

doi:10.19920/j.cnki.jmsc.2021.07.005

# 基于环境污染第三方治理的随机微分合作博弈<sup>①</sup>

郑君君<sup>1</sup>, 董金辉<sup>2, 1\*</sup>, 任天宇<sup>1</sup>

(1. 武汉大学经济与管理学院, 武汉 430072; 2. 黄冈师范学院数学与统计学院, 黄冈 438000)

**摘要:**在我国推行环境污染第三方治理实践中,地方政府、排污企业和第三方治理企业面临着现实困境,为寻求突破困境的科学决策路径,论文分别构建了地方政府外部监管和激励下的排污企业和第三方治理企业之间的环境污染治理随机微分非合作 Stackelberg 博弈与合作博弈模型,并给出了模型相应的反馈纳什均衡解和具有子博弈一致性的合作支付分配机制.研究发现,较之于非合作博弈,合作博弈既可以有效减少排污企业的偷排量还可以消除第三方治理企业的虚假治理,从而达成更优的治污效果;在具体决策方面,政府部门可以采用均衡监管并制定具体的激励措施以引导第三方治理企业积极进入治污市场并进行治污技术研发;排污企业可以确定恰当的技术溢价因子、第三方治理企业可以确定合理的初始投资以实现治污效果和期望收益方面的合作共赢.最后,通过数值仿真验证了合作博弈的可行性和有效性,相关研究结果可为环境污染第三方治理机制建设提供决策依据.

**关键词:**环境污染第三方治理;随机微分合作博弈;反馈纳什均衡;子博弈一致性

**中图分类号:** F272.3   **文献标识码:** A   **文章编号:** 1007-9807(2021)07-0076-18

## 0 引言

环境污染第三方治理是指除排污企业和政府监管部门以外,由独立的专业污染治理企业作为第三方,通过签订合同或协议承担应由排污企业承担的环境污染治理任务,并从中获取相应收益的市场化治理模式<sup>[1, 2]</sup>.“绿水青山就是金山银山”,环境污染问题日益受到各级政府和社会民众的广泛重视,环境保护和治理成绩也陆续被各级政府部门纳入干部绩效考核、离任审计之中.另一方面,由于环境污染治理具有较强的专业性和技术性,排污企业自行治理在效率和效益方面难以兼顾,因而委托更具专业技术优势的第三方环境污染治理企业是必然的选择,由此也催生了广阔的环境污染第三方治理市场前景.与此同时,国务院办公厅也在2014年12月印发了《关于推行

环境污染第三方治理的意见》,旨在推进我国环境公用设施投资运营市场化、创新企业第三方治理机制和健全第三方治理市场.随后,国家环境保护部亦于2017年8月出台了《环境保护部关于推进环境污染第三方治理的实施意见》.在国家政策的引领下,环境污染第三方治理市场规模在不断扩大.

近年来,我国环境污染第三方治理实践在政策、技术、服务和管理等方面不断创新和发展,取得了可喜的成绩,但仍存在着两个突出问题:一是排污企业和第三方治理企业之间的责任难以清晰界定,二者之间较难建立真正的信任关系,排污企业在履约排放方面、第三方治理企业在治理过程中均存在道德风险;二是信息不对称,排污企业在选择第三方治污企业时,难以获取完整、准确的第三方治理企业信息,第三方治理企业在技术研发方面需要承担较大的市场风险,容易导致劣币驱逐良币.

① 收稿日期:2019-10-30;修订日期:2020-09-16.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(71771181).

通讯作者:董金辉(1980—),男,湖北英山人,博士,讲师. Email: jhdong@whu.edu.cn

环境污染第三方治理的成效事关生态文明建设的大局,事关政府、社会民众、排污企业和第三方治理企业等主要利益主体的切身利益。而博弈论恰是协调各利益相关方利益分配的有力工具,合作博弈更是研究如何实现各参与方资源整合,保证整体利益最大化,进而达成 Pareto 改进甚至最优这一共赢局面的重要理论工具。现实中的博弈情境总是动态变化且充斥着诸多不确定因素,因而运用随机微分博弈理论研究环境污染第三方治理问题具有重要的理论意义和实际应用价值。为此,论文拟先建立环境污染第三方治理的随机微分非合作 Stackelberg 博弈模型,进而建立作为比较基准的随机微分合作博弈模型,试图为破解当前推行环境污染第三方治理所面临的困境和相关机制建设方面提供决策参考和依据。

## 1 文献综述

由于污染物的空间溢出效应<sup>[3-5]</sup>,跨界协同合作治理能取得更好的治理效果已成为学术界的共识<sup>[6-9]</sup>,而博弈论恰是分析此类问题的标准工具。较之于静态博弈,动态博弈能够反映各参与方随着时间进展而不断变化着的决策互动,因而更符合问题实际<sup>[10-12]</sup>。目前,学者们运用动态博弈理论研究环境污染问题时,博弈方通常设定为国与国之间、地方政府之间、排污企业之间或政府与排污企业之间。如 Fernandez<sup>[13]</sup>运用微分博弈研究了美国和墨西哥之间跨界河流的水污染问题,发现两国可以通过合作治理和贸易自由化来削减总体的污水排放量;Yeung<sup>[14]</sup>、Yeung 和 Petrosyan<sup>[15]</sup>通过建立随机微分博弈模型,研究了  $n$  个非对称国家或地区之间的跨界工业污染排放合作治理问题,并建立了子博弈时间一致性的分析框架;而胡震云等<sup>[16]</sup>通过建立微分博弈模型,研究了在上级政府的生态文明考核约束下,地方政府与所管辖企业之间水污染治理的博弈结果,得到了非合作情形下的各自反馈纳什均衡解,并对影响均衡结果的因素作了具体分析。Li<sup>[17]</sup>及刘升学等<sup>[18]</sup>则分别运用微分博弈研究了排污权可交易情形下的相邻两地区间的污染排放问题,得到各自在非合作和合作下的最优排放路径。赖苹等<sup>[19]</sup>分别运用微分博弈和随机微分博弈方法讨论了跨

行政区流域的水污染合作治理问题,得到了地区之间不同联盟结构下的反馈均衡解和合作方的瞬时转移支付结果;姜珂和游达明<sup>[20]</sup>建立了环境污染生态补偿地区和受偿区二者之间的跨界污染微分博弈模型,讨论了非合作 Stackelberg 博弈和协同合作博弈下的均衡结果,认为合作博弈有利于双方实现 Pareto 最优。在环境污染治理主体的设定上,上述文献要么假设为政府管制下由排污企业自行治理,要么假设为政府或国家管制为主导的统一治理,均没有涉及到第三方治理。然而,随着市场规模的扩大及污染物种类和总量的增加,政府或国家管制为主导的统一治理所耗费的资源越来越多,成本也越来越高,行政主导模式逐渐难以为继。且此种模式极度依赖政府的治污意志,政府由于成本和认知的约束,难以实现全面、有效的监管。另一方面,排污企业往往单一地追求利润最大化,而忽视或逃避污染排放物的治理。并且,不同企业的经济实力与技术水平以及排污种类与数量不同,不加区分地要求其自行治污,会导致企业负担较重且治污效率低下<sup>[21,22]</sup>。因此,政府和排污企业有共同的利益去实行环境污染第三方治理。

国内针对环境污染第三方治理的研究,更多地是从委托代理角度或者法律法规的制定上来展开<sup>[22,23]</sup>。王云等<sup>[24]</sup>研究发现,政府在实施环境规制中提高处罚确定性、典型性、严厉性以及舆论监督与行业竞争能够增强同伴影响,提高环境规制威慑力。刘超<sup>[25]</sup>认为推行环境污染第三方治理,是要求环境污染治理的理念与路径从管制模式向互动模式的转换。常杪等<sup>[1]</sup>认为环境污染第三方治理的引入,并非排污企业治污责任的转移,排污企业仍应承担污染治理的主体责任。任卓冉<sup>[21]</sup>、骆建华<sup>[22]</sup>则提出我国应通过立法完善环境服务市场的配套制度,建立全国统一的政府环境监管体系,明确环境服务合同责任划分,并构建体现共治理念的公众环境参与机制。

通过对以上文献的梳理,不难看出学者们用动态博弈研究环境污染治理问题时,囿于随机微分博弈的复杂性,大多是运用微分博弈方法,而较少运用更能刻画现实不确定性的随机微分博弈方法。另外,环境污染治理是多方博弈,仅依靠企业自身或仅依靠政府从法律法规上来推进环境污染第三方治理,则缺乏具体协调各方利益、实现利益

补偿的有效机制,往往会导致博弈的各方“各自为战”,难以达成政府和社会民众所预期的效果.排污企业和第三方治理企业存在现实的合作基础,政府如何转变职能,促进排污企业和第三方治理企业合作治污是一项值得研究的重要课题.但现有文献针对环境污染第三治理的研究大多停留在宏观政策等定性研究层面,微观机制定量分析的研究非常稀少.而随机微分动态合作博弈可以保证最优合作安排时时刻刻都满足个体理性和集体理性,使得博弈的参与方会遵循最初锁定的最优共识原则,而不会偏离一直采用的最优行为,能实现时间一致性或动态平稳意义的成功合作<sup>[26, 27]</sup>,具有自执行性.因此,将随机微分合作博弈运用到环境污染第三方治理问题之中,既是一个可行且更符合实际的研究新思路,也是论文的创新点和贡献所在.

## 2 基本假设

### 2.1 问题基本描述

通过以上分析可知,排污企业将排放的污染物委托给第三方企业治理时,排污企业有偷排(不委托治理而进行直排和不履约排放)的动机.而第三方治理企业的“业务量”受制于排污企业,难以有效地监督排污企业甚至有与排污企业合谋的可能,从而需要地方政府作为环境污染治理的外部监督方,对排污企业的偷排行为进行监管.另外,地方政府依靠排污企业组织生产产生经济效益,实现其经济发展的目标,二者有共同的经济利益.因此,在考核时间终点地方政府可对排污企业进行治污效果奖惩激励.如此,排污企业在承担污染治理的主体责任的同时,会自发地对所委托的第三方治理企业进行治污监督.地方政府为鼓励和发展环境污染第三方治理市场,亦可以对第三方治理企业实施奖惩激励.因此,论文拟构建在地方政府外部监管和激励之下的、排污企业和环境污染第三方治理企业之间的随机微分非合作与合作博弈模型.

### 2.2 基本假设与说明

**假设 1** 为保持考察时间段内政策的连续性,假定博弈时间区间为有限区间  $[t_0, T]$ , 博弈参与方 1 和参与方 2 分别代表排污企业和第三方治理企业,且在  $[t_0, T]$  内双方均具有相同的贴现

因子  $r$ . 这里,  $t_0 \geq 0, r > 0$ .

**假设 2** 根据学者们的经典理论假设及实证研究结果<sup>[20, 28-30]</sup>, 排污企业在生产的同时排放污染物,企业的生产收益  $R(t)$  与污染物排放量  $e(t)$  存在关系:  $R(e(t)) = \alpha e(t) - \frac{1}{2}e^2(t)$ ,  $\alpha$  为效用系数,  $0 < e(t) < \alpha$ . 在环境污染治理监管日益趋严的背景下,政府部门不允许排污企业直排,排放的污染物全部要求治理.但偷排能节约治理成本,排污企业有偷排的动机,因而可令排污企业的污染物排放量  $e(t) = e_0(t) + e_1(t)$ . 这里,  $e_0(t)$  为偷排量,  $e_1(t)$  为委托给第三方治理企业的治理量.由于道德风险的存在,第三方治理企业同样存在虚假治理的动机,在接受委托治污量  $e_1(t)$  后,若其实际治污量为  $e_2(t)$ , 则虚假治污量为  $e_1(t) - e_2(t)$ .

**假设 3** 政府的主要职能在于监管和激励,政府部门除直接监管外,亦可以通过投入成本进行环保宣传和引导社会民众参与监管,以杜绝排污企业偷排.  $\theta$  为政府和民众层次的监管力度,排污企业偷排被发现的概率为  $P(\theta)$ ,  $P'(\theta) > 0$ , 即监管力度越大发现排污企业偷排的概率越大. 排污企业偷排以概率  $P(\theta)$  被政府部门为代表的监管方发现,并被予以  $F_0 e_0(t)$  形式的处罚,  $F_0 > 0$  为处罚系数.

**假设 4** 排污企业承担污染治理的主体责任,因而会自发地对所委托的第三方治理企业进行监管,若监管力度为  $\theta_1(t)$ , 则相应的监管成本为  $\frac{1}{2}\lambda_1 \theta_1^2(t)$ ,  $\lambda_1 > 0$  为监管成本系数. 而第三方治理企业虚假治理会以概率  $p\theta_1(t)$  被排污企业发现,并被排污企业予以  $F_1[e_1(t) - e_2(t)]$  形式的处罚. 其中  $p > 0$  为概率乘数,  $F_1 > 0$  为处罚系数. 在实际情况中,由于

$$0 \leq \frac{\lambda_1 \theta_1^2(t)}{2} \leq \alpha [e_0(t) + e_1(t)] - \frac{[e_0(t) + e_1(t)]^2}{2} < \frac{\alpha^2}{2},$$

可知  $\theta_1(t) < \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda_1}}$ . 故  $\theta_1(t)$  是可以确定范围

的变量,  $p$  是可以确定范围的参数,因而能确保  $p\theta_1(t) \leq 1$ .

**假设 5** 排污企业委托治理的支付成本为  $[K_0 + \beta\theta_2(t)]e_1(t)$ , 其中  $\theta_2(t)$  为第三方治理企

业的技术投入程度;  $\beta \geq 0$  为技术溢价因子,  $K_0 > 0$  为治污价格常数, 亦为排污企业自行治理时的污染物单位治理成本; 即当  $\theta_2(t) = 0$  时, 委托第三方治理的支付成本和自行治理的成本是无差异的. 而第三方治理企业的技术投入成本为  $\frac{1}{2}\lambda_2\theta_2^2(t)$ ,  $\lambda_2$  为技术投入成本系数, 通常要求  $\lambda_2 > \lambda_1$  以体现技术研发的高投入特点; 实际治理成本为  $[\pi - \eta\theta_2(t)]e_2(t)$ ,  $\pi > 0$  为污染物单位治理固定成本,  $\eta > 0$  为技术变动成本系数.

**假设 6** 由于污染物存量典型地受各种不确定因素影响, 因而用随机微分方程描述该地区污染物存量的动态变化进展情况

$$\begin{aligned} ds(t) &= \{e_0(t) + e_1(t) - \xi[K_0 + \gamma\theta_2(t)]e_2(t) - \\ &\quad \delta s(t)\} dt + \sigma s(t) dW(t), \\ s(t_0) &= S_0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\xi[K_0 + \gamma\theta_2(t)]e_2(t)$  为第三方企业实际治污的效果,  $\xi, \gamma > 0$  分别为治理效果系数, 且  $\eta > \gamma$ ;  $\gamma\theta_2(t)$  为第三方治理企业治理技术的加成项, 以确保其治理效果系数不低于排污企业自行治理的效果系数  $\xi K_0$ ;  $\delta > 0$  为该地区自然环境对污染物的自净率;  $W(t)$  是维纳过程 (Wiener process),  $\sigma s(t)$  为扩散项,  $\sigma$  为噪声参数; 污染物存量对排污企业和第三方治理企业的损害系数分别为  $\omega_1$  和  $\omega_2$ , 且  $\omega_1 > \omega_2 > 0$ .

结合假设 5 可知, 当其它条件不变,  $\theta_2(t) > 0$  且增大时,  $\pi - \eta\theta_2(t)$  会随之减小, 即第三方治理企业的实际治理单位成本随之减少, 因而第三方治理企业有动机通过增加技术投入成本来降低单位治理成本. 且此时治污技术的加成项  $\gamma\theta_2(t)$  亦随之增大, 即第三方治理企业的实际治理效果更优. 因而技术投入成本  $\frac{1}{2}\lambda_2\theta_2^2(t)$  的提高, 具有实现治污技术的提升和单位治理成本下降的双重效应.

**假设 7** 地方政府会在结束时点  $T$  对排污企业进行污染物存量考核,  $\bar{S}$  为地方政府对污染物存量的目标要求值,  $g_1[\bar{S} - s(T)]$  为地方政府对排污企业的奖惩函数. 同样, 为了鼓励第三方治理企业加大技术投入进入治污市场并真实治污, 地方政府亦会对其予以  $g_2[\bar{S} - s(T)]$  形式的奖惩激励. 这里,  $\bar{S} \geq 0, g_i > 0, i = 1, 2$ .

### 3 非合作 Stackelberg 博弈模型

#### 3.1 非合作 Stackelberg 博弈模型的构建

在政府的外部监管和激励下, 当排污企业和环境污染第三方治理企业都采取非合作态度时, 双方的目标均是各自最大化其期望收益. 第三方治理企业通过决策技术投入程度, 产生技术和治理效果优势, 在接受排污企业的监管的同时, 吸引排污企业提供更多的委托治理量; 排污企业选择最优的污染物排放量, 进而决定相应的委托第三方企业治理的委托治污量和偷排量, 同时耗费最优成本对第三方治理企业进行监督. 根据  $K_0$  的经济意义, 第三方治理企业在决策是否进入治污市场、技术投入程度和虚假治理方面, 占用一定的主动性, 它会根据排污企业的委托治理量、监管力度和市场议价能力进行相应决策. 排污企业亦会根据第三方治理企业的治污技术水平来确定委托治理量和监管力度. 这里, 假设第三方治理企业是主导方, 排污企业是追随者, 二者之间的非合作博弈为 Stackelberg 主从博弈. 排污企业和第三方治理企业在式 (1) 约束下的决策问题分别为

$$\begin{aligned} J_1 = \max_{\substack{e_0(t), \\ e_1(t), \\ \theta_1(t)}} E_{t_0} \left\{ \int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)} \{ \alpha [e_0(t) + e_1(t)] - \right. \\ \left. \frac{[e_0(t) + e_1(t)]^2}{2} - F_0 P(\theta) e_0(t) - \right. \\ \left. \frac{\lambda_1 \theta_1^2(t)}{2} + F_1 p \theta_1(t) [e_1(t) - \right. \\ \left. e_2(t)] - [K_0 + \beta \theta_2(t)] e_1(t) - \right. \\ \left. \omega_1 s(t) \} dt + e^{-r(T-t_0)} g_1 [\bar{S} - s(T)] \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} J_2 = \max_{\substack{e_2(t), \\ \theta_2(t)}} E_{t_0} \left\{ \int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)} \{ [K_0 + \beta \theta_2(t)] e_1(t) - \right. \\ \left. [\pi - \eta \theta_2(t)] e_2(t) - \frac{\lambda_2}{2} \theta_2^2(t) - \right. \\ \left. F_1 p \theta_1(t) [e_1(t) - e_2(t)] - \omega_2 s(t) \} dt + \right. \\ \left. e^{-r(T-t_0)} g_2 [\bar{S} - s(T)] \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

根据模型的构建形式, 地方政府的主要职能回归到监管和激励两方面. 排污企业在接受政府监管和激励的同时, 组织生产决策污染排放量, 同

时根据环境污染第三方治理市场情景选择不同的治污路径. 第三方治理企业投入研发成本保持或进行治污技术升级以争夺治污市场占有率, 同时根据受监管的力度选择真实治污量.

### 3.2 非合作 Stackelberg 博弈模型求解

第三方治理企业和排污企业 Stackelberg 主从博弈的第 1 阶段, 第三方治理企业决定技术投入程度  $\theta_2(t)$ , 以决定是否进入治理市场或吸引排污企业提供更多的委托治理量, 得到委托治污量后, 进而根据监管力度决定是否虚假治理(确定  $e_2(t)$ ); 第 2 阶段, 排污企业根据地方政府的监管力度、奖惩措施以及第三方治理企业的治污技术水平来决定最优的委托治理量  $e_1(t)$ 、偷排量  $e_0(t)$  以及对第三方治理企业的监管力度  $\theta_1(t)$ .

在策略资讯类型上, 由于反馈纳什均衡(feed-back Nash equilibrium)策略可以看作当前状态  $s(t)$  和时间  $t$  的函数, 并不依赖于状态的过去值, 是马尔科夫完美均衡(Markov perfect equilibrium)策略<sup>[26, 31]</sup>, 因而比开环纳什均衡更加贴近现实. 故此, 论文运用 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程求解其相应的反馈纳什均衡策略.

**命题 1** 记上述从  $t_0$  开始的非合作 Stackelberg 博弈为  $\Gamma(s_{t_0}, T - t_0)$ , 则在  $[t_0, T]$  内该博弈的反馈纳什均衡结果如下.

1) 排污企业的最优策略分别为

$$e_0^{(t_0)*}(t) = \alpha - F_0 P(\theta) + x_1(t) - \lambda_1 A_0^2 \left[ K_0 + \beta \frac{B_0(t)}{B_1(t)} - F_0 P(\theta) \right] - \frac{B_2(t)}{B_1^2(t)} \quad (4)$$

$$e_1^{(t_0)*}(t) = \lambda_1 A_0^2 \left[ K_0 + \beta \frac{B_0(t)}{B_1(t)} - F_0 P(\theta) \right] + \frac{B_2(t)}{B_1^2(t)} \quad (5)$$

$$\theta_1^{(t_0)*}(t) = A_0 \left[ K_0 + \beta \frac{B_0(t)}{B_1(t)} - F_0 P(\theta) \right] \quad (6)$$

2) 第三方治理企业的最优策略分别为

$$e_2^{(t_0)*}(t) = \frac{B_2(t)}{B_1^2(t)} \quad (7)$$

$$\theta_2^{(t_0)*}(t) = \frac{B_0(t)}{B_1(t)} \quad (8)$$

3) 污染物存量的最优轨迹为

$$s^*(t) = S_0 e^{-(\delta + \frac{\sigma^2}{2})(t-t_0) + \sigma[W(t) - W(t_0)]} + \int_{t_0}^t \Omega(u) e^{-(\delta + \frac{\sigma^2}{2})(t-u) + \sigma[W(t) - W(u)]} du \quad (9)$$

且  $E[s^*(t)]$  满足方程

$$E[s^*(t)] = S_0 + \int_{t_0}^t [\Omega(u) - \delta E(s^*(u))] du \quad (10)$$

$$\Omega(t) = \alpha - F_0 P(\theta) + x_1(t) - \xi \left[ K_0 + \gamma \frac{B_0(t)}{B_1(t)} \right] \times \frac{B_2(t)}{B_1^2(t)}$$

4) 排污企业和第三方治理企业的最优期望支付现值分别为

$$V^{(t_0)[1]}(s^*, t) = e^{-r(t-t_0)} [x_1(t)s^*(t) + x_0(t)] \quad (11)$$

$$V^{(t_0)[2]}(s^*, t) = e^{-r(t-t_0)} [y_1(t)s^*(t) + y_0(t)] \quad (12)$$

$$\text{其中 } x_1(t) = -\frac{\omega_1}{r + \delta} - \left( g_1 - \frac{\omega_1}{r + \delta} \right) e^{(r+\delta)(t-T)}, y_1(t) = -\frac{\omega_2}{r + \delta} - \left( g_2 - \frac{\omega_2}{r + \delta} \right) e^{(r+\delta)(t-T)}. A_0 = \frac{1}{F_1 p},$$

$$\text{而 } A_0 = \frac{1}{F_1 p}, A_1 = \lambda_2(\pi - K_0) - (\beta + \eta)\beta\lambda_1 A_0^2 F_0 P(\theta), A_2 = \xi [K_0 \lambda_2 + \beta \gamma \lambda_1 A_0^2 F_0 P(\theta)], B_0(t) = (\pi - K_0) + K_0 \xi y_1(t), B_1(t) = (\beta + \eta) - \xi \gamma y_1(t), B_2(t) = A_1 + A_2 y_1(t).$$

$x_0(t)$ ,  $y_0(t)$  分别是下列一阶非齐次线性常微分方程(13)~方程(14)的解.

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= r x_0(t) - \left\{ \frac{1}{2} [\alpha - F_0 P(\theta) + x_1(t)]^2 - \frac{\lambda_1}{2} A_0^2 \times \right. \\ &\quad \left[ K_0 + \frac{B_0(t)}{B_1(t)} - F_0 P(\theta) \right]^2 + \frac{B_2(t)}{B_1^2(t)} \times \\ &\quad \left\{ F_0 P(\theta) - \left[ K_0 + \beta \frac{B_0(t)}{B_1(t)} \right] - \xi x_1(t) \times \right. \\ &\quad \left. \left[ K_0 + \gamma \frac{B_0(t)}{B_1(t)} \right] \right\} \Big\}, \\ x_0(T) &= g_1 \bar{S} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(t) &= r y_0(t) - \left\{ \lambda_1 A_0^2 F_0 P(\theta) \left[ K_0 + \beta \frac{B_0(t)}{B_1(t)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. F_0 P(\theta) \right] - \frac{\lambda_2}{2} \left[ \frac{B_0(t)}{B_1(t)} \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. y_1(t) \{ \alpha - F_0 P(\theta) + x_1(t) \} \right\}, \\ y_0(T) &= g_2 \bar{S} \end{aligned} \quad (14)$$

**证明** 寻求上述非合作博弈为  $\Gamma(s_{t_0}, T - t_0)$  在可行策略集内的反馈纳什均衡策略  $\theta_i^{(t_0)*}(t) = \phi_i^{(t_0)*}(s, t)$ ,  $e_j^{(t_0)*}(t) = v_j^{(t_0)*}(s, t)$  ( $i = 1, 2$ ;  $j = 0, 1, 2$ ) 的关键在于构造恰当连续可微分的

函数  $V^{(t_0)[i]}(s, t) : \mathbb{R} \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , 分别满足下列 HJB 方程<sup>[26, 27, 32]</sup>

$$-V_t^{(t_0)[1]}(s, t) - \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 V_{ss}^{(t_0)[1]}(s, t) = \max_{e_0(t), e_1(t), \theta_1(t)} \left\{ e^{-r(t-t_0)} \left\{ \alpha [e_0(t) + e_1(t)] - \frac{[e_0(t) + e_1(t)]^2}{2} - F_0 P(\theta) e_0(t) - \frac{\lambda_1}{2} \theta_1^2(t) + F_1 p \theta_1(t) [e_1(t) - e_2^{(t_0)*}(t)] - [K_0 + \beta \theta_2^{(t_0)*}(t)] e_1(t) - \omega_1 s \right\} + V_s^{(t_0)[1]}(s, t) \{ e_0(t) + e_1(t) - \xi [K_0 + \gamma \theta_2^{(t_0)*}(t)] \times e_2^{(t_0)*}(t) - \delta s \} \right\} \\ V^{(t_0)[1]}(T) = e^{-r(T-t_0)} g_1 [\bar{S} - s(T)] \quad (15)$$

$$-V_t^{(t_0)[2]}(s, t) - \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 V_{ss}^{(t_0)[2]}(s, t) = \max_{e_2(t), \theta_2(t)} \left\{ e^{-r(t-t_0)} \left\{ [K_0 + \beta \theta_2(t)] e_1^{(t_0)*}(t) - [\pi - \eta \theta_2(t)] e_2(t) - \frac{\lambda_2}{2} \theta_2^2(t) - F_1 p \theta_1(t) [e_1^{(t_0)*}(t) - e_2(t)] - \omega_2 s \right\} + V_s^{(t_0)[2]}(s, t) \{ e_0^{(t_0)*}(t) + e_1^{(t_0)*}(t) - \xi [K_0 + \gamma \theta_2(t)] e_2(t) - \delta s \} \right\}, \\ V^{(t_0)[2]}(T) = e^{-r(T-t_0)} g_2 [\bar{S} - s(T)] \quad (16)$$

$V^{(t_0)[1]}(s, t)$ 、 $V^{(t_0)[2]}(s, t)$  分别是排污企业和第三方治理企业在  $t_0$  开始的博弈中, 在时间和状态分别为  $t$  和  $s(t)$  时, 他们在  $t$  之后的时区  $[t, T]$  内的期望支付现值函数, 亦称之为他们的价值函数. 而参与方  $i$  的价值函数在最终时点  $T$  处的值等于其在博弈的终点支付现值  $e^{-r(T-t_0)} g_i [\bar{S} - s(T)]$ .

这里, 运用逆向归纳法求解此非合作 Stackelberg 博弈的均衡策略: 先求解排污企业的最优策略, 得到第三方治理企业的反应函数, 进而求解第三方治理企业的最优策略. 为此, 首先求解排污企业的最优控制问题.

最大化式(15)的右边, 可得到

$$e_0^{(t_0)*}(t) = \alpha - F_0 P(\theta) + e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[1]}(s, t) - e_2^{(t_0)*}(t) - \lambda_1 A_0^2 [K_0 + \beta \theta_2^{(t_0)*}(t) - F_0 P(\theta)] \quad (17)$$

$$e_1^{(t_0)*}(t) = e_2^{(t_0)*}(t) + \lambda_1 A_0^2 [K_0 + \beta \theta_2^{(t_0)*}(t) - F_0 P(\theta)] \quad (18)$$

$$\theta_1^{(t_0)*}(t) = A_0 [K_0 + \beta \theta_2^{(t_0)*}(t) - F_0 P(\theta)] \quad (19)$$

其中  $A_0 = \frac{1}{F_1 p}$ .

第三方治理企业将理性地预测排污企业的最

优策略, 并做出相应反应. 由此, 将式(17) ~ 式(19)分别代入到式(16), 可得

$$-V_t^{(t_0)[1]}(s, t) - \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 V_{ss}^{(t_0)[1]}(s, t) = \max_{e_0(t), e_1(t), \theta_1(t)} \left\{ e^{-r(t-t_0)} \left\{ \alpha [e_0(t) + e_1(t)] - \frac{[e_0(t) + e_1(t)]^2}{2} - F_0 P(\theta) e_0(t) - \frac{\lambda_1}{2} \theta_1^2(t) + F_1 p \theta_1(t) [e_1(t) - e_2^{(t_0)*}(t)] - [K_0 + \beta \theta_2^{(t_0)*}(t)] e_1(t) - \omega_1 s \right\} + V_s^{(t_0)[1]}(s, t) \{ e_0(t) + e_1(t) - \xi [K_0 + \gamma \theta_2^{(t_0)*}(t)] e_2^{(t_0)*}(t) - \delta s \} \right\} \quad (20)$$

$$V^{(t_0)[1]}(T) = e^{-r(T-t_0)} g_1 [\bar{S} - s(T)]$$

最大化式(20)的右边, 可得到

$$\theta_2^{(t_0)*}(t) = \frac{(\pi - K_0) + K_0 \xi e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)}{(\beta + \eta) - \xi \gamma e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)} \quad (21)$$

$$e_2^{(t_0)*}(t) = \frac{A_1 + A_2 e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)}{[(\beta + \eta) - \xi \gamma e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)]^2} \quad (22)$$

这里,  $A_1 = \lambda_2 (\pi - K_0) - (\beta + \eta) \beta \lambda_1 A_0^2 F_0 P(\theta)$ ,  $A_2 = \xi [K_0 \lambda_2 + \beta \gamma \lambda_1 A_0^2 F_0 P(\theta)]$ .

将式(21)、式(22)再代入式(20), 可得到

$$-V_t^{(t_0)[2]}(s, t) - \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 V_{ss}^{(t_0)[2]}(s, t) = e^{-r(t-t_0)} \left\{ \left[ K_0 + \beta \frac{(\pi - K_0) + K_0 \xi e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)}{(\beta + \eta) - \xi \gamma e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)} \right] \times \left\{ \lambda_1 A_0^2 \left[ K_0 + \beta \frac{(\pi - K_0) + K_0 \xi e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)}{(\beta + \eta) - \xi \gamma e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)} - F_0 P(\theta) \right] + \frac{A_1 + A_2 e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)}{[(\beta + \eta) - \xi \gamma e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)]^2} \right\} - \omega_2 s - \frac{\lambda_2}{2} \left[ \frac{(\pi - K_0) + K_0 \xi e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)}{(\beta + \eta) - \xi \gamma e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)} \right]^2 - \left[ \pi + \eta \frac{(\pi - K_0) + K_0 \xi e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)}{(\beta + \eta) - \xi \gamma e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)} \right] \frac{(\pi - K_0) + K_0 \xi e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)}{(\beta + \eta) - \xi \gamma e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)} - \lambda_1 A_0^2 [K_0 + \beta \frac{(\pi - K_0) + K_0 \xi e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)}{(\beta + \eta) - \xi \gamma e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)} - F_0 P(\theta)] \right\} + V_s^{(t_0)[2]}(s, t) \left\{ \alpha - F_0 P(\theta) + e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[1]}(s, t) - \frac{A_1 + A_2 e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)}{[(\beta + \eta) - \xi \gamma e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)]^2} \xi [K_0 + \gamma \frac{(\pi - K_0) + K_0 \xi e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)}{(\beta + \eta) - \xi \gamma e^{r(t-t_0)} V_s^{(t_0)[2]}(s, t)}] - \delta s \right\}, \\ V^{(t_0)[2]}(T) = e^{-r(T-t_0)} g_2 [\bar{S} - s(T)] \quad (23)$$

类似地,结合式(17)~式(19)、式(21)和式(22)可将式(15)变形为与价值函数相联系的形式(过程不再赘述).

根据式(23)的形式特征,可令

$$V^{(t_0)[1]}(s, t) = e^{-r(T-t_0)} [x_1(t)s + x_0(t)],$$

$$V^{(t_0)[2]}(s, t) = e^{-r(T-t_0)} [y_1(t)s + y_0(t)]$$

(24)

将式(24)分别代入到式(23)及式(15)的变形结果,运用待定系数法,可得到相应的常微分方程

$$\dot{x}_1(t) = (r+\delta)x_1(t) + \omega_1, \quad x_1(T) = -g_1 \quad (25)$$

$$\dot{y}_1(t) = (r+\delta)y_1(t) + \omega_2, \quad y_1(T) = -g_2 \quad (26)$$

式(25)和式(26)为一阶常系数线性非齐次常微分方程,可求解得

$$x_1(t) = -\frac{\omega_1}{r+\delta} - \left(g_1 - \frac{\omega_1}{r+\delta}\right)e^{(r+\delta)(t-T)} \quad (27)$$

$$y_1(t) = -\frac{\omega_2}{r+\delta} - \left(g_2 - \frac{\omega_2}{r+\delta}\right)e^{(r+\delta)(t-T)} \quad (28)$$

同时可得到关于  $x_0(t)$ ,  $y_0(t)$  的一阶常系数线性非齐次常微分方程(13)和常微分方程(14),当各参数给定时,方程(13)和方程(14)亦可给出显式解.

此时,式(1)可变形为

$$ds(t) = [\Omega(t) - \delta s(t)]dt + \sigma s(t)dW(t),$$

$$s(t_0) = S_0 \quad (29)$$

且  $\Omega(t) = \alpha - F_0P(\theta) + x_1(t) - \xi \left[ K_0 + \gamma \frac{B_0(t)}{B_1(t)} \right] \times \frac{B_2(t)}{[B_1(t)]^2}$ .

方程(29)为时变系数的线性随机微分方程<sup>[32]</sup>,可得其式(9)所示的一般解及对应的期望值函数方程(10).

命题得证.

若  $\tau \in [t_0, T]$ ,  $k \in \{1, 2\}$ , 令  $V^{(\tau)[k]}(s_\tau, t)$  分别代表排污企业和第三方治理企业在子博弈  $\Gamma(s_\tau, T - \tau)$  中的价值函数,  $V^{(\tau)[k]}(s_\tau, t) : \mathbb{R} \times [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ . 由于反馈纳什均衡策略是马尔科夫完美均衡,只依赖于当前的时间和状态,则对  $\forall t \in [\tau, T]$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $j \in \{0, 1, 2\}$ , 成立如下关系

$$1) \theta_i^{*(\tau)}(t) = \theta_i^{*(t_0)}(t), \quad e_j^{*(\tau)}(t) = e_j^{*(t_0)*}(t) \quad (30)$$

$$2) V^{(\tau)[k]}(s_\tau, \tau) = e^{r(\tau-t_0)} V^{(t_0)[k]}(s_\tau, \tau),$$

$$V^{(t)[k]}(s_t, t) = e^{r(t-\tau)} V^{(\tau)[k]}(s_t, t), \quad (31)$$

$$V^{(\tau)[k]}(s_t, t) = e^{r(\tau-t_0)} V^{(t_0)[k]}(s_t, t)$$

即在同一时间和状态之下,各参与方在子博弈  $\Gamma(s_\tau, T - \tau)$  和原博弈  $\Gamma(s_{t_0}, T - t_0)$  中的最优策略是一致的;各参与方的价值函数在子博弈和原博弈中的取值进行对应贴现后是相同的.

## 4 合作博弈模型

### 4.1 合作博弈建模及求解

在非合作博弈情形下,各参与方只基于自身利益最大化的原则进行决策,由于道德风险的存在,排污企业需支付监督成本,而第三方治理企业在技术投入方面亦需权衡,因而难以达成整体利益最优,甚至出现两败俱伤的局面.而在合作情形下,各参与方都同意依据最优共识原则来分配合作的总体支付.合作的安排必须满足个体理性和整体理性原则,也即参与方的合作策略能实现 Pareto 最优,每位参与方所分配到的合作支付不低于非合作博弈时的收益.因此,在动态合作博弈中各方合作达成的关键在于寻求最优合作状态轨迹路径和满足时间一致性的分配整体合作支付的机制.

现在来分析双方共同合作的情形.令  $\Gamma^c(s_{t_0}^c, T - t_0)$  表示第 3.1 节中非合作博弈  $\Gamma(s_{t_0}, T - t_0)$  对应的合作博弈.根据整体理性原则,排污企业和第三方治理企业在地方政府的外部监督和激励下,合作的首要目标是实现双方整体利益最大化,也即解决如下最优控制问题

$$J^c = \max_{e_0(t), e_1(t), \theta_2(t)} E_{t_0} \left\{ \int_{t_0}^T e^{-r(T-t)} \{ \alpha [e_0(t) + e_1(t)] - \frac{1}{2} [ [e_0(t) + e_1(t)]^2 - F_0P(\theta)e_0(t) - [ \pi - \eta\theta_2(t) ] e_1(t) - \frac{\lambda_2}{2} \theta_2^2(t) - (\omega_1 + \omega_2) s^c(t) ] \} dt + e^{-r(T-t_0)} (g_1 + g_2) [ \bar{S} - s^c(T) ] \right\} \quad (32)$$

$$ds^c(t) = \{e_0(t) + e_1(t) - \xi[K_0 + \gamma\theta_2(t)]e_1(t) - \delta s^c(t)\} dt + \sigma s^c(t) dW(t) \quad (33)$$

在排污企业和第三方治理企业合作的情形下,排污企业无需耗费监督成本、治污企业也无虚假治理的动机,治污成本为  $[\pi - \eta\theta_2(t)]e_1(t)$ . 此时,污染物存量的随机动态变化方程如式(33)所示.

**命题 2** 在地方政府的外部监督和激励下,排污企业和第三方治理企业合作博弈的均衡结果如下

1) 排污企业的合作最优策略分别为

$$e_0^{(t_0)c^*}(t) = \alpha - F_0P(\theta) + z_1(t) + \lambda_2 \frac{C_1(t)}{C_2^2(t)} \quad (34)$$

$$e_1^{(t_0)c^*}(t) = -\lambda_2 \frac{C_1(t)}{C_2^2(t)} \quad (35)$$

2) 第三方治理企业的合作最优技术投入策略为

$$\theta_2^{(t_0)c^*}(t) = \frac{C_1(t)}{C_2(t)} \quad (36)$$

3) 合作时污染物存量的最优轨迹为

$$s^{c^*}(t) = S_0 e^{-(\delta + \frac{\sigma^2}{2})(t-t_0) + \sigma[W(t) - W(t_0)]} + \int_{t_0}^t \Omega^c(u) e^{-(\delta + \frac{\sigma^2}{2})(t-u) + \sigma[W(t) - W(u)]} du \quad (37)$$

且有

$$E[s^{c^*}(t)] = S_0 + \int_{t_0}^t [\Omega^c(u) - \delta E[s^{c^*}(u)]] du \quad (38)$$

其中  $\Omega^c(t) = \alpha - F_0P(\theta) + z_1(t) + \lambda_2\xi\left[K_0 + \gamma\frac{C_1(t)}{C_2(t)}\right]\frac{C_1(t)}{C_2^2(t)}$ .

4) 合作的最优整体价值函数为

$$V^{(t_0)}(s^c, t) = e^{-r(T-t_0)} [z_1(t)s^{c^*}(t) + z_0(t)] \quad (39)$$

其中  $z_1(t) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{r + \delta} - \left[(g_1 + g_2) - \frac{\omega_1 + \omega_2}{r + \delta}\right] e^{(r+\delta)(t-T)}$ ,

$C_1(t) = F_0P(\theta) - \pi - K_0\xi z_1(t)$ ,  $C_2(t) = -\eta + \xi\gamma z_1(t)$ ,

而  $z_0(t)$  是下列一阶非齐次线性常微分方程

$$\dot{z}_0(t) = rz_0(t) - \frac{1}{2} \left\{ [\alpha - F_0P(\theta) + z_1(t)]^2 - \lambda_2 \frac{C_1^2(t)}{C_2^2(t)} \right\},$$

$$z_0(T) = (g_1 + g_2)\bar{S} \quad (40)$$

的解.

**证明** 对于合作博弈为  $\Gamma^c(s^c, T - t_0)$ , 寻求其在可行策略集内的反馈纳什均衡策略

$$e_0^{(t_0)c^*}(t) = \psi_0^{(t_0)*}(s^c, t), e_1^{(t_0)c^*}(t) = \psi_1^{(t_0)*}(s^c, t), \theta_2^{(t_0)c^*}(t) = \psi_2^{(t_0)*}(s^c, t),$$

类似于非合作博弈,构造存在恰当连续可微分的整体价值函数  $V^{(t_0)}(s^c, t) : \mathbb{R} \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

满足如下 HJB 方程

$$-V_t^{(t_0)}(s^c, t) - \frac{1}{2}\sigma^2(s^c)^2 V_{s^c s^c}^{(t_0)}(s^c, t) = \max_{e_0(t), e_1(t), \theta_2(t)} \left\{ e^{-r(T-t)} \left\{ \alpha[e_0(t) + e_1(t)] - \frac{1}{2}[e_0(t) + e_1(t)]^2 - F_0P(\theta)e_0(t) - [\pi - \eta\theta_2(t)]e_1(t) - \frac{\lambda_2}{2}\theta_2^2(t) - (\omega_1 + \omega_2)s^c \right\} + V_{s^c}^{(t_0)}(s^c, t) \{e_0(t) + e_1(t) - \xi[K_0 + \gamma\theta_2(t)]e_1(t) - \delta s^c\} \right\},$$

$$V^{(t_0)}(s^c, T) = e^{-r(T-t_0)}(g_1 + g_2)[\bar{S} - s^c(T)] \quad (41)$$

最大化上述方程的右边,可以得到

$$\psi_0^{(t_0)*}(s^c, t) = \alpha - F_0P(\theta) + e^{r(t-t_0)} V_{s^c}^{(t_0)}(s^c, t) + \frac{\lambda_2[F_0P(\theta) - \pi - K_0\xi e^{r(t-t_0)} V_{s^c}^{(t_0)}(s^c, t)]}{[-\eta + \xi\gamma e^{r(t-t_0)} V_{s^c}^{(t_0)}(s^c, t)]^2} \quad (42)$$

$$\psi_1^{(t_0)*}(s^c, t) = \frac{-\lambda_2[F_0P(\theta) - \pi - K_0\xi e^{r(t-t_0)} V_{s^c}^{(t_0)}(s^c, t)]}{[-\eta + \xi\gamma e^{r(t-t_0)} V_{s^c}^{(t_0)}(s^c, t)]^2} \quad (43)$$

$$\psi_2^{(t_0)*}(s^c, t) = \frac{F_0P(\theta) - \pi - K_0\xi e^{r(t-t_0)} V_{s^c}^{(t_0)}(s^c, t)}{-\eta + \xi\gamma e^{r(t-t_0)} V_{s^c}^{(t_0)}(s^c, t)} \quad (44)$$

将式(42)~式(44)代入式(41),可将式(41)转化为与  $V_{s^c}^{(t_0)}(s^c, t)$  相关联的形式,类似于非合作博弈,分析其形式特征,可令

$$V^{(t_0)}(s^c, t) = e^{-r(T-t_0)} [z_1(t)s^c(t) + z_0(t)] \quad (45)$$

则有  $V_t^{(t_0)}(s^c, t) = e^{-r(T-t_0)} \{-r[z_1(t)s^c + z_0(t)] + [z_1(t)s^c + z_0(t)]\} V_{s^c}^{(t_0)}(s^c, t) = e^{-r(T-t_0)} z_1(t)$ .

运用待定系数法,即可得到方程

$$\dot{z}_1(t) = (r + \delta)z_1(t) + (\omega_1 + \omega_2) \quad (46)$$

$$z_1(T) = -(g_1 + g_2)$$



解此一阶线性微分方程,即可得

$$z_1(t) = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{r + \delta} - \left[ (g_1 + g_2) - \frac{\omega_1 + \omega_2}{r + \delta} \right] e^{(r+\delta)(t-T)}$$

另可得到关于  $z_0(t)$  的一阶常系数非齐次线性微分方程(40),当参数给定时,亦可通过标准技术求解.故结合式(41)~式(43),即可得到式(34)~式(36)结果.

此时,污染物存量的随机动态变化方程(33)可变化为

$$\begin{aligned} ds^c(t) &= [\Omega^c(t) - \delta s^c(t)]dt + \sigma s^c(t)dW(t) \\ s^c(t_0) &= S_0 \end{aligned} \quad (47)$$

$$\text{且 } \Omega^c(t) = \alpha - F_0 P(\theta) + z_1(t) + \lambda_2 \xi \left[ K_0 + \gamma \times \frac{C_1(t)}{C_2(t)} \right] \frac{C_1(t)}{C_2^2(t)}.$$

此随机微分方程是一个一般的线性随机微分方程<sup>[32]</sup>,故可通过标准技术求得其式(37)所示的一般解及其对应的期望值函数方程(38).

命题得证.

若  $t_0 \leq \tau \leq t \leq T$ ,令  $V^{(\tau)}(s_\tau^c, t)$  是开始时间为  $\tau$ 、状态为  $s_\tau$  的子合作博弈  $\Gamma^c(s_\tau^c, T - \tau)$  中的价值函数,  $i \in \{0, 1, 2\}$ ,成立如下关系等式

$$1) \psi_i^{(\tau)}(s^{c*}, t) = \psi_i^{(t_0)}(s^{c*}, t) \quad (48)$$

$$2) V^{(\tau)}(s_\tau^{c*}, t) = e^{r(\tau-t_0)} V^{(t_0)}(s_\tau^{c*}, t) \quad (49)$$

### 4.2 合作支付分配机制

在随机微分合作博弈之中,每一个可行的合作安排除必须时时刻刻都满足个体理性和集体理性之外,还需符合更严格的子博弈一致性条件<sup>[26]</sup>.在合作博弈  $\Gamma^c(s_{t_0}^c, T - t_0)$  中,  $\epsilon^{[i]}(t_0, s_{t_0}^c)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,表示在当前时间为  $t_0$ 、状态为  $s^c(t_0)$  时,依据最初共同锁定的最优共识原则,参与方  $i$  在时间区间  $[t_0, T]$  从整体期望合作支付中得到的分配.用  $\epsilon^{(\tau)[i]}(\tau, s_\tau^{c*})$  ( $\tau \in [t_0, T]$ ) 表示在开始时间为  $\tau$ 、状态为  $s^c(\tau)$  时,依据最初共同锁定的最优共识原则,参与方  $i$  在时间区间  $[\tau, T]$  从子合作博弈  $\Gamma^c(s_\tau^{c*}, T - \tau)$  整体期望合作支付中得到的分配.

定义1<sup>[26, 27]</sup> 称向量  $\epsilon^{(\tau)}(\tau, s_\tau^{c*}) = (\epsilon^{(\tau)[1]}(\tau, s_\tau^{c*}), \epsilon^{(\tau)[2]}(\tau, s_\tau^{c*}))$  为子合作博弈  $\Gamma^c(s_\tau^{c*}, T - \tau)$  的有效分配,若  $\epsilon^{(\tau)}(\tau, s_\tau^{c*})$  满足如下整体理性和个体理性条件.

1)  $\epsilon^{(\tau)}(\tau, s_\tau^{c*}) = (\epsilon^{(\tau)1}(\tau, s_\tau^{c*}), \epsilon^{(\tau)2}(\tau, s_\tau^{c*}))$  是 Pareto 最优的分配向量;

2)  $\epsilon^{(\tau)[i]}(\tau, s_\tau^{c*}) \geq V^{(\tau)[i]}(\tau, s_\tau^{c*})$ .

而  $B^{(\tau)}(t) = (B^{(\tau)[1]}(t), B^{(\tau)[2]}(t))$  ( $t \in [\tau, T]$ ) 表示  $\Gamma^c(s_\tau^{c*}, T - \tau)$  中的一个瞬时分支支付机制,  $B^{(\tau)[i]}(t)$  表示参与方  $i$  在  $t$  时从合作中得到的瞬时支付,  $B^{(\tau)[i]}(t)$  是保证参与方  $i$  时刻不偏离合作最优轨迹的关键.而在博弈结束时,  $i$  方得到终点支付  $g_i[\bar{S} - s^c(T)]$ .  $\epsilon^{(\tau)[i]}(t, s_i^{c*})$  表示  $\Gamma^c(s_\tau^{c*}, T - \tau)$  中,当时间为  $t$ 、状态为  $s^c(t)$  时,  $i$  方在  $[t, T]$  内根据最初共同锁定的最优共识原则从整体期望合作支付中所分得的部分,那么则有

$$\begin{aligned} \epsilon^{(\tau)[i]}(t, s_i^{c*}) &= E_\tau \left\{ \int_t^T e^{-r(u-\tau)} B^{[i]}(u) du + \right. \\ &\left. e^{-r(T-\tau)} g_i[\bar{S} - s^c(T)] s^c(t) = s^c(t) \right\} \end{aligned} \quad (50)$$

定义2<sup>[26, 27]</sup> 对  $\forall \tau \in [t_0, T], t \in [\tau, T]$ ,  $i \in \{1, 2\}$  称向量  $\epsilon^{(\tau)}(\tau, s_\tau^{c*})$  为满足子博弈  $\Gamma^c(s_\tau^{c*}, T - \tau)$  一致性的分配,若  $\epsilon^{(\tau)}(\tau, s_\tau^{c*})$  满足如下条件.

1)  $\epsilon^{(\tau)}(\tau, s_\tau^{c*})$  是 Pareto 最优的分配向量;

2)  $\epsilon^{(\tau)[i]}(t, s_i^{c*}) \geq V^{(\tau)[i]}(t, s_i^{c*})$ ;

3)  $\epsilon^{(\tau)[i]}(t, s_i^{c*}) = e^{-r(t-\tau)} \epsilon^{(t)[i]}(t, s_i^{c*})$ .

一个具有子博弈一致性的合作方案,能够保证在整个博弈中,在每位参与方的最优行为以及随机变化的不同状态下,当前时间开始的合作安排在用到较后时间开始的子博弈中,根据最初锁定的最优共识原则,仍然能保证结果是最优的.也即对  $\forall \tau_1, \tau_2 \in [t_0, T]$ ,即使  $\tau_1 \neq \tau_2$ ,也应该有  $B^{(\tau_1)[i]}(t) = B^{(\tau_2)[i]}(t)$ ,可以直接记  $B^{(\tau)[i]}(t) = B^{[i]}(t)$ .故满足子博弈一致性的得偿分配程序包含两个组成部分,其一是在合作参与方  $i$  得到的期望终点支付  $g_i[\bar{S} - s^c(T)]$ ,其二是合作参与方  $i$  在每一时刻  $\tau \in (t_0, T)$  所得到的协调转型补贴  $B^{[i]}(\tau)$ .

根据 Yeung 和 Petrosyan<sup>[26, 27]</sup> 所提出的能满足子博弈一致性的得偿分配程序,可得到如下结果.

1) 在合作博弈  $\Gamma^c(s_{t_0}^c, T - t_0)$  中,合作参与方  $i \in \{1, 2\}$  所得到的分配为

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(t_0)[i]}(t_0, s_{t_0}^{c^*}) &= V^{(t_0)[i]}(t_0, s_{t_0}^{c^*}) + \frac{V^{(t_0)[i]}(t_0, s_{t_0}^{c^*})}{\sum_{j=1}^2 V^{(t_0)[j]}(t_0, s_{t_0}^{c^*})} \times \\ &\left[ V^{(t_0)}(t_0, s_{t_0}^{c^*}) - \sum_{j=1}^2 V^{(t_0)[j]}(t_0, s_{t_0}^{c^*}) \right] \\ &= \frac{V^{(t_0)[i]}(t_0, s_{t_0}^{c^*})}{\sum_{j=1}^2 V^{(t_0)[j]}(t_0, s_{t_0}^{c^*})} V^{(t_0)}(t_0, s_{t_0}^{c^*}) \end{aligned} \quad (51)$$

2) 对  $\forall \tau \in [t_0, T]$ , 在子合作博弈  $\Gamma^c(s_\tau^{c^*}, T - \tau)$  中, 合作参与方  $i \in \{1, 2\}$  所得到的分配为

$$\varepsilon^{(\tau)[i]}(\tau, s_\tau^{c^*}) = \frac{V^{(\tau)[i]}(\tau, s_\tau^{c^*})}{\sum_{j=1}^2 V^{(\tau)[j]}(\tau, s_\tau^{c^*})} V^{(\tau)}(\tau, s_\tau^{c^*}) \quad (52)$$

3) 在合作博弈  $\Gamma^c(s_0^c, T - t_0)$  中, 当合作参与方  $i \in \{1, 2\}$  都同意根据式(51) ~ 式(52) 分配机制来分配整体合作支付时, 除了终点支付  $g_i[\bar{s} - s^*(T)]$  外, 对  $\forall \tau \in (t_0, T)$ , 合作博弈参与方  $i$  所得到的瞬时支付为

$$\begin{aligned} B^{[i]}(\tau) &= -[\varepsilon_i^{(\tau)[i]}(t, s_t^{c^*})|_{t=\tau}] - \frac{\sigma^2 (s_\tau^{c^*})^2}{2} \times \\ &[\varepsilon_{s_{t_0}^{c^*}}^{(\tau)[i]}(t, s_t^{c^*})|_{t=\tau}] - [\varepsilon_{s_{t_0}^{c^*}}^{(\tau)[i]}(t, s_t^{c^*})|_{t=\tau}] \times \\ &[\mathcal{L}(\tau) - \eta s_\tau^{c^*}] \end{aligned} \quad (53)$$

$\forall \tau \in (t_0, T)$ , 在子合作博弈  $\Gamma^c(s_\tau^{c^*}, T - \tau)$  中, 排污企业和第三方治理企业得到的分配分别为

$$\varepsilon^{(\tau)[1]}(\tau, s_\tau^{c^*}) = \frac{[x_1(\tau)s^*(\tau) + x_0(\tau)][z_1(\tau)s^{c^*}(\tau) + z_0(\tau)]}{[x_1(\tau)s^*(\tau) + x_0(\tau)] + [y_1(\tau)s^*(\tau) + y_0(\tau)]} \quad (54)$$

$$\varepsilon^{(\tau)[2]}(\tau, s_\tau^{c^*}) = \frac{[y_1(\tau)s^*(\tau) + y_0(\tau)][z_1(\tau)s^{c^*}(\tau) + z_0(\tau)]}{[x_1(\tau)s^*(\tau) + x_0(\tau)] + [y_1(\tau)s^*(\tau) + y_0(\tau)]} \quad (55)$$

此时, 可得到

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^{(\tau)[1]}(t, s_t^{c^*})|_{t=\tau} &= \{ [y_1(\tau)s_\tau^* + y_0(\tau)] \{-r[x_1(\tau)s_\tau^* + \\ &x_0(\tau) + \dot{x}_1(\tau)s_\tau^* + \dot{x}_0(\tau)]\} - [x_1(\tau)s_\tau^* + x_0(\tau)] \times \\ &\{-r[y_1(\tau)s_\tau^* + y_0(\tau)] + [\dot{y}_1(\tau)s_\tau^* + \dot{y}_0(\tau)]\} \} \times \\ &\frac{[z_1(\tau)s_\tau^{c^*} + z_0(\tau)]}{\{ [x_1(\tau)s_\tau^* + x_0(\tau)] + [y_1(\tau)s_\tau^* + y_0(\tau)] \}^2} + \\ &\frac{[x_1(\tau)s_\tau^* + x_0(\tau)] \{-r[z_1(\tau)s_\tau^{c^*} + z_0(\tau)] + [\dot{z}_1(\tau)s_\tau^{c^*} + \dot{z}_0(\tau)]\}}{[x_1(\tau)s_\tau^* + x_0(\tau)] + [y_1(\tau)s_\tau^* + y_0(\tau)]} \end{aligned} \quad (56)$$

类似可以得到式(53) 中的  $\varepsilon_{s_{t_0}^{c^*}}^{(\tau)[1]}(t, s_t^{c^*})|_{t=\tau}$  等其它项结果, 进而得到  $B^{[1]}(\tau)$  和  $B^{[2]}(\tau)$ .

记排污企业在合作博弈中的瞬时支付为

$$\begin{aligned} f_1^c(s^{c^*}, t) &= \frac{1}{2}[\alpha - F_0P(\theta)]^2 - \frac{1}{2}z_1^2(t) - \\ &\omega_1 s^c(t) - F_0P(\theta) \frac{\lambda_2 C_1(t)}{[C_2(t)]^2} + \lambda_2 \frac{C_1(t)}{[C_2(t)]^2} \times \\ &\left[ K_0 + \beta \frac{C_1(t)}{C_2(t)} \right] \end{aligned} \quad (57)$$

则第三方治理企业在合作博弈中的瞬时支付为

$$\begin{aligned} f_2^c(s^{c^*}, t) &= -(1-\pi)\lambda_2 \frac{C_1(t)}{[C_2(t)]^2} \left[ K_0 + \beta \frac{C_1(t)}{C_2(t)} \right] - \\ &\frac{\lambda_2 [C_1(t)]^2}{2 [C_2(t)]^2} + \left[ \pi - \eta \frac{C_1(t)}{C_2(t)} \right] \lambda_2 \frac{C_1(t)}{[C_2(t)]^2} - \omega_2 s^c(t) \end{aligned} \quad (58)$$

计算出  $B^{[i]}(\tau) - f_i^c(s^{c^*}, \tau)$ , 则可得双方的瞬时转移支付(side pay).

## 5 比较分析与数值仿真

### 5.1 比较分析

对比非合作 Stackelberg 博弈与合作博弈, 可得到如下系列相关结论.

**命题 3** 根据非合作 Stackelberg 博弈与合作博弈的反馈纳什均衡解,  $\forall t \in [t_0, T]$ , 可知

1) 在非合作博弈中, 政府监管的次优均衡为  $F_0P(\theta) = K_0$ . 而满足条件

$$\pi > K_0 \left\{ 1 + \xi \left[ \frac{\omega_2}{r + \delta} + \left( g_2 - \frac{\omega_2}{r + \delta} \right) e^{(r+\delta)(t-T)} \right] \right\} \quad (59)$$

时, 第三方治理企业才进行会进行技术投入, 排污企业才会委托第三方治理企业治污, 二者之间的非合作博弈正式展开, 且在其它条件不变的情况下, 第三方治理企业技术投入力度越大, 则虚假治理量越大. 即在非合作博弈中, 第三方治理企业的虚假治理会一直存在, 道德风险不可消除;

2) 在合作博弈中, 满足条件

$$\begin{aligned} \pi > K_0 \left\{ 1 + \xi \left[ \frac{\omega_1 + \omega_2}{r + \delta} + \left( g_1 + g_2 - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{\omega_1 + \omega_2}{r + \delta} \right) e^{(r+\delta)(t-T)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (60)$$

时,第三方治理企业才会进行技术投入.

**证明 1** 根据非合作 Stackelberg 博弈模型假设,当  $\theta_2^{(t_0)*}(t) = \frac{B_0(t)}{B_1(t)} = 0$  时,排污企业不委托治理,因而亦有  $\theta_1^{(t_0)*}(t) = A_0[K_0 + \beta \frac{B_0(t)}{B_1(t)} - F_0P(\theta)] = 0$ ,从而  $F_0P(\theta) = K_0$ . 而根据假设 5,  $K_0 > 0$  为排污企业自行治理时的污染物单位治理成本,  $F_0P(\theta) = K_0$  时虽然排污企业自行治理成本和偷排被发现的处罚结果是一致的,排污企业偷排和自行治理二者无差异. 但若考虑到污染物存量对自身的损害因素,排污企业更倾向于自行治理而非偷排,因而  $F_0P(\theta) = K_0$  可视为政府监管的次优均衡.

$$\text{由于 } \frac{\omega_2}{r + \delta} + \left(g_2 - \frac{\omega_2}{r + \delta}\right)e^{(r+\delta)(t-T)} = g_2 e^{(r+\delta)(t-T)} + \frac{\omega_2}{r + \delta}[1 - e^{(r+\delta)(t-T)}] > 0,$$

故  $B_1(t) = (\beta + \eta) + \xi\gamma \left[ \frac{\omega_2}{r + \delta} + \left(g_2 - \frac{\omega_2}{r + \delta}\right)e^{(r+\delta)(t-T)} \right] > 0$ . 因而要求  $\theta_2^{(t_0)*}(t) = \frac{B_0(t)}{B_1(t)} > 0$ ,即要求  $B_0(t) > 0$ . 也即要求式(59)成立.

当  $\theta_2^{(t_0)*}(t) = \frac{B_0(t)}{B_1(t)} > 0$ ,  $F_0P(\theta) = K_0$  时,由式(5)和式(7),可知

$$\begin{aligned} e_1^{(t_0)*}(t) - e_2^{(t_0)*}(t) &= \lambda_1 A_0^2 \left[ K_0 + \beta \frac{B_0(t)}{B_1(t)} - F_0P(\theta) \right] \\ &= \lambda_1 A_0^2 \beta \frac{B_0(t)}{B_1(t)} > 0 \end{aligned} \quad (61)$$

故虚假治理量总是大于 0,第三方治理企业的虚假治理会一直存在.

**证明 2** 要求  $\theta_2^{(t_0)*}(t) > 0$ ,即要求  $\frac{C_1(t)}{C_2(t)} > 0$ ,类似于 1 的证明,可得到条件式(60). 比较式(59)和式(60),较容易判断式(60)的右边更大. 故较之非合作博弈,合作博弈要求  $\pi$  值更大.

在实际情况中,第三方治理企业决定接受委托治理后,通常需要进行初始投资,而初始投资值的大小与  $\pi$  的大小相对应, $\pi$  值大固然能激发第

三方治理企业在后期加大技术投入从而通过技术更新迭代逐步降低单位治污成本,但  $\pi$  值过大会提高第三方治理企业的进入门槛,给第三方治理企业增加投资风险,降低其进入治理市场的意愿,不利于第三方治理市场的良性竞争和技术孵化. 因此,由式(59)和式(60)得到启示,政府部门制定激励措施的关键在于权衡  $g_1$  与  $\frac{\omega_1}{r + \delta}$ 、 $g_2$  与

$\frac{\omega_2}{r + \delta}$  的大小关系,因为一方面政府在制定激励措施的时候,通常难以观测  $\xi$ ,而易于获取  $r$ 、 $\delta$ 、 $\omega_1$  和  $\omega_2$ ;另一方面  $x_1(t)$ 、 $y_1(t)$  和  $z_1(t)$  的单调性也由  $g_1$  与  $\frac{\omega_1}{r + \delta}$ 、 $g_2$  与  $\frac{\omega_2}{r + \delta}$  的大小关系所决定.

从激励第三方治理企业积极进入治理市场且进行治污技术研发的角度来考虑,政府部门可使得  $g_i \leq \frac{\omega_i}{r + \delta}$  ( $i = 1, 2$ ),以使得  $\pi$  能以较小的值满足式(59)和式(60)的条件要求. 命题得证.

**命题 3** 从理论上说明了合作博弈在消除虚假治理方面的优越性. 根据假设 5,排污企业委托治污的单位污染物支付成本为  $K_0 + \beta\theta_2(t)$ ,当第三方治理企业没有进行技术投入时( $\theta_2(t) = 0$ ),排污企业委托治污的单位污染物支付成本为  $K_0$ ,此时的委托治理和排污企业自行治理是等效的. 因而,在同等的政府激励等外部条件下,通过式(59)和式(60)的比较结果,可直观地看出非合作博弈中第三方治理企业更容易通过启动技术投入,使得  $\theta_2(t) > 0$  而诱导排污企业对污染物进行委托治理,并获取委托治理溢价( $K_0 + \beta\theta_2(t) > 0$ ),但第三方治理企业得到委托治污量后会通过虚假治理来抵消技术研发成本(式(61)所揭示),即从根本上说明了道德风险的固有存在性. 而合作博弈通过合作协议(转移支付)消除了第三方治理企业的虚假治理,因而第三方治理企业无需进行技术欺骗,故启动技术投入后,在污染物存量指标上将更优,同时式(50)~式(53)给定的满足子博弈一致性的得偿分配程序从理论上保证了双方合作的成功.

另外,假定第三方治理企业在是否进入治污市场方面有选择权,因而第三方治理企业会权衡政府部门的激励措施、排污企业的技术溢价等因

素来进一步决定初始投资值,即对应的  $\pi$  值以达成合作治污效果更优的结果,实现合作共赢.由此得到如下的命题4.

**命题4**  $\forall t \in [t_0, T]$ , 当  $F_0 P(\theta) = K_0$ ,  $\beta > \xi\gamma \left[ \frac{\omega_1}{r+\delta} + \left( g_1 - \frac{\omega_1}{r+\delta} \right) e^{(r+\delta)(t-T)} \right]$  (62)

时,第三方治理企业总可以确定恰当的初始投资值,即总存在恰当的  $\pi$  值以保证在治污效果方面合作博弈优于非合作博弈.

**证明** 由命题1和命题2可知

$$\Omega(t) - \Omega^c(t) = \xi \left\{ \frac{-\lambda_2 [K_0(\eta - \gamma) + \pi\gamma] C_1(t)}{[C_2(t)]^3} - \frac{[\pi\gamma + K_0(\beta + \eta - \gamma)] B_2(t)}{[B_1(t)]^3} \right\} - y_1(t) \tag{63}$$

将相应结果代入式(63)可得

$$\begin{aligned} \Omega(t) - \Omega^c(t) &= \frac{[B_1(t)]^3 + [C_2(t)]^3}{[B_1(t)]^3 [-C_2(t)]^3} \cdot \xi\gamma\lambda_2\pi^2 + \\ &\frac{\xi K_0}{[B_1(t)]^3 [-C_2(t)]^3} \left\{ [B_1(t)]^3 \left\{ (\eta - \gamma)\lambda_2 - \gamma[\lambda_2 - \lambda_2\xi z_1(t)] \right\} + [C_2(t)]^3 [(\beta + \eta - \gamma)\lambda_2 - \gamma D_0(t)] \right\} \pi - \\ &\frac{\xi K_0^2}{[B_1(t)]^3 [-C_2(t)]^3} \left\{ [B_1(t)]^3 \left\{ \lambda_2(\eta - \gamma)[1 - \xi z_1(t)] \right\} + [C_2(t)]^3 [(\beta + \eta - \gamma)D_0(t)] \right\} - y_1(t) \end{aligned} \tag{64}$$

这里,  $D_0(t) = \lambda_2 + (\beta + \eta)\beta\lambda_1 A_0^2 - (\lambda_2 + \beta\gamma\lambda_1 A_0^2)\xi y_1(t)$ .

故式(64)的右边可视为关于  $\pi$  的二次三项式  $\Phi(\pi)$ , 且  $\forall t \in [t_0, T]$ ,  $B_1(t)$ ,  $-C_2(t)$ ,  $D_0(t)$ ,  $-y_1(t) > 0$ , 因而当  $[B_1(t)]^3 + [C_2(t)]^3 > 0$ , 即

$$[\beta + \eta - \xi\gamma y_1(t)]^3 - [\eta - \xi\gamma z_1(t)]^3 > 0 \tag{65}$$

也即  $\beta + \xi\gamma x_1(t) > 0$  时, 也就是式(62)成立时,  $\Phi(\pi)$  可看作开口方向上的抛物线, 因而  $\pi$  总能取恰当的值既满足式(59)和式(60)要求, 且  $\Phi(\pi) > 0$  恒成立, 即保证  $\Omega(t) - \Omega^c(t) > 0$  恒成立, 因而在相同的随机条件下可保证

$$s^*(t) - s^{*c}(t) = \int_{t_0}^t [\Omega(u) - \Omega^c(u)] \times e^{-(\delta + \frac{\sigma^2}{2})(t-u) + \sigma[W(t) - W(u)]} du \geq 0 \tag{66}$$

即在治污效果方面, 合作博弈优于非合作博弈.

命题4说明, 当技术溢价因子  $\beta$ 、政府外部激励和监管满足一定条件时, 第三方治理企业总可以确定恰当的初始投资值和排污企业形成合作, 且取得较非合作更优的治污效果.

### 5.2 算例仿真

论文所构造的随机微分非合作与合作博弈模型均从数学理论上保证了解的存在性. 现在给定各相关参数的值, 给出具体数值算例和相关结果对比图.

令  $[t_0, T] = [0, 6]$ ,  $r = 0.05$ ,  $\alpha = 60$ ,  $F_0 = 10$ ,  $P(\theta) = 0.8$ ,  $F_1 = 12$ ,  $p = 0.1$ ,  $K_0 = 8$ ,  $\pi = 30$ ,  $\beta = 2.5$ ,  $\eta = 2.5$ ,  $\xi = 0.1$ ,  $\gamma = 0.25$ ,  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 16$ ,  $\sigma = 0.05$ ,  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 1$ ,  $g_1 = 2$ ,  $g_2 = 1$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $S_0 = 100$ ,  $\bar{S} = 300$ . 将相关参数代入到博弈模型解的解析式中, 用 Python 进行数值仿真, 可得到非合作和合作博弈的对比关系图, 其结果分述如下.

1) 排污企业的最优偷排策略对比关系如图1所示, 在非合作博弈中, 最优偷排量一直维持在较高水平, 且是关于时间的单调递增函数, 在  $[0, 6]$  内从初始的 20.83, 逐步增加到终值 22.89; 而在合作博弈中, 排污企业的最优偷排量随着时间的进展在逐步下降, 从初始的 17.80 下降至 1.70, 合作博弈在消除排污企业偷排方面具有明显优势.

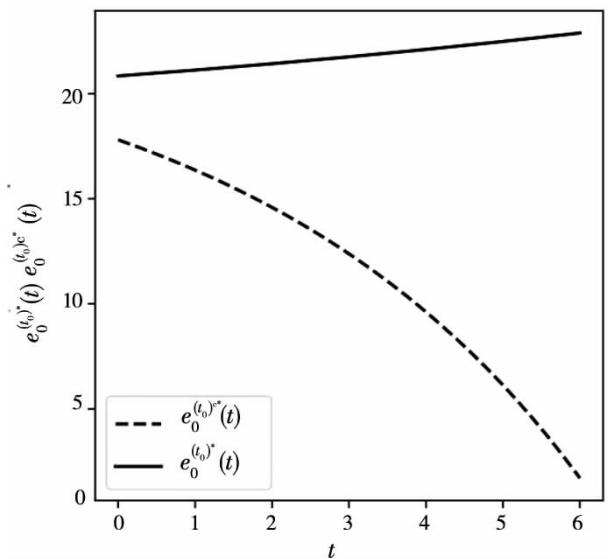


图1 排污企业偷排量对比

Fig. 1 Comparison of stealthy discharge of pollutant by the pollutant discharge enterprise

2) 图2表明在非合作博弈中, 虽然排污企

业的委托治理量在  $[0,6]$  内从 21.04 缓慢增加至 27.11, 但第三方治理企业的实际治理量仅从初始的 2.8 增至 5.14, 一直维持在一个较低的水平.

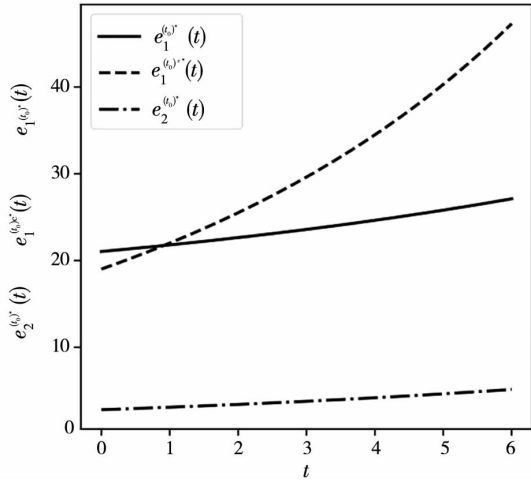


图2 排污企业污染物委托治理量与第三方治理企业实际治理量  
Fig.2 The amount of pollutants entrusted for treatment by the pollutant discharge enterprise and the amount of actual treatment pollutants by the environmental services enterprise

图3 则表明在非合作博弈中, 排污企业的监督努力程度从 7.30 增加至 8.79, 但即使如此, 也无法消除第三方治理企业的虚假治理. 同时, 第三方治理企业的最优技术投入程度也一直维持在一个较低的水平, 在整个时间区间内仅由 3.50 增至 4.22, 无显著变化. 在合作博弈中, 第三方治理企业无需虚假治理, 其实际治污量从初始的 19.02 上扬至终值 47.30, 且最优技术投入程度也由 3.42 上扬至 7.61, 整体治污效率和效果随着时间的进展在不断提升, 这一情况从污染物存量对比

中(图4)得到了充分体现. 在非合作博弈中, 污染物存量由初始的 100 迅速上扬至终值 302.04, 而在合作博弈中, 污染物存量增加得较为平缓, 且终值只有 149.59; 相应的期望值分别为 294.07 和 143.01, 表明合作博弈治污效果亦更优.

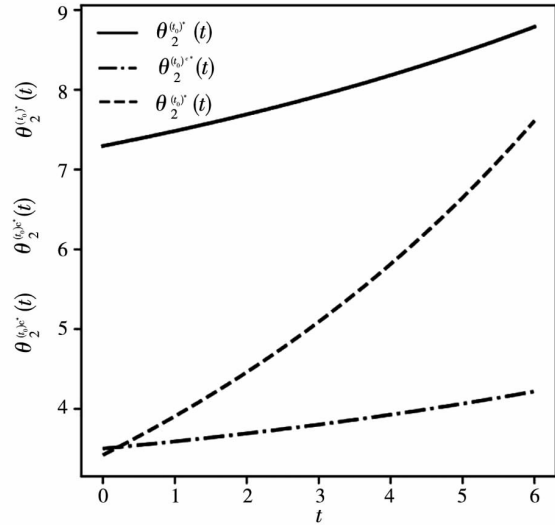


图3 排污企业监督努力程度与第三方治理企业技术投入程度  
Fig.3 Supervision efforts of the pollutant discharge enterprise and technology investment of environmental services enterprise

3) 根据式(52), 排污企业和第三方治理企业在合作博弈  $\Gamma^c(s_{t_0}^c, T - t_0)$  中的分配结果分别为 7 332.67 和 1 675.26, 而在非合作博弈  $\Gamma(s_{t_0}, T - t_0)$  中的期望收益分别为 5 208.73, 1 173.26, 合作期望收益结果更优. 其中, 排污企业和第三方治理企业在合作博弈中的协调转型补贴  $B^{[i]}(\tau)$ 、瞬时支付  $f_i^c(s^{c*}, \tau)$  和转移支付  $B^{[i]}(\tau) - f_i^c(s^{c*}, \tau)$  的部分结果如表 1 所示.

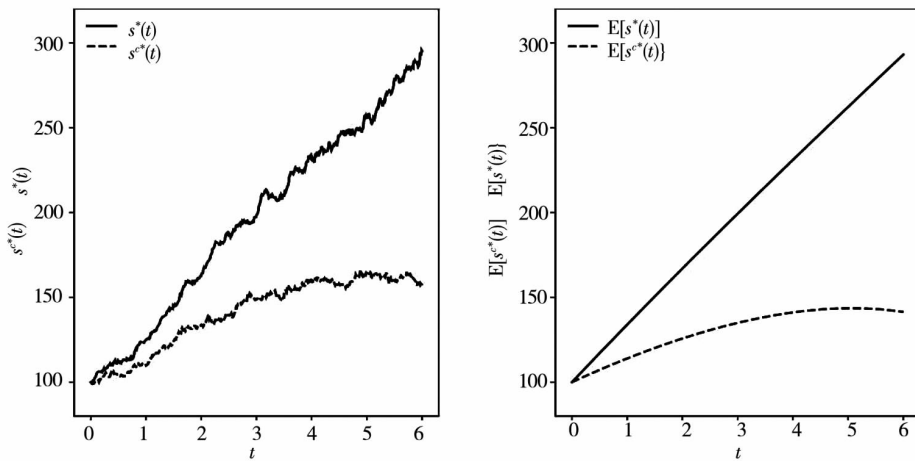


图4 非合作博弈与合作博弈污染物存量  
Fig.4 Comparison of pollutant stock of noncooperative game and cooperative game

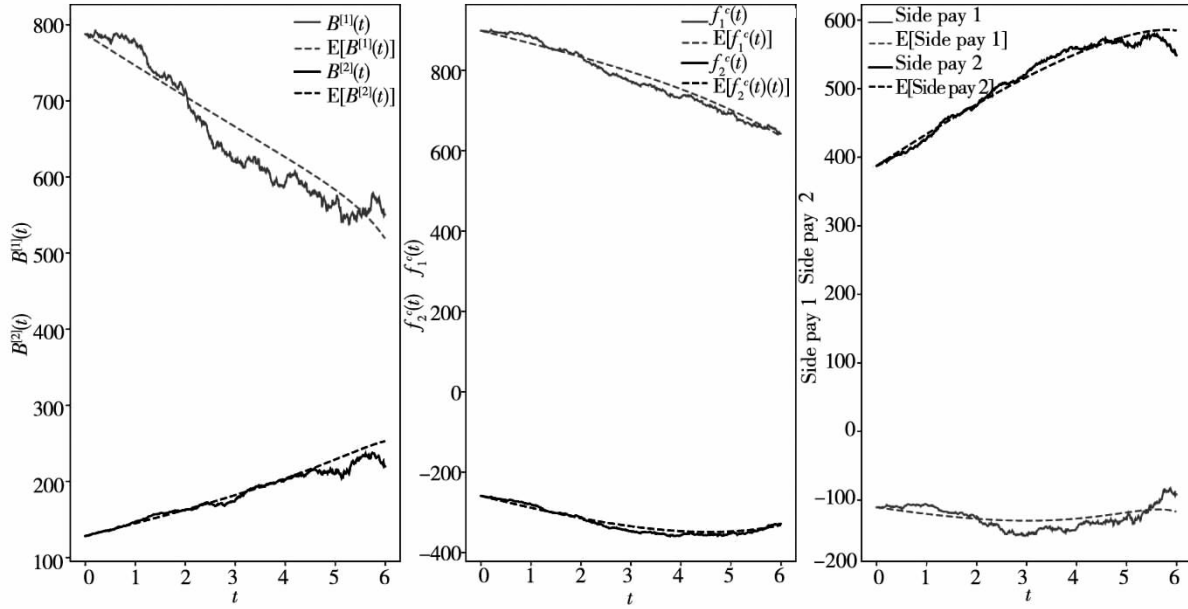


图 5 合作博弈中的协调转型补贴、瞬时支付和转移支付

Fig. 5 Coordination of transition subsidies, instantaneous payments and transfer payments in the cooperative game

表 1 协调转型补贴、瞬时支付和转移支付

Table 1 Coordination of transition subsidies, instantaneous payments and transfer payments

$t$	$B^{[1]}$	$B^{[2]}$	$f_1^c$	$f_2^c$	Side pay 1	Side pay 2
1	778.03	146.88	884.40	-279.95	-106.36	426.83
2	714.29	162.97	838.28	-312.07	-123.99	475.05
3	622.81	176.00	772.46	-346.69	-149.65	522.69
4	593.79	202.35	733.98	-356.64	-140.19	558.99
5	563.98	210.39	691.16	-352.64	-127.18	563.03

4) 技术溢价因子是关键参数,图 6 和图 7 反映了其变动对污染物存量的影响. 从图 6 可以看

出,技术溢价因子越高,非合作博弈中的污染物存量越高,这一点在污染物存量的期望值结果上体

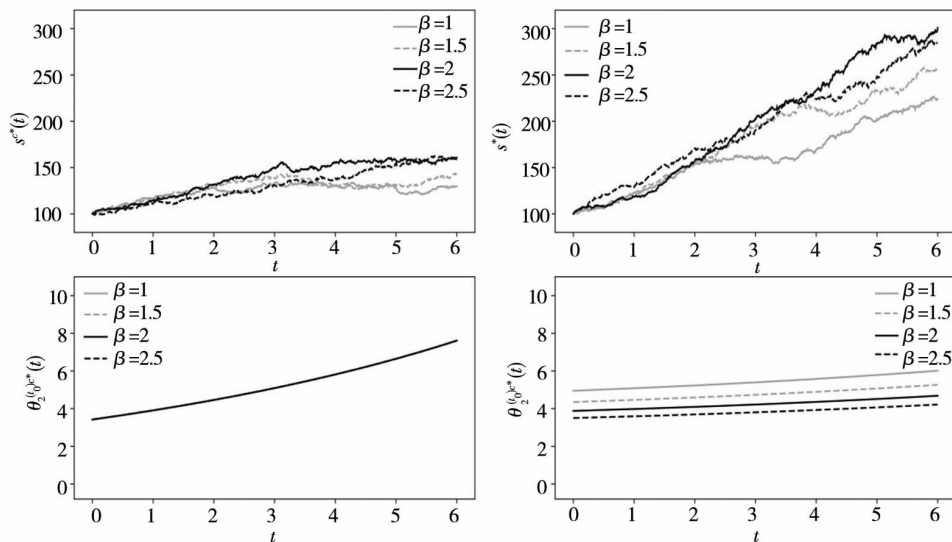
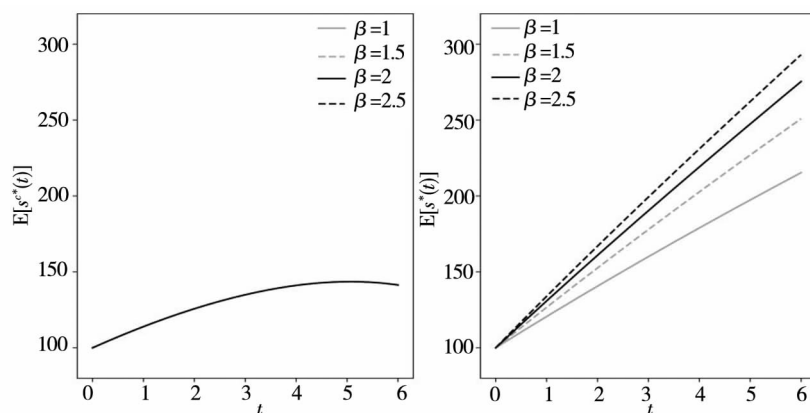


图 6 参数  $\beta$  对污染物存量的影响

Fig. 6 The effect of  $\beta$  on pollutant stock

图7 参数 $\beta$ 对第三方治理企业技术投入程度的影响Fig. 7 The effect of  $\beta$  on technology investment of the environmental services enterprise

现得尤为明显. 原因在于非合作博弈中 $\beta$ 越高, 第三方治理企业的技术投入程度反而越低, 这说明第三方治理企业在技术投入方面存在惰性, 因技术投入程度需要耗费较高的成本, 从收益最大化的角度来考虑, 第三方治理企业并非技术投入程度越高而收益越大. 而在合作博弈中, 污染物存量可维持在一个较低的水平, 且终值低于非合作博弈中对应的终值. 从污染物存量期望值结果来看, 合作博弈的结果与 $\beta$ 无关, 原因在于第三方治理企业的技术投入程度不受 $\beta$ 的直接影响. 且由命题4可知, 当满足式(62)条件、政府监管处于次优均衡时, 总可以取到恰当的值, 保证在治污效果上合作博弈总优于非合作博弈, 图6中的仿真结果恰好验证了这一点.

## 6 结束语

学者们运用博弈理论研究环境污染治理时, 通常将政府和排污企业作为研究主体, 较少引入第三方治理, 且在具体研究方法上多采用静态博弈或微分博弈. 但随机微分博弈考虑了现实中的诸多不确定性因素, 更加符合实际. 鉴于此, 论文运用随机微分博弈理论分别构造了地方政府外部激励下的排污企业和第三方治理企业之间的环境污染治理非合作 Stackelberg 博弈与合作博弈模型, 并运用 HJB 方程得到了相应的反馈纳什均衡策略显式解. 且在合作博弈模型中, 给出了满足子博弈时间一致性的得偿分配程序, 保证了双方在整个博弈时间区间内时时刻刻都会遵循最初锁定的最优共识原则而不偏离合作方案, 保证了合作

机制的可行性和有效性.

### 6.1 模型在突破第三方治理现实困境方面的作用

1) 在论文所构造的随机微分非合作 Stackelberg 博弈和合作博弈环境污染治理模型中, 委托治污定价以及各自收益均由排污企业和第三方治理企业相互博弈所确定, 政府不直接介入治污定价, 只需制定合理的外部激励措施(确定激励函数), 有利于治污价格向市场化定价模式演变;

2) 较之于非合作 Stackelberg 博弈, 合作博弈中满足子博弈时间一致性的合作支付分配机制保证在时时刻刻满足个体理性和集体理性的同时, 转移支付消除了第三方治理企业的虚假治理动机, 因而排污企业无需耗费监督成本, 从机制上消除了排污企业委托治污时对第三方治理企业的不信任问题;

3) 同样由于合作博弈中转移支付的存在, 由假设5和假设6, 第三方治理企业可以放心地进行技术研发投入并真实地治污, 在提高治污技术的同时降低单位治理成本, 使合作双方共同受益, 取得更好的治污效果和更高的收益, 既解决了道德风险问题, 又在一定程度上解决了信息不对称问题, 有利于促进环境污染第三方治理市场的良性发展.

### 6.2 研究结果对推行环境污染第三方治理的启示

1) 合作博弈能有效减少排污企业的偷排量, 但不能完全遏制其偷排. 杜绝排污企业的偷排, 需要地方政府从外部加强监管. 从长期来看, 合作博弈有利于第三方治理企业增加技术投入, 提高治

污效率和效果. 但为了消除第三方治理企业技术投入的惰性, 政府在提供激励的同时, 还应该充分引入竞争, 比如引进多家第三方治理企业同时参与博弈, 以促进第三方治理市场的良性发展.

2) 政府监管需在成本和效果方面权衡, 其监管的次优均衡为  $F_0 P(\theta) = K_0$ . 政府的激励函数与  $g_i (i = 1, 2)$ 、 $\bar{S}$  相关, 政府部门制定激励措施的关键在于权衡  $g_1$  与  $\frac{\omega_1}{r + \delta}$ 、 $g_2$  与  $\frac{\omega_2}{r + \delta}$  的大小关系,  $g_i$  的值并非越大越好, 从激励第三方治理企业积极进入治理市场且进行治污技术研发的角度来考虑, 政府部门可使得  $g_i \leq \frac{\omega_i}{r + \delta} (i = 1, 2)$ , 降低第三方治理企业的初始投资 (对应于  $\pi$ ) 风险, 吸引第三方治理企业积极进入治理市场.

3) 排污企业吸引第三方治理企业接受委托治理的关键在于技术溢价因子  $\beta$ , 但  $\beta$  并非越大越好, 太大会使第三方治理企业在技术研发方面产生惰性. 在计划周期  $[t_0, T]$  内, 排污企业只要保证  $\beta > \xi \gamma \left[ \frac{\omega_1}{r + \delta} + \left( g_1 - \frac{\omega_1}{r + \delta} \right) e^{(r + \delta)(t - T)} \right]$ , 且政府处于次优监管均衡时, 第三方治理企业就能

够确定恰当的初始投资水平保证在治污效果上合作博弈优于非合作博弈.

4) 第三方治理企业是否接受委托治理的关键在于权衡初始投资的风险 (对应于可接受的  $\pi$ , 使得  $\pi$  满足启动技术研发条件 (59)、式 (60) 的要求). 在非合作博弈中, 第三方治理企业的虚假治理是固有存在的, 道德风险不可消除; 在合作博弈中, 由于转移支付的存在, 第三治理无需虚假治理, 而技术溢价因子  $\beta$  关系着转移支付结果, 排污企业和第三治理企业博弈的关键在于分别确定  $\beta$  和  $\pi$  以实现治污效果和期望收益方面的合作共赢.

### 6.3 研究展望

论文所讨论的是排污企业面对一家第三方治理企业的问题, 未来可以引入更多的博弈参与方, 比如有多家第三方治理企业参与竞争、多个排污企业同时并存的问题, 从而讨论多主体的非合作与合作博弈问题. 另外, 所讨论的随机微分博弈模型中, 维纳过程考虑的是一维情形, 事实上现实中的随机因素多种多样, 亦可以考虑多维情况. 当然, 更一般的情形意味着其数学复杂度更高, 需要进行权衡取舍.

### 参考文献:

- [1] 常 杪, 杨 亮, 王世汶. 环境污染第三方治理的应用与面临的挑战[J]. 环境保护, 2014, 42(20): 20 - 22.  
Chang Miao, Yang Liang, Wang Shiwen. Application of third-party management on environmental pollution and its challenges[J]. Environmental Protection, 2014, 42(20): 20 - 22. (in Chinese)
- [2] 中国循环经济. “环保部发布《关于推进环境污染第三方治理的实施意见》(附解读)” [EB/OL]. [http://www.sohu.com/a/169014987\\_774581](http://www.sohu.com/a/169014987_774581).  
China's circular economy. Ministry of Environmental Protection Issues Implementation Opinions on Promoting Third-party Treatment of Environmental Pollution (the interpretation is attached) [EB/OL]. [http://www.sohu.com/a/169014987\\_774581](http://www.sohu.com/a/169014987_774581). (in Chinese)
- [3] 张国兴, 张振华, 管 欣, 等. 我国节能减排政策的措施与目标协同有效吗? ——基于 1 052 条节能减排政策的研究[J]. 管理科学学报, 2017, 20(3): 161 - 181.  
Zhang Guoxing, Zhang Zhenhua, Guan Xin, et al. Is the synergy between measures and objectives of energy conservation and emission reduction policies in China effective? Research on 1 052 energy conservation and emission reduction policies [J]. Journal of Management Sciences in China, 2017, 20(3): 161 - 181. (in Chinese)
- [4] 唐登莉, 李 力, 洪雪飞. 能源消费对中国雾霾污染的空间溢出效应 ——基于静态与动态空间面板数据模型的实证研究[J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(7): 1697 - 1708.  
Tang Dengli, Li Li, Hong Xuefei. The spatial spillover effect of energy consumption on haze pollution in China: An empirical research based on the static and dynamic spatial panel data model [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2017, 37(7): 1697 - 1708. (in Chinese)
- [5] 周林意, 朱德米. 地方政府税收竞争、邻近效应与环境污染[J]. 中国人口·资源与环境, 2018, 28(6): 143 - 151.  
Zhou Linyi, Zhu Demi. Local tax competition, neighborhood effects and environmental pollution [J]. China Population Resources and Environment, 2018, 28(6): 143 - 151. (in Chinese)
- [6] 杨子晖, 陈里璇, 罗 彤. 边际减排成本与区域差异性研究[J]. 管理科学学报, 2019, 22(2): 1 - 21.



- Yang Zihui, Chen Lixuan, Luo Tong. Marginal cost of emission reduction and regional differences[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2019, 22(2): 1–21. (in Chinese)
- [7] 张国兴, 叶亚琼, 管欣, 等. 京津冀节能减排政策措施的差异与协同研究[J]. *管理科学学报*, 2018, 21(5): 111–126.
- Zhang Guoxing, Ye Yaqiong, Guan Xin, et al. Difference and collaboration in Jing-Jin-Ji's energy saving and emission reduction policy measures[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2018, 21(5): 111–126. (in Chinese)
- [8] De Frutos J, Martín-Herrón G. Spatial vs. non-spatial transboundary pollution control in a class of cooperative and non-cooperative dynamic games[J]. *European Journal of Operational Research*, 2019, 276(1): 379–394.
- [9] De Frutos J, Martín-Herrón G. Spatial effects and strategic behavior in a multiregional transboundary pollution dynamic game[J]. *Journal of Environmental Economics and Management*, 2019, 97: 182–207.
- [10] 龚本刚, 程晋石, 程明宝, 等. 考虑再制造的报废汽车回收拆解合作决策研究[J]. *管理科学学报*, 2019, 22(2): 82–96.
- Gong Bengang, Cheng Jinshi, Cheng Mingbao, et al. Decision-makings for collection and dismantling of discarded automobiles considering remanufacturing[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2019, 22(2): 82–96. (in Chinese)
- [11] 胡志强, 祝文达, 陈赛飞. 企业 IPO 对同行业上市公司的影响: 竞争效应还是信息溢出效应? ——基于动态产品市场竞争的微分博弈模型与实证研究[J]. *管理科学学报*, 2019, 22(6): 57–72.
- Hu Zhiqiang, Zhu Wenda, Chen Saifei. Competition effect or information spillover effect of IPO on peer listed firms: A differential game model and empirical study based on dynamic product market competition[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2019, 22(6): 57–72. (in Chinese)
- [12] 周忠宝, 任甜甜, 肖和录, 等. 资产收益序列相依下的多阶段投资博弈模型[J]. *管理科学学报*, 2019, 22(7): 66–88.
- Zhou Zhongbao, Ren Tiantian, Xiao Helu, et al. Multi-period portfolio game model with serially correlated returns[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2019, 22(7): 66–88. (in Chinese)
- [13] Fernandez L. Trade's dynamic solutions to transboundary pollution[J]. *Journal of Environmental Economics & Management*, 2002, 43(3): 386–411.
- [14] Yeung D W K. Dynamically consistent cooperative solution in a differential game of transboundary industrial pollution[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2007, 134(1): 143–160.
- [15] Yeung D W K, Petrosyan L A. A cooperative stochastic differential game of transboundary industrial pollution[J]. *Automatica*, 2008, 44(6): 1532–1544.
- [16] 胡震云, 陈晨, 王慧敏, 等. 水污染治理的微分博弈及策略研究[J]. *中国人口·资源与环境*, 2014, 24(5): 93–101.
- Hu Zhenyun, Chen Chen, Wang Huimin, et al. Study on the differential game and strategy of water pollution control[J]. *China Population Resources and Environment*, 2014, 24(5): 93–101. (in Chinese)
- [17] Li S. A differential game of transboundary industrial pollution with emission permits trading[J]. *Journal of Optimization Theory & Applications*, 2014, 163(2): 642–659.
- [18] 刘升学, 易永锡, 李寿德. 排污权交易条件下的跨界污染控制微分博弈分析[J]. *系统管理学报*, 2017, 26(2): 319–325.
- Liu Shengxue, Yi Yongxi, Li Shoude. A differential game for transboundary pollution control under emission permits trading[J]. *Journal of Systems & Management*, 2017, 26(2): 319–325. (in Chinese)
- [19] 赖苹, 曹国华, 朱勇. 基于微分博弈的流域水污染治理区域联盟研究[J]. *系统管理学报*, 2013, 22(3): 309–316.
- Lai Ping, Cao Guohua, Zhu Yong. Study on regional coalition of watershed water pollution abatement based on differential games[J]. *Journal of Systems & Management*, 2013, 22(3): 309–316.
- [20] 姜珂, 游达明. 基于区域生态补偿的跨界污染治理微分对策研究[J]. *中国人口·资源与环境*, 2019, 29(1): 138–146.
- Jiang Ke, You Daming. Study on differential game of transboundary pollution control under regional ecological compensation[J]. *China Population Resources and Environment*, 2019, 29(1): 138–146. (in Chinese)
- [21] 任卓冉. 环境污染第三方治理的困境及法制完善[J]. *中州学刊*, 2016, (12): 49–54.
- Ren Zhuoran. The difficulties and legal countermeasures of environmental pollution governed by a third party[J]. *Academic Journal of Zhongzhou*, 2016, (12): 49–54. (in Chinese)
- [22] 骆建华. 环境污染第三方治理的发展及完善建议[J]. *环境保护*, 2014, 42(20): 15–19.
- Luo Jianhua. Proposal on the development and improvement of third-party management over environmental Pollution[J]. *Environmental Protection*, 2014, 42(20): 15–19. (in Chinese)
- [23] 方芳, 杨岚, 周亚虹. 环境规制, 企业演化与城市制造业生产率[J]. *管理科学学报*, 2020, 23(4): 22–37.

- Fang Fang, Yang Lan, Zhou Yahong. Environmental regulation, firm dynamics and city manufacturing productivity[J]. Journal of Management Sciences in China, 2020, 23(4): 22–37. (in Chinese)
- [24] 王 云, 李延喜, 马 壮, 等. 环境行政处罚能以儆效尤吗? ——同伴影响视角下环境规制的威慑效应研究[J]. 管理科学学报, 2020, 23(1): 77–95.
- Wang Yun, Li Yanxi, Ma Zhuang, et al. Can the penalty for environmental violation act as a deterrent to peers? The evidence from the peer effect of environmental regulation[J]. Journal of Management Sciences in China, 2020, 23(1): 77–95. (in Chinese)
- [25] 刘 超. 管制、互动与环境污染第三方治理[J]. 中国人口·资源与环境, 2015, 25(2): 96–104.
- Liu Chao. Regulation, interaction and environmental pollution control by a third party[J]. China Population Resources and Environment, 2015, 25(2): 96–104. (in Chinese)
- [26] Yeung D W K, Petrosyan L A. Subgame consistent cooperative solutions in stochastic differential games[J]. Journal of Optimization Theory & Applications, 2004, 120(3): 651–666.
- [27] Yeung D W K, Petrosyan L. Dynamically stable corporate joint ventures[J]. Automatica, 2006, 42(3): 365–370.
- [28] Jørgensen S, Martín-Herrón G, Zaccour G. Dynamic games in the economics and management of pollution[J]. Environmental Modeling & Assessment, 2010, 15(6): 433–467.
- [29] Breton M, Fredj K, Zaccour G. Characteristic functions, coalitions stability and free-riding in a game of pollution control [J]. The Manchester School, 2006, 74(1): 103–122.
- [30] Jørgensen S, Zaccour G. Incentive equilibrium strategies and welfare allocation in a dynamic game of pollution control[J]. Automatica, 2001, 37(1): 29–36.
- [31] Basar T, Olsder G J. Dynamic Noncooperative Game Theory[M]. San Diego: Academic Press, 1995.
- [32] Øksendal B. Stochastic Differential Equations[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.

## A stochastic differential cooperative game based on the third-party governance of environmental pollution

ZHENG Jun-jun<sup>1</sup>, DONG Jin-hui<sup>2, 1\*</sup>, REN Tian-yu<sup>1</sup>

1. School of Economics and Management, Wuhan University, Wuhan 430072, China;

2. College of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang 438000, China

**Abstract:** In the implementation of environmental pollution control by a third party in China, realistic difficulties are existent between local governments, the pollutant discharge enterprises and the environmental services enterprises (the third-party). To tackle this predicament, this paper builds a stochastic differential noncooperative Stackelberg game model and a stochastic differential cooperative game model between the pollutant discharge enterprise and environmental services enterprise in the two cases of local government external supervision and incentive respectively. The feedback Nash equilibrium solutions and the cooperative payment distribution mechanisms with subgame consistency corresponding to the respective models are also given. The results show that, compared with the noncooperative game model, the cooperative model can not only effectively reduce the stealthy discharge of pollutants from the pollutant discharge enterprise, but also eliminate the false governance of environmental services enterprise, thus delivering better pollution control results. Therefore, the government sectors may guide the environmental services enterprises to actively participate in the pollution control market and to carry out research and development in pollution control technologies by taking a balanced supervision together with specific incentive measures; the pollutant discharge enterprises may determine an appropriate technology premium factor while the environmental services enterprises may define a reasonable initial investment to achieve a win-win cooperation in pollution control effect and expected payoff. The numerical simulation has verified the feasibility and effectiveness of the cooperative game, and the relevant research results can provide decision-making basis for constructing the mechanism for third-party governance of environmental pollution.

**Key words:** third-party governance of environmental pollution; cooperative stochastic differential game; feedback Nash equilibrium; subgame consistency