat{x}_1e-t)p_1+(q-t)p_2 = q-t-(q-a+bp)\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2} = y_1^* + \mu y_2^* + (\mu^2+\sigma^2)y_3^*$$

另外,情形 1b 还应满足折线 $h(q,e,v,x)$ 在点 $\hat{x}_1$ 处的斜率大于抛物线 $y_1 + xy_2 + x^2y_3$ 在点 $\hat{x}_1$ 处的斜率,即 $e > y_2$,有 $\dfrac{q-a+bp}{e} < \dfrac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}$.

情形 2 如果 $0 < t \leqslant q$,即 $v \leqslant \theta(p-w)q + \theta m$,则

$$h(q,e,v,x) = \begin{cases} a-bp+xe-t, & 0 \leqslant x < \dfrac{t-a+bp}{e} \\ 0, & x \geqslant \dfrac{t-a+bp}{e} \end{cases} \tag{A6}$$

情形 2a $h(q,e,v,x)$ 和 $y_1 + xy_2 + x^2y_3$ 有两个切点,设两切点的横坐标分别为 x_1, x_2 ,且满足 $0 \leqslant x_1 < \dfrac{t-a+bp}{e} <$

x_2．由相切的性质和原可行性条件，两点分布 $F^*(x):(x_i,p_i)$，$i=1,2$ 应构造为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{t-a+bp}{e}-\sqrt{\left(\dfrac{t-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2},\ p_1=\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{t-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}+\left(\dfrac{t-a+bp}{e}-\mu\right)}{2\sqrt{\left(\dfrac{t-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}} \\ x_2=\dfrac{t-a+bp}{e}+\sqrt{\left(\dfrac{t-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2},\ p_2=\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{t-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}-\left(\dfrac{t-a+bp}{e}-\mu\right)}{2\sqrt{\left(\dfrac{t-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}} \end{cases} \tag{A7}$$

又根据切点的性质，可以求出 (y_1^*,y_2^*,y_3^*)，分别为

$$\begin{cases} y_1^*=x_2^2y_3=-\left(\dfrac{t-a+bp}{e}+\sqrt{\left(\dfrac{t-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}\right)^2\dfrac{e}{4\sqrt{\left(\dfrac{t-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}} \\ y_2^*=-2x_2y_3=\left(\dfrac{t-a+bp}{e}+\sqrt{\left(\dfrac{t-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}\right)\dfrac{e}{2\sqrt{\left(\dfrac{t-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}} \\ y_3^*=\dfrac{e}{2(x_1-x_2)}=-\dfrac{e}{4\sqrt{\left(\dfrac{t-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}} \end{cases} \tag{A8}$$

将最优解分别代入原问题和对偶问题可得最优目标值相等，为

$$(a-bp+x_1e-t)p_1=-\frac{e}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{t-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}+\left(\frac{t-a+bp}{e}-\mu\right)\right)=y_1^*+\mu y_2^*+(\mu^2+\sigma^2)y_3^* \tag{A9}$$

另外，情形2a的两点应满足关系 $x_1\geqslant 0$ 且 $x_2\geqslant\dfrac{t-a+bp}{e}$，即 $\dfrac{t-a+bp}{e}\geqslant\dfrac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}$．

情形2b $h(q,e,v,x)$ 和 $y_1+xy_2+x^2y_3$ 有一个交点和一个切点，设交点和切点的横坐标分别为 $\hat{x}_1,\hat{x}_2$，且满足 $\hat{x}_1=0\leqslant\dfrac{t-a+bp}{e}<\hat{x}_2$，此时计算出两点分布 $F^*(x):(\hat{x}_i,\hat{p}_i)$，$i=1,2$，为

$$\begin{cases} \hat{x}_1=0,\ \hat{p}_1=\dfrac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2} \\ \hat{x}_2=\mu+\dfrac{\sigma^2}{\mu},\ \hat{p}_2=\dfrac{\mu^2}{\mu^2+\sigma^2} \end{cases} \tag{A10}$$

根据交点和切点的性质，可计算出对偶问题的最优解为

$$y_1^*=\hat{x}_2^2y_3=a-bp-t$$

$$y_2^*=-2\hat{x}_2y_3=\frac{-2(a-bp-t)}{\hat{x}_2}=\frac{-2\mu(a-bp-t)}{\mu^2+\sigma^2}$$

$$y_3^*=\frac{a-bp-t}{\hat{x}_2^2}=\frac{\mu^2(a-bp-t)}{(\mu^2+\sigma^2)^2}$$

将最优解分别代入原问题和对偶问题可得最优目标值相等，为

$$(a-bp+\hat{x}_1e-t)\hat{p}_1=(a-bp-t)\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}=y_1+\mu y_2+(\mu^2+\sigma^2)y_3 \tag{A11}$$

另外，情形2b还应满足折线 $h(q,e,v,x)$ 在点 $\hat{x}_1$ 处的斜率大于抛物线 $y_1+xy_2+x^2y_3$ 在点 $\hat{x}_1$ 处的斜率，即 $e>y_2$，有 $\dfrac{t-a+bp}{e}<\dfrac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}$．

下面，证明 $\phi(q,e,v)$ 关于 v 连续．当 $\dfrac{q-a+bp}{e}<\dfrac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}$ 时

$$\phi_1(q,e,v)\mid_{v=\theta m-\theta wq+\theta p(a-bp)}=\lim_{v\to\theta m-\theta wq+\theta p(a-bp)}\phi_2(q,e,v)=0 \tag{A12}$$

$$\phi_2(q,e,v)\mid_{v=\theta(p-w)q+\theta m}=\lim_{v\to\theta(p-w)q+\theta m}\phi_3(q,e,v)=\theta p(a-bp-q)\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2} \tag{A13}$$

当 $\dfrac{q-a+bp}{e}<\dfrac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}$ 时

$$\phi_4(q,e,v)\mid_{v=\theta m-\theta wq+\theta p(a-bp)} = \lim_{v\to\theta m-\theta wq+\theta p(a-bp)}\phi_5(q,e,v) = 0 \tag{A14}$$

$$\phi_5(q,e,v)\mid_{v=\theta m-\theta wq+\theta p\left(a-bp+e\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}\right)} = \lim_{v\to\theta m-\theta wq+\theta p\left(a-bp+e\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}\right)}\phi_6(q,e,v) = -\theta p\frac{e}{2}\frac{\sigma^2}{\mu} \tag{A15}$$

$$\phi_6(q,e,v)\mid_{v=\theta(p-w)q+\theta m} = \lim_{v\to\theta(p-w)q+\theta m}\phi_7(q,e,v) = -\theta p\frac{e}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{q-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}+\left(\frac{q-a+bp}{e}-\mu\right)\right) \tag{A16}$$

所以，$\phi(q,e,v)$ 关于 v 始终是连续的.

证毕.

引理 2 的证明

记 $\psi(v) = v+\frac{1}{k}\min_{F\sim(\mu,\sigma^2)}\mathrm{E}[(TA_{\mathrm{R}}(q,e)-v)_-]$，则 $WCVaR_k[TA_{\mathrm{R}}(q,e)] = \max_{v\in\mathbb{R}}\psi(v)$. $\psi(v)$ 关于 v 的一阶导数为：当 $\frac{q-a+bp}{e}<\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}$ 时

$$\psi'(v) = \begin{cases} 1 = \psi_1', & v\leqslant \theta m-\theta wq+\theta p(a-bp) \\ 1-\frac{1}{k}\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2} = \psi_2', & \theta m-\theta wq+\theta p(a-bp) < v\leqslant \theta(p-w)q+\theta m \\ 1-\frac{1}{k} = \psi_3', & v>\theta(p-w)q+\theta m \end{cases}$$

否则

$$\psi'(v) = \begin{cases} 1 = \psi_4',\ v\leqslant \theta m-\theta wq+\theta p(a-bp) \\ 1-\frac{1}{k}\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2} = \psi_5',\ \theta m-\theta wq+\theta p(a-bp) < v\leqslant \theta m-\theta wq+\theta p\left(a-bp+e\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}\right) \\ 1-\frac{1}{2k}\left(\dfrac{\frac{t-a+bp}{e}-\mu}{\sqrt{\left(\frac{t-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}}+1\right) = \psi_6',\ \theta m-\theta wq+\theta p\left(a-bp+e\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}\right) < v\leqslant \theta(p-w)q+\theta m \\ 1-\frac{1}{k} = \psi_7',\ v>\theta(p-w)q+\theta m \end{cases}$$

当 $0<k\leqslant\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}$ 时，$\psi(v)$ 关于 v 是单峰函数，且最大峰值点为 $v^* = \theta m-\theta wq+\theta p(a-bp)$，则

$$WCVaR_k[TA_{\mathrm{R}}(q,e)] = \max_{v\in\mathbb{R}}\psi(v) = v = \theta m-\theta wq+\theta p(a-bp) \tag{A17}$$

当 $k>\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}$ 时：

1) 若 $\frac{q-a+bp}{e}<\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}$，此时 $\psi_1',\psi_2'>0$，且 $\psi_3'<0$，连续函数 $\psi(v)$ 在这种情况下是单峰函数，最大峰值点为 $v^* = \theta(p-w)q+\theta m$，则

$$WCVaR_k[TA_{\mathrm{R}}(q,e)] = \max_{v\in\mathbb{R}}\psi(v) = \theta m+\theta(p-w)q-\frac{\theta p}{k}(q-a+bp)\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2} \tag{A18}$$

2) 若 $\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}\leqslant\frac{q-a+bp}{e}<\mu-\frac{(1-2k)\sigma}{2\sqrt{k(1-k)}}$，此时 $\psi_4',\psi_5',\psi_6'>0$，且 $\psi_7'<0$，连续函数 $\psi(v)$ 在这种情况下是单峰函数，最大峰值点为 $v^* = \theta(p-w)q+\theta m$，则

$$WCVaR_k[TA_{\mathrm{R}}(q,e)] = \theta m+\theta(p-w)q-\frac{\theta p}{k}\frac{e}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{q-a+bp}{e}-\mu\right)^2+\sigma^2}+\left(\frac{q-a+bp}{e}-\mu\right)\right) \tag{A19}$$

3) 若 $\mu-\frac{(1-2k)\sigma}{2\sqrt{k(1-k)}}\leqslant\frac{q-a+bp}{e}$，则连续函数 $\psi(v)$ 关于 v 是凹函数，最大峰值点在 $\psi_6' = 0$ 处，为 $v^* = \theta m-\theta wq+\theta p\left(a-bp+e\left(\mu-\frac{(1-2k)\sigma}{2\sqrt{k(1-k)}}\right)\right)$，则

$$WCVaR_k[TA_{\mathrm{R}}(q,e)] = \theta m+\theta(p-w)q-\theta p\left(q-a+bp-e\left(\mu-\sigma\sqrt{\frac{1-k}{k}}\right)\right) \tag{A20}$$

接下来证明 $WCVaR_k[TA_{\mathrm{R}}(q,e)]$ 关于 (q,e) 是连续的.

当 $0 < k \leqslant \frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}$ 时,显然 $WCVaR_k[TA_R(q,e)] = \theta m - \theta wq + \theta p(a-bp)$ 关于任意的 (q,e) 都是连续的;

当 $\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2} < k < 1$ 时,有

$$\lim_{\frac{q-a+bp}{e}\to\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}} \omega_1 = \theta m + \theta(p-w)q - \frac{\theta p}{k}\frac{e}{2}\frac{\sigma^2}{\mu} = \omega_2 \mid_{\frac{q-a+bp}{e}=\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}} \tag{A21}$$

$$\lim_{\frac{q-a+bp}{e}\to\mu-\frac{(1-2k)\sigma}{2\sqrt{k(1-k)}}} \omega_2 = \theta m + \theta(p-w)q - \theta p\frac{e\sigma}{2}\frac{1}{\sqrt{k(1-k)}} = \omega_3 \mid_{\frac{q-a+bp}{e}=\mu-\frac{(1-2k)\sigma}{2\sqrt{k(1-k)}}} \tag{A22}$$

显然 $WCVaR_k[TA_R(q,e)]$ 关于 (q,e) 仍然是连续的.　　证毕.

定理 1 的证明

首先证明 $WCVaR_k[TA_R(q,e)]$ 连续可微. $WCVaR_k[TA_R(q,e)]$ 的连续性已证,由于

$$\lim_{\frac{q-a+bp}{e}\to\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}} \frac{\partial\omega_1}{\partial q} = \theta(p-w) - \frac{\theta p}{k}\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2} = \frac{\partial\omega_2}{\partial q} \mid_{\frac{q-a+bp}{e}=\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}} \tag{A23}$$

$$\lim_{\frac{q-a+bp}{e}\to\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}} \frac{\partial\omega_1}{\partial e} = -\theta se = \frac{\partial\omega_2}{\partial e} \mid_{\frac{q-a+bp}{e}=\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}} \tag{A24}$$

$$\lim_{\frac{q-a+bp}{e}\to\mu-\frac{(1-2k)\sigma}{2\sqrt{k(1-k)}}} \frac{\partial\omega_2}{\partial q} = -\theta w = \frac{\partial\omega_3}{\partial q} \mid_{\frac{q-a+bp}{e}=\mu-\frac{(1-2k)\sigma}{2\sqrt{k(1-k)}}} \tag{A25}$$

$$\lim_{\frac{q-a+bp}{e}\to\mu-\frac{(1-2k)\sigma}{2\sqrt{k(1-k)}}} \frac{\partial\omega_2}{\partial e} = -\theta se + \theta p\left(\mu - \sigma\sqrt{\frac{1-k}{k}}\right) = \frac{\partial\omega_3}{\partial e} \mid_{\frac{q-a+bp}{e}=\mu-\frac{(1-2k)\sigma}{2\sqrt{k(1-k)}}} \tag{A26}$$

所以 $WCVaR_k[TA_R(q,e)]$ 连续可微.

当 $0 < k \leqslant \frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}$ 时,即 $\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 \leqslant \frac{1-k}{k}$ 时,由于 $\omega_0 = \theta m - \theta wq + \theta p(a-bp)$ 关于 (q,e) 是可分离的,且 $\frac{\partial\omega_0}{\partial q} = -\theta w < 0$, $\frac{\partial\omega_0}{\partial e} = -\theta se < 0$,所以 ω_0 也即 $WCVaR_k[TA_R(q,e)]$ 的最大值在 (q,e) 各自的最小值处取得,即 $(q_a^*, e_a^*) = (a-bp, 0)$.

当 $1 > k > \frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}$ 时,即 $\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 > \frac{1-k}{k}$ 时, $\omega_1 = \theta m + \theta(p-w)q - \frac{\theta p}{k}(q-a+bp)\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}$ 同样关于 (q,e) 是可分离的,且 $\frac{\partial\omega_1}{\partial q} = \theta(p-w) - \frac{\theta p}{k}\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2}$, $\frac{\partial\omega_1}{\partial e} = -\theta se < 0$,所以:

当 $\frac{1-k}{k} < \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 < \frac{p-(p-w)k}{(p-w)k}$ 时, $\frac{\partial\omega_1}{\partial q} = \theta(p-w) - \frac{\theta p}{k}\frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2} < 0$, ω_1 的最大值在 (q,e) 各自的最小值处取得,即 $(q_a^*, e_a^*) = (a-bp, 0)$;易证得此时 $\frac{\partial\omega_3}{\partial q} < 0$, $\frac{\partial\omega_3}{\partial e} < 0$,且可分离,加上 ω_2 是凹函数,且 $\frac{\partial\omega_2}{\partial q}\mid_{\frac{q-a+bp}{e}=\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}} = \theta(p-w) - \frac{\theta p}{k} \times \frac{\sigma^2}{\mu^2+\sigma^2} < 0$, $\frac{\partial\omega_2}{\partial e}\Big|_{\frac{q-a+bp}{e}=\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}} = -\theta se - \frac{\theta p}{2k}\frac{\mu}{\mu^2+\sigma^2} < 0$,即凹函数 ω_2 此时左端点的导数值小于0,必定在定义域内下降,而 ω_3 也是下降的,所以,综合起来,就是当 $\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 \leqslant \frac{1-k}{k}$ 和 $\frac{1-k}{k} < \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 < \frac{p-(p-w)k}{(p-w)k}$ 时, $WCVaR_k[TA_R(q,e)]$ 的最优解为 $(q_a^*, e_a^*) = (a-bp, 0)$.

当 $\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 \geqslant \frac{p-(p-w)k}{(p-w)k}$ 时,最大值在 $\frac{\partial\omega_2}{\partial q} = 0$ 且 $\frac{\partial\omega_2}{\partial e} = 0$ 处取得,解得

$$\begin{cases} e_a^* = \dfrac{k\mu(p-w) - \sigma\sqrt{k(p-w)[p-k(p-w)]}}{ks} \\ q_a^* = a - bp + \mu e_a^* + \dfrac{\sigma}{2}\dfrac{2k(p-w)-p}{\sqrt{k(p-w)[p-k(p-w)]}}e_a^* \end{cases} \tag{A27}$$

证毕.