

doi:10.19920/j.cnki.jmsc.2022.06.002

国际溢出、国内基本面与期权定价^①

潘志远^{1,2}, 刘莉^{3*}, 刘子锐¹

(1. 西南财经大学中国金融研究院, 成都 610074; 2. 西南财经大学金融安全协同创新中心, 成都 610074; 3. 南京审计大学金融学院, 南京 211815)

摘要: 构建了一个具有主导市场和追随市场的两市场综合模型 (SpillMacro-GARCH), 它允许主导市场对追随市场存在溢出效应和两个市场的波动均受本国基本面因素的影响. 此外, 在 Radon-Nikodym 导数为非单调假设条件下推导出新模型的欧式期权的封闭解价格, 该研究框架适用于新兴市场的期权定价. 实证结果显示: 基于上证 50ETF 期权数据和隐含波动率均方根误差 (IVRMSE) 的评价标准, 且在其它条件保持相同的情况下, 考虑国际溢出效应可以降低期权定价误差约 14.5%; 增加宏观基本面因素的定价模型比传统 HN-GARCH 模型和滚动窗 (RollWin) 方法的期权定价误差分别下降 7.9% 和 24.0%; 同时还发现非单调的定价核能够显著地提高期权定价精度. 以上结论对不同的定价效率评价标准、不同的宏观基本面代理变量、不同的研究样本区间和样本外定价分析等均是稳健的.

关键词: 溢出效应; 宏观经济基本面; 非单调定价核; 期权定价

中图分类号: F830 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2022)06-0022-25

0 引言

期权衍生产品的定价一直是金融学领域的核心研究热点之一, 并在最近几十年里取得了丰硕的科研成果^[1-11]. 然而, 我国期权衍生品市场起步较晚, 上海证券交易所于 2015 年 2 月 9 日首次发行 50ETF 欧式期权, 才正式标志着我国进入了期权时代. 可见, 构建一个适应我国期权市场特点的期权定价模型就显得尤为迫切和重要.

期权是一种或有求偿权 (contingent claim) 产品. 它的到期支付依赖于标的资产在到期时的价格. 容易看出, 标的物的驱动过程在期权定价中扮演着十分重要角色. 现在主流文献对标的物驱动过程的设定可以被归纳为两类: 一类是连续时间 (continuous-time) 模型方法, 如 Black-Scholes 模型^[1], Heston 随机波动率模型^[8] 和 Lévy 随机波动率

模型^[12, 13]等; 另一类是离散时间 (discrete-time) 模型方法, 如 Duan 提出的 GARCH 期权定价模型^[6], 并被随后的众多研究者所拓展^[2, 4, 5, 7, 9, 11]. 连续时间方法和离散时间方法各有利弊, 更加深入的讨论可以参考 Christoffersen 等^[14]. 这里选择 GARCH 类离散时间方法构建期权定价模型. 原因在于: GARCH 类模型不涉及潜变量 (latent variable), 方便计算; 学界对 GARCH 类模型的研究趋于成熟, 并证明了 GARCH 类模型能够很好地刻画标的资产的波动集聚和杠杆效应等典型市场特征^[15, 16]; 以及 GARCH 类模型具有足够的灵活性, 可以考虑其它因素对波动率的影响, 如宏观因素的混频 GARCH 模型^[17].

国内学者已从不同的视角研究上证 50ETF 期权, 并取得了有益的成果. 吴鑫育等^[18] 基于非

① 收稿日期: 2019-10-03; 修订日期: 2020-07-22.

基金项目: 国家社会科学基金资助项目 (21XJY007); 国家自然科学基金资助项目 (71601161; 71771124); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目 (JBK2202005).

通讯作者: 刘莉 (1984—), 女, 安徽利辛人, 博士, 副教授. Email: liuli840821@nau.edu.cn

仿射随机波动率模型并在考虑微观结构噪声影响下研究期权定价问题;孙有发等^[19]在期权定价时引入股灾因素;吴鑫育等^[20]把传统的常风险厌恶系数随机波动率模型拓展到具有时变风险厌恶特征,然后研究新模型的期权定价;王西梅等^[21]则采用局部波动率模型实证研究期权定价问题.与传统的期权定价模型相比,以上的研究结果均显示新模型能够提高上证 50ETF 期权的定价精度.需要指出的是他们的模型属于连续时间理论范畴,而正如前文提到,这里的理论模型是建立在离散时间基础上.

更具体地,不同于已有的中外文献,这里构建了一个两市场综合模型:主导市场(dominant market)和追随市场(following market).构建该综合模型主要是基于前期的研究发现:Rapach等^[22]从收益率预测视角发现滞后的美国收益率能够显著预测其它主要工业国家的收益率,反之,这些工业国家的滞后收益率对美国仅具有有限的预测能力;Wang等^[23]则从波动率预测角度发现美国股票市场对其余5个工业国家存在波动溢出,考虑了美国因素后可以提高这些工业国家股票波动率的预测能力.容易看出,溢出效应存在于国际股票市场之间,其中又以美国市场为主导地位.进一步,涉及到中国股票市场方面,何德旭和苗文龙^[24]利用DCC-GARCH等模型实证研究了1993年1月~2013年12月期间国际金融市场的波动溢出情况,他们发现主要工业国家的股指波动率对中国股指波动率具有很强的溢出效应,且该效应在2008年金融危机后变强.汪冬华和张裕恒^[25]则利用Hawkes过程分析中国和美国股市的互激效应.基于2006年~2017年的CSI300和S&P 500数据,他们发现中国和美国股票市场的波动互激效应具有不对称性,即美国市场对中国市场的冲击效应更强.为此,这里构建一个非对称的综合模型,设计一种允许主导市场对追随市场产生冲击的传递机制,以期能够刻画国际金融市场间存在的溢出效应.

另外,还在综合模型中引入宏观基本面因素.Schwert^[26]研究发现商业周期对股票市场的波动率具有显著的影响.Engle等^[17]基于GARCH框架构建了一个能够包含宏观基本面因素的混频波动率模型(GARCH-MIDAS),如国内生产总值和

通胀率等.实证结果表明,GARCH-MIDAS模型可以显著提高波动率的预测精度.Dorion^[5]则把GARCH-MIDAS框架拓展到期权定价领域,构建一个包含宏观变量的期权定价模型(Macro-GARCH),实证结果显示可以获得更加精确的定价效果.受此启发,这里在构建期权定价模型的时候,融合了国际市场间的溢出效应和国内基本面因素,以期进一步提升期权定价能力.值得一提的是,Dorion^[5]是采用Monte Carlo模拟方式获得期权价格,而新提出的模型获得期权价格的封闭解(closed-form solution),避免了耗时的Monte Carlo方法且能提高定价精度.

最后,把新模型运用到上证50ETF期权的定价研究.实证结果显示:1)基于IVRMSE损失准则,在其它条件相同情况下,允许存在溢出效应的两市场综合模型SpillMacro-GARCH(NonMPK)比单一市场模型Macro-GARCH(NonMPK)的定价误差降低14.5%,这说明考虑溢出效应可以有效提高期权定价的精度;2)考虑宏观基本面因素的Macro-GARCH(MPK)比传统的HN-GARCH(MPK)和RollWin(MPK)的定价误差分别降低7.9%和24.0%.这与Dorion^[5]的研究结果相近,他发现宏观因素能够降低期权定价误差约18%;3)还发现非单调定价核比单调的定价核获得更高的定价精度.这可能是由于估计非单调定价核模型时候,引入了期权数据从而获得更大的杠杠效应值,进而提高期权定价精度^[2,9,10].以上实证结论不因评价标准、宏观基本面的代理变量、样本数据区间和样本外分析的改变而改变,因此结论是稳健的.

1 客观测度(\mathbb{P})下的模型设定

假设一个主导市场(dominant market)在低频时期 t 中(如第 t 月)的某一天 i 资产价格为 $S_{d,i,t}$,其波动过程只受本国自身的宏观基本面影响,设定如下

$$\begin{aligned} R_{d,i+1,t} &\equiv \ln\left(\frac{S_{d,i+1,t}}{S_{d,i,t}}\right) \\ &= r_d + \left(\lambda_d - \frac{1}{2}\right)h_{d,i+1,t} + z_{d,i+1,t} \\ &= r_d + \left(\lambda_d - \frac{1}{2}\right)h_{d,i+1,t} + \sqrt{h_{d,i+1,t}}\varepsilon_{d,i+1,t} \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, N_t \quad (1)$$

其中 r_d 表示主导市场的无风险利率, 参数 λ_d 度量波动率的市场风险价格, N_t 表示在 t 期(如月)内有 N_t 个交易日, 误差项 $\varepsilon_{d,i+1,t}$ 则服从序列不相关的标准正态分布 $N(0,1)$ ^②. 为了获得期权定价的封闭解, 条件波动过程 $h_{d,i+1,t}$ 设为仿射 (affine) 结构

$$h_{d,i+1,t} = \tau_{d,t} + \beta_d h_{d,i,t} + \frac{\alpha_d}{h_{d,i,t}} (z_{d,i,t} - \gamma_d h_{d,i,t})^2 \quad (2)$$

$$\tau_{d,t} = \left(m_d + \theta_d \sum_{k=1}^{K_d} \varphi_k(\omega_d) X_{d,t-k} \right)^2 \quad (3)$$

其中 $X_{d,t}$ 表示反映该国宏观基本面的低频率经济变量, 如生产价格指数 PPI(月度)或采购经理指数 PMI(月度)等. $\varphi_k(\omega_d)$ 是权重函数, 满足 $\sum_{k=1}^{K_d} \varphi_k(\omega_d) = 1$ ^③, 它的表达形式在后文式(8)给出. 增加宏观变量可以提高波动率的预测能力^[17, 26, 28]; $\beta'_d = \beta_d + \alpha_d \gamma_d^2$ 则表示方差的持续性 (persistence). 为了保持模型的平稳性, 需要对参数进行约束: $|\beta'_d| < 1$; 参数 γ_d 刻画市场的杠杆效应 (leverage effect)^[29], 即波动率对正负冲击反应的不对称性, $\gamma_d > 0$ 表示资产收益率和方差之间的负向关系. 允许模型中存在杠杆结构可以提高虚值期权的定价能力^[2, 9, 10]. 为确保波动过程有意义 ($h_{d,i+1,t} > 0$), 在估计时还施加了如下条件: $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 和 $\tau_{d,t}$ 取平方. 需要指出的是, 这里的宏观变量并没有严格采用 GARCH-MIDAS 模型中相乘形式, 主要原因是方便后面期权价格的推导. 相加的形式也常见于期权定价文献中, 如 Dorion^[5] 采用相加形式分析宏观变量对期权定价的影响; Christoffersen 等^[30] 也采用相加形式区分长期和短期波动对期权定价的影响. 因此, 区别于 GARCH-MIDAS 模型, 这里把式(1)~式(3)设定的模型记为 Macro-GARCH 模型.

接着, 还假设存在一个追随市场 (following market), 在 t 期内某天 i 的资产价格记为 $S_{f,i,t}$. 它

主要受两方面因素影响: 主导市场价格 ($S_{d,i,t}$) 的溢出冲击和国内经济基本面的影响. 为此, 模型形式设定为

$$\begin{aligned} R_{f,i+1,t} &\equiv \ln \left(\frac{S_{f,i+1,t}}{S_{f,i,t}} \right) \\ &= E_{i,t} [R_{f,i+1,t}] + \kappa_f z_{d,i+1,t} + z_{f,i+1,t} \\ &= E_{i,t} [R_{f,i+1,t}] + \kappa_f \sqrt{h_{d,i+1,t}} \varepsilon_{d,i+1,t} + \sqrt{h_{f,i+1,t}} \varepsilon_{f,i+1,t} \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $E_{i,t}[\cdot] = E[\cdot | \mathcal{F}_{i,t}]$, $\mathcal{F}_{i,t}$ 表示在 t 期的第 i 天能够获得的所有信息; $z_{d,i+1,t}$ 度量由主导市场冲击所引发的收益率变化风险; $z_{f,i+1,t}$ 则捕捉追随市场自身经济基本面的冲击; 误差项 $\varepsilon_{f,i+1,t}$ 服从序列不相关的标准正态分布 $N(0,1)$, 并与 $\varepsilon_{d,i+1,t}$ 不相关, 即 $\text{corr}(\varepsilon_{d,i+1,t}, \varepsilon_{f,i+1,t}) = 0$. 与期权定价模型的文献^[3, 11]一致, 期望收益率 $E_{i,t}[R_{f,i+1,t}]$ 需要满足以下的约束条件

$$\begin{aligned} E_{i,t} [\exp(R_{f,i+1,t})] &= \exp(r_f + \tilde{\lambda}_d h_{d,i+1,t} + \lambda_f h_{f,i+1,t}) \end{aligned} \quad (5)$$

其中 r_f 是追随市场的无风险利率, $\tilde{\lambda}_d$ 和 λ_f 可以分别解释为对主导市场和自身市场的风险暴露补偿. 基于约束(5), 容易得到

$$\begin{aligned} E_{i,t} [R_{f,i+1,t}] &= r_f + (\tilde{\lambda}_d - \frac{\kappa_f^2}{2}) h_{d,i+1,t} + (\lambda_f - \frac{1}{2}) h_{f,i+1,t} \end{aligned} \quad (6)$$

对于追随市场的波动过程, 假设它同时受到了主导市场的波动溢出冲击和本国宏观基本面因素影响, 即

$$\begin{aligned} h_{f,i+1,t} &= \tau_{f,t} + \beta_f h_{f,i,t} + \kappa_{hf} h_{d,i,t} + \frac{\alpha_f}{h_{f,i,t}} (z_{f,i,t} - \gamma_f h_{f,i,t})^2 \\ \tau_{f,t} &= \left(m_f + \theta_f \sum_{k=1}^{K_f} \varphi_k(\omega_f) X_{f,t-k} \right)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

其中系数 κ_{hf} 衡量主导市场对追随市场的波动溢出效应; $X_{f,t}$ 表示本国宏观经济数据, 并假设与随机变量 $\varepsilon_{d,i+1,t}$ 和 $\varepsilon_{f,i+1,t}$ 均不相关的外生变量,

② Christoffersen 等^[27] 研究发现非正态假定 (如广义误差分布) 在拟合收益率数据方面存在优势, 但在期权估值时候表现却很糟糕. 另一方面, 非正态假定不易获得期权定价的封闭解, 而采用 Monte Carlo 模拟会耗时且增加定价误差. 故选取常用的正态性假设.

③ 该约束使得模型的参数可识别, 详见 Engle 等^[17] 的讨论.

Dorion^[5]也做了相似的假定. 和主导市场一样, 也对参数做如下约束: $\beta'_f \equiv \beta_f + \alpha_f \gamma_f^2 < 1$, $\alpha_f > 0$, $\beta_f > 0$, $\sum_{k=1}^{K_f} \varphi_k(\omega_f) = 1$ 和 $\tau_{f,t}$ 取平方.

另外, 两个市场中出现的函数 $\varphi_k(\omega_j)$ 起着加权的 (weighting) 作用, 参数 ω_j 控制着过去观测值被丢弃的速率, 其值越大意味着过去的观测值会很快被丢弃. 具体的表达式如下

$$\varphi_k(\omega_j) = \frac{(1 - k/(K_j + 1))^{\omega_j - 1}}{\sum_{l=1}^{K_j} (1 - l/(K_j + 1))^{\omega_j - 1}}, j \in \{d, f\} \quad (8)$$

其中 $K_j, j \in \{d, f\}$ 表示滞后阶数. 在实证分析中, 通过先给定的一些正整数, 然后选取对数似然值相对较大时所对应的整数作为滞后阶数, 即概述对数似然函数值 (profile the log likelihood function) 方法选择滞后阶数.

至此, 一个主导市场和追随市场新的综合模型已经被构建, 并指出了主导市场影响追随市场的传导机制. 需要说明的是: 新模型框架具有很强的灵活性和综合性. 它嵌套了期权定价的一些经典模型, 具体表现为: 当国际溢出通道关闭时, 即参数 $\kappa_f = \kappa_{hf} = 0$, 则退化为不受其它市场溢出影响的 Marco-GARCH 模型^[5]; 在此基础上, 若进一

步不考虑宏观因素的影响, 即参数 $\kappa_f = \kappa_{hf} = \theta_f = 0$ 时, 则退化为既不受其它市场影响也不受宏观变量影响的 HN-GARCH 模型^[9]. 为了表述方便, 这里把结合了溢出 (spillover) 效应和宏观 (macro) 基本面因素的综合模型称为 SpillMacro-GARCH 模型.

2 风险中性测度 (Q) 下的模型形式与期权定价

在这一节中, 在非单调定价核假设下把客观测度 (P) 的模型表达形式转换为风险中性测度 (Q) 下的表示形式, 然后推导出 SpillMacro-GARCH 模型的封闭期权定价公式.

2.1 等价鞅测度

Christoffersen 等^[31]提出了一个方差依赖的非单调定价核 (variance-dependent nonmonotonic pricing kernel) 的期权定价理论框架, 该框架能够有效地解释如“定价核之谜” (pricing kernel puzzle) 等期权定价异象 (anomalies). Babaoğlu 等^[32]实证表明了采用非单调定价核可以改善期权拟合效果的 17% 左右. 基于这些发现, 假设 Radon-Nikodym 导数为非单调的

$$Z_{i+1,t} \equiv \frac{\frac{d \mathbb{Q}}{d \mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_{i+1,t}}}{\frac{d \mathbb{Q}}{d \mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_{i,t}}} = \frac{\exp(v_{2,d,i+1,t} z_{d,i+1,t}^2 + v_{1,d,i+1,t} z_{d,i+1,t} + v_{2,f,i+1,t} z_{f,i+1,t}^2 + v_{1,f,i+1,t} z_{f,i+1,t})}{E_{i,t}[\exp(v_{2,d,i+1,t} z_{d,i+1,t}^2 + v_{1,d,i+1,t} z_{d,i+1,t} + v_{2,f,i+1,t} z_{f,i+1,t}^2 + v_{1,f,i+1,t} z_{f,i+1,t})]} \quad (9)$$

其中参数 $v_{2,d,i+1,t}, v_{1,d,i+1,t}, v_{2,f,i+1,t}$ 和 $v_{1,f,i+1,t}$ 是连接客观测度与风险中性测度的纽带. 特别地, 当 $v_{2,d,i+1,t} = v_{2,f,i+1,t} = 0$ 时, $Z_{i+1,t}$ 退化为单调定价核. 命题 1 给出了非单调定价核 $Z_{i+1,t}$ 成为等价鞅测度 (equivalent martingale measure) 的充分必要条件.

命题 1 在客观测度 (P) 下, 主导市场和追随市场的资产收益率动态驱动过程分别由式 (1) 和式 (4) 表示, 则 $Z_{i+1,t}$ 是一个等价鞅测度 (EMM) 充分必要条件为 (证明见附录)

$$\begin{aligned} v_{1,d} &= -\frac{(2\tilde{\lambda}_d - \kappa_f^2)\varphi_d + \kappa_f^2}{2\kappa_f} = -\frac{(2\lambda_d - 1)\varphi_d + 1}{2} \\ v_{1,f} &= -\frac{(2\lambda_f - 1)\varphi_f + 1}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

2.2 风险中性分布

在给出风险中性测度 (Q) 下 SpillMacro-GARCH 模型的表达形式之前, 需要先分析两个随机扰动项 ($z_{d,i+1,t}$ 和 $z_{f,i+1,t}$) 的测度转换. 给定定价核 $Z_{i+1,t}$, 主导市场 $z_{d,i+1,t}$ 在风险中性测度 (Q) 下的矩母函数 (moment generating function) 为

$$\begin{aligned} E_{i,t}^Q[\exp(u z_{d,i+1,t})] &= E_{i,t}[Z_{i+1,t} \exp(u z_{d,i+1,t})] \\ &= E_{i,t} \left[\exp(v_{2,d} z_{d,i+1,t}^2 + (v_{1,d} + u) z_{d,i+1,t} + \frac{1}{2} \ln(\varphi_d) - \frac{v_{1,d}^2 h_{d,i+1,t}}{2\varphi_d}) \right] \\ &= \exp(v_{1,d} h_{d,i+1,t}^* u + \frac{1}{2} h_{d,i+1,t}^* u^2) \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $h_{d,i+1,t}^* = \frac{h_{d,i+1,t}}{\varphi_d}$. 显然, 在 \mathbb{Q} 测度下随机扰动项 $z_{d,i+1,t}$ 的分布为 $z_{d,i+1,t} \sim {}^Q N(v_{1,d} h_{d,i+1,t}^*, h_{d,i+1,t}^*)$. 按照建模习惯, 扰动项通常设定为 0 均值, 令 $z_{d,i+1,t}^* \equiv z_{d,i+1,t} - v_{1,d} h_{d,i+1,t}^*$, 则有 $z_{d,i+1,t}^* \sim {}^Q N(0, h_{d,i+1,t}^*)$.

同理, 在风险中性测度下追随市场的扰动项 $z_{f,i+1,t}$ 也有: $z_{f,i+1,t} \sim {}^Q N(v_{1,f} h_{f,i+1,t}^*, h_{f,i+1,t}^*)$. 其中 $h_{f,i+1,t}^* = \frac{h_{f,i+1,t}}{\varphi_f}$. 令 $z_{f,i+1,t}^* \equiv z_{f,i+1,t} - v_{1,f} h_{f,i+1,t}^*$, 则有 $z_{f,i+1,t}^* \sim {}^Q N(0, h_{f,i+1,t}^*)$.

2.3 风险中性测度(\mathbb{Q})下的模型形式

得到第 2.2 节的结果后, 便可推导出风险中性测度(\mathbb{Q})下 SpillMacro-GARCH 模型表达形式.

命题 2 在风险中性测度(\mathbb{Q})下, 主导市场的驱动过程(1)和它对应的仿射 GARCH 动态过程(2)分别表示为

$$R_{d,i+1,t} = r_d - \frac{1}{2} h_{d,i+1,t}^* + z_{d,i+1,t}^* \quad (12)$$

$$h_{d,i+1,t}^* = \tau_{d,t}^* + \beta_d h_{d,i,t}^* + \frac{\alpha_d^*}{h_{d,i,t}^*} (z_{d,i,t}^* - \gamma_d^* h_{d,i,t}^*)^2 \quad (13)$$

其中 $\tau_{d,t}^* = \frac{\tau_{d,t}}{\varphi_d}$, $\alpha_d^* = \frac{\alpha_d}{\varphi_d}$ 和 $\gamma_d^* = \gamma_d \varphi_d - v_{1,d}$. 类似的, 追随市场的收益率模型(4)及其仿射 GARCH 过程(7)分别有

$$R_{f,i+1,t} = r_f - \frac{\kappa_f^2}{2} h_{d,i+1,t}^* - \frac{1}{2} h_{f,i+1,t}^* + \kappa_f z_{d,i+1,t}^* + z_{f,i+1,t}^* \quad (14)$$

$$h_{f,i+1,t}^* = \tau_{f,t}^* + \beta_f h_{f,i,t}^* + \kappa_{hf}^* h_{d,i,t}^* + \frac{\alpha_f^*}{h_{f,i,t}^*} (z_{f,i,t}^* - \gamma_f^* h_{f,i,t}^*)^2 \quad (15)$$

$$P_1(S_{f,i,t}, K, r_f, M) = \frac{1}{2} + \int_0^\infty \text{Re} \left(\frac{\Psi_{i,i+M,t}^Q(1 + \check{i}u) \exp(-r_f M - \check{i}u \ln(K/S_{f,i,t}))}{\check{i}\pi u} \right) du$$

$$P_2(S_{f,i,t}, K, M) = \frac{1}{2} + \int_0^\infty \text{Re} \left(\frac{\Psi_{i,i+M,t}^Q(\check{i}u) \exp(-\check{i}u \ln(K/S_{f,i,t}))}{\check{i}\pi u} \right) du$$

其中 \check{i} 表示虚数单位 $\sqrt{-1}$, K 为期权合约的到

其中 $\tau_{f,t}^* = \frac{\tau_{f,t}}{\varphi_f}$, $\alpha_f^* = \frac{\alpha_f}{\varphi_f^2}$, $\gamma_f^* = \gamma_f \varphi_f - v_{1,f}$ 和 $\kappa_{hf}^* = \frac{\kappa_{hf} \varphi_d}{\varphi_f}$ (证明见附录).

因为风险补偿项的存在, 即 $\frac{1}{2} h_{d,i,t}^*$, $\frac{\kappa_f^2}{2} h_{d,i,t}^*$ 和 $\frac{1}{2} h_{f,i,t}^*$, 所以在风险中性测度下贴现的主导市场资产价格(12)和追随市场的资产价格(14)均满足鞅过程.

进一步, 由于波动率驱动过程(13)和驱动过程(15)是仿射(affine)结构, 因此能够获得一个指数的仿射矩母函数(exponentially affine moment generating function), 进而能够推导出期权价格的封闭解(closed-form solution). 命题 3 给出了指数的仿射矩母方程.

命题 3 在风险中性测度(\mathbb{Q})环境中, 标的物的驱动过程满足命题 2 的设定, 则追随市场的资产收益率 $R_{f,i+1,t}$ 所对应的矩母函数为

$$\Psi_{i,i+M,t}^Q(u) = \exp(C_f(u, M) h_{f,i+1,t}^* + C_d(u, M) h_{d,i+1,t}^* + D(u, M)) \quad (16)$$

其中 M 为剩余到期日; $C_f(u, M)$, $C_d(u, M)$ 和 $D(u, M)$ 分别在附录(A17)~附录(A18)给出(证明见附录).

最后, 借助 Heston 和 Nandi^[9] 的推论(corollary), 欧式看涨期权的理论价格可以通过标准的傅里叶逆变换(Fourier inversion)技术获得

$$C_{i,t}(S_{f,i,t}, K, r_f, M) = S_{f,i,t} P_1(S_{f,i,t}, K, r_f, M) - \exp(-r_f M) K P_2(S_{f,i,t}, K, M) \quad (17)$$

其中

期执行价格. 看跌期权的理论价格通过期权平价

公式(put-call parity)获得.

3 基于收益率和期权数据的联合估计 (joint estimation)

3.1 基于收益率数据的拟似然函数

在客观测度(\mathbb{P})下,这里采用拟极大似然(QML)方法估计模型参数.拟极大似然方法被广泛应用于估计经济金融模型的参数.它简单却具有良好的统计性质,如一致性和渐进正态性^[33, 34].为此,需要计算两个市场联合收益率 $\{R_{d,i+1,t}, R_{f,i+1,t}\}$ 的第一阶矩和第二阶矩.其中,式(6)已经给出了追随市场收益率 $R_{f,i+1,t}$ 的条件期望 $E_{i,t}[R_{f,i+1,t}]$,其它的条件矩经过简单的运算分别有

$$\begin{aligned} E_{i,t}[R_{d,i+1,t}] &= r_d + (\lambda_d - \frac{1}{2})h_{d,i+1,t} \\ Var_{i,t}[R_{d,i+1,t}] &= h_{d,i+1,t} \\ Var_{i,t}[R_{f,i+1,t}] &= \kappa_f^2 h_{d,i+1,t} + h_{f,i+1,t} \\ Cov_{i,t}[R_{d,i+1,t}, R_{f,i+1,t}] &= \kappa_f h_{d,i+1,t} \end{aligned} \quad (18)$$

为了行文紧凑,先定义符号 $\Theta = [\lambda_d, \beta_d, \alpha_d, \gamma_d, m_d, \theta_d, \omega_d, \tilde{\lambda}_d, \lambda_f, \kappa_f, \beta_f, \alpha_f, \gamma_f, \kappa_{hf}, m_f, \theta_f, \omega_f]'$, $Y_{i+1,t} = [R_{d,i+1,t}, R_{f,i+1,t}]'$, 以及条件均值和条件方差-协方差矩阵分别为

$$\begin{aligned} M_{i+1,t} &\equiv \begin{bmatrix} E_{i,t}[R_{d,i+1,t}] \\ E_{i,t}[R_{f,i+1,t}] \end{bmatrix} \\ \Sigma_{i+1,t} &\equiv \begin{bmatrix} Var_{i,t}[R_{d,i+1,t}] & Cov_{i,t}[R_{d,i+1,t}, R_{f,i+1,t}] \\ Cov_{i,t}[R_{d,i+1,t}, R_{f,i+1,t}] & Var_{i,t}[R_{f,i+1,t}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

则在 t 时期第 $i+1$ 的对数二元正态密度函数

$$\begin{aligned} l_{i,t}^R(Y_{i+1,t}; \Theta) &= -\ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(|\Sigma_{i+1,t}|) - \\ &\frac{1}{2} (Y_{i+1,t} - M_{i+1,t})' \Sigma_{i+1,t}^{-1} (Y_{i+1,t} - M_{i+1,t}) \end{aligned} \quad (20)$$

同时,施加约束 $|\kappa_f| < 1$ 以保证方差-协方差矩阵 $\Sigma_{i+1,t}$ 始终为正定.

3.2 基于期权数据的目标函数

在期权定价领域, Trolle 和 Schwartz^[35]证实了以 Vega 加权的均方根误差(Vega-weighted root-mean-square error, VWRMSE)为目标函数在数值优化中表现稳健.因此,参考他们的做法,具体为

$$\begin{aligned} VWRMSE &\equiv \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e_j^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{C_j^{MKT} - C_j^{MOD}}{BSV_j^{MKT}} \right)^2} \end{aligned} \quad (21)$$

其中 N 表示总的期权合约数, C_j^{MOD} 和 C_j^{MKT} 分别表示基于模型获得的期权价格和市场价格, BSV_j^{MKT} 是根据 Black-Scholes 模型计算的 Vega 值.为了和基于收益率数据的最大化拟似然函数一致,并没有直接最小化式(21),而是通过最大化如下函数获得风险中性参数

$$l_j^O \propto -\frac{1}{2} \left(\ln(VWRMSE^2) + \frac{e_j^2}{VWRMSE^2} \right) \quad (22)$$

3.3 联合目标函数

由于期权数据是一个面板数据,即时间维度和截面维度都能获得数据.因此,期权数据的样本容量会远远高于收益率数据.如果总目标函数直接设定为式(20)和式(22)之和,将会导致基于期权数据的目标函数 l_j^O 控制着总目标函数.为了避免这种情形,这里对总目标函数设定为等权重,即

$$l_{Joint} = \frac{T+N}{2} \bar{l}^R + \frac{T+N}{2} \bar{l}^O \quad (23)$$

其中

$$\bar{l}^R = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T l_t^R, \bar{l}^O = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N l_j^O \quad (24)$$

T 表示收益率在 2005 年~2019 年区间的时间序列数据量, N 表示在 2015 年~2019 年区间的期权合约数量. Hu 和 Zidek^[36]研究了加权似然函数统计性质,并证明了加权似然函数方法仍然保留了标准似然函数的大样本性质.因此,可以像经典极大似然方法一样对参数进行统计推断.

4 实证分析

这节比较了基于非单调定价核 $Z_{i+1,t}$ 的单调定价核,并在此基础上计算 Macro-GARCH

(MPK)模型. 这时比较 Macro-GARCH (Non-MPK)模型和 Macro-GARCH (MPK)模型则可以观测到定价核对期权定价的影响;最后,计算传统的 HN-GARCH 模型^[9]和滚动窗 RollWin 模

型^④,并与 Macro-GARCH (MPK)模型比较即可观测宏观信息对期权定价的影响. 表 1 详细列出模型定价核类型、估计所使用的数据和缩写等信息.

表 1 模型汇总

Table 1 Model summary

序号	基础模型	定价核类型	模型估计使用数据	缩写
1	SpillMacro-GARCH	非单调定价核 (NonMPK)	收益率和期权数据 (Joint estimation)	SpillMacro-GARCH (NonMPK)
2	Macro-GARCH	非单调定价核 (NonMPK)	收益率和期权数据 (Joint estimation)	Macro-GARCH (NonMPK)
3	Macro-GARCH	单调定价核 (MPK)	仅收益率数据	Macro-GARCH (MPK)
4	HN-GARCH	单调定价核 (MPK)	仅收益率数据	HN-GARCH (MPK)
5	RollWin	单调定价核 (MPK)	仅收益率数据	RollWin (MPK)

4.1 数据来源

因为美国市场在国际市场中具有主导地位^[22, 23],所以 S&P500 指数被选作国际金融市场的代理变量,用于分析对我国金融市场的溢出影响. 又因为研究的是上证 50ETF 期权定价问题,50ETF 指数自然也被收集. 此外,中国和美国市场的无风险利率分别选择中国银行同业拆借利率 (Shifon 指数) 和美国 3 月的短期国债率 (USGG3M 指数). S&P500 指数、50ETF 指数、Shifon 指数和 USGG3M 指数数据均来源于彭博 (bloomberg) 数据库,起始时间选择 50ETF 指数首次上市的 2005 年 2 月 23 日,截止时间为 2019 年 2 月 8 日,共获得 3 643 个日度数据.

这里选择工业品生产价格指数 (PPI) 作为宏观基本面代理变量,并把采购经理指数 (PMI) 作为相应的稳健性分析. 原因在于: Schwert^[26] 发现在 1953 年 ~ 1987 年间 PPI 信息有助于预测未来资产收益率的波动; Engle 等^[17] 在拓展了 Schwert^[26] 数据集至 2010 年的同时,基于 GARCH-MIDAS 模型发现股票市场的波动与 PPI 和工业生产 (IP) 信息显著相关. 受此启发和考虑中国宏观数据的可获得性,这里选取中国和美国的工业品生产价格指数分别代理本国的宏观基本面,分别记为 PPI (CN) 和 PPI (US),时间跨度与 ETF50 数据

一致,共 169 个月度数据. 其中, PPI (CN) 数据来源于万得 (Wind) 数据库,而 PPI (US) 数据来源于美联储经济数据库 (<https://fred.stlouisfed.org>). 当然,仅用 PPI 信息代理宏观基本面是不全面的. 为此,在第 5 节稳健性分析中改为 PMI 进一步分析结论是否可靠.

上证 50ETF 期权合约的数据来源于万得 (Wind) 数据库,时间从它首日上市的 2015 年 2 月 9 日 ~ 2019 年 2 月 8 日,约 4 年. 在权衡合约的流动性和样本容量后,设定筛选期权合约的条件: 成交量最大的 50 只和离到期日还剩 14 天 ~ 180 天的虚值期权,共有 2 963 个合约.

4.2 数据描述

表 2 计算了原始收益率数据的描述性统计. 为了显示清晰,将原始收益率数据乘以 100. 结果显示这些收益率数据具有典型的金融市场数据特征,即,强烈拒绝 JB 检验意味着收益率数据呈现非正态性;拒绝 ADF 和 PP 单位根检验说明收益率具有平稳性;ARCH 检验则表明收益率中存在着异方差,适合构建具有波动集聚性质的模型. 图 1 直观显示了各个收益率的动态过程,子图 Graph A 和 Graph B 均显示了收益率的集聚效应,高波动率出现在 2008 年 ~ 2009 年左右,对应着 2008 年金融危机时期.

④ 即 Rolling-window 方法,具体做法是基于过去历史交易数据 (如近 1 000 个观测数据,约 4 年) 计算样本年化标准差,并把该年化标准差作为波动率代入 Black-Scholes 公式获得期权价格. 固定 1 000 个最近的观测值,滚动计算年化标准差即可获得一系列的期权价格.

表 2 原始数据的描述性统计

Table 2 Descriptive statistics of raw data

	Mean	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis	JB	LBQ(5)	ARCH(5)	ADF(5)	PP(5)
ETF50	0.029	2.950	-0.193	8.219	4 156.381 ***	13.365 **	252.655 ***	-25.159 ***	-61.152 ***
S&P500	0.023	1.357	-0.365	15.091	22 265.902 ***	49.356 ***	873.268 ***	-26.428 ***	-66.716 ***
PPI(CN)	0.110	0.426	-1.166	7.791	199.935 ***	158.719 ***	53.198 ***	-4.113 ***	-4.819 ***
PPI(US)	0.172	1.482	-1.076	6.915	140.534 ***	65.790 ***	51.885 ***	-5.300 ***	-7.933 ***
PMI(CN)	0.018	6.176	0.113	7.017	108.611 ***	11.504 **	22.134 ***	-6.653 ***	-11.368 ***
PMI(US)	0.035	12.833	-0.387	4.258	14.633 ***	13.699 **	27.376 ***	-5.347 ***	-11.373 ***

注：该表分别提供了 ETF50 指数收益率, S&P500 指数收益率, 中美两国的工业生产指数 (PPI) 和采购经理指数 (PMI) 的描述性统计。JB 表示正态性的 Jarque-Bera 检验, 原假设是正态的; LBQ 是自相关检验, 原假设是不存在自相关; ARCH 则是 Engle 异方差检验, 原假设是数据不存在异方差; ADF 和 PP 分别是检验平稳性的增广 Dickey-Fuller 和 Phillips-Perron 检验, 原假设为数据是非平稳的。括号 (·) 里的数字表示滞后的阶数。星号 *, ** 和 *** 依次表示在 10%, 5% 和 1% 的显著性水平下拒绝原假设。

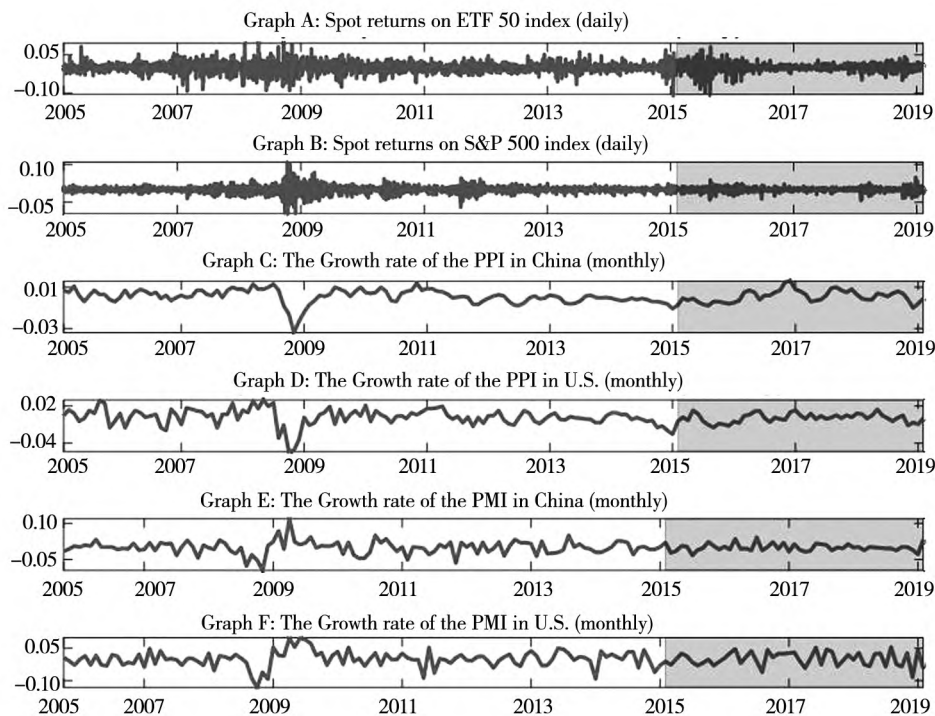


图 1 原始数据图

Fig. 1 The graph for the raw data

注：图中依次展示了 ETF50 指数收益率 (频率: 日) 和 S&P500 指数收益率 (频率: 日), 数据区间: 2005 年 2 月 23 日 ~ 2019 年 2 月 8 日; 中国和美国的工业生产指数 PPI 环比 (频率: 月), 数据区间: 2005 年 2 月 ~ 2019 年 2 月; 以及财新中国 PMI 和美国供应管理协会 (ISM) 的制造业 PMI (频率: 月), 数据区间: 2005 年 9 月 ~ 2019 年 2 月。

表 3 描述 50ETF 期权的基本情况。由列看, 把剩余到期日 (M) 分为 4 个区间, 其中剩余到期日以日历时间 (365 天) 计算; 每个板块 (Panel) 以货币性 ($moneyness$) 分为 6 个子区间, 其中货币性的度量公式为: $moneyness = F/K$, 远期价格 $F = S_{f,i,t} \exp(r_f \times M)$ 。在此分类标准下, 表 3 依次计算

了每一个子类的期权合约数量, 平均期权价格和基于 Black-Scholes 模型^[1] 的平均隐含波动率。从表 3 中的 Panel A 看出, 期权合约的剩余到期日 (M) 集中在中期: 30 天 ~ 150 天, 约占总合约的 72%; 由行看, 货币性小于 0.99 的合约有 1 944 个, 占比约为 66%。表明虚值看涨期权数量多于虚值

表 3 期权数据的描述性统计
(2015 年 2 月 9 日 ~ 2019 年 2 月 8 日)
Table 3 Descriptive statistics for option data
(February 9, 2015 ~ February 8, 2019)

M Moneyness	[14,30]	(30,90]	(90,150]	(150,180]	All
Panel A: Number of option contracts					
(0,0.93]	8	255	239	120	622
(0.93,0.97]	55	295	262	104	716
(0.97,0.99]	98	243	180	85	606
(0.99,1.00]	95	147	97	36	375
(1.00,1.01]	53	121	87	42	303
(1.01,∞)	27	80	143	91	341
All	336	1 141	1 008	478	2 963
Panel B: Average option prices					
(0,0.93]	0.011	0.018	0.031	0.050	0.029
(0.93,0.97]	0.024	0.035	0.046	0.065	0.042
(0.97,0.99]	0.037	0.048	0.068	0.087	0.057
(0.99,1.00]	0.046	0.058	0.081	0.104	0.065
(1.00,1.01]	0.046	0.062	0.094	0.116	0.076
(1.01,∞)	0.047	0.060	0.076	0.092	0.074
All	0.039	0.041	0.058	0.078	0.053
Panel C: Average implied volatility					
(0,0.93]	0.309	0.244	0.227	0.228	0.235
(0.93,0.97]	0.267	0.194	0.166	0.173	0.186
(0.97,0.99]	0.233	0.176	0.159	0.166	0.179
(0.99,1.00]	0.208	0.161	0.153	0.168	0.172
(1.00,1.01]	0.159	0.146	0.155	0.166	0.154
(1.01,∞)	0.101	0.096	0.089	0.099	0.094
All	0.211	0.185	0.166	0.171	0.179

注：该表分别计算了在剩余到期日 (M) 和货币性 ($moneyness$) 分类情况下 50ETF 期权虚值期权的合约数量, 平均期权价格和平均隐含波动率. 其中, 剩余到期日按照日历时间 (365 天) 计算; 货币性 ($moneyness$) 的计算公式为: $moneyness = F/K$, 远期价格 $F = S_{f,i,t} \exp(r_f M)$.

看跌期权. Panel B 则反映了期权价格随着剩余到期日的增加而递增的性质, 即平均期权价格从 0.039 增加到 0.078. 这现象并不奇怪, 因为期权希腊字母 Theta 已阐明了这种逻辑关系. Panel C 表明隐含波动率并不是常数, 再次验证了 Black-Scholes 模型中常数波动率假设在我国衍生品市场也是不成立的. 具体地, 货币性值越小 (大), 隐含波动率则表现越大 (小), 这种反向关系使得隐含波动率出现假笑 (smirk) 特征. 这种现象可以被解释为我国股票市场指数从 2015 年的 5 000 多点下跌到 2019 年 2 000 多点, 造成看空的市场情绪, 导致投资者对虚值看涨期权的过度需求, 从而推高虚值看

涨期权隐含波动率. 总体上, 虽然 50ETF 期权上市时间短, 但很多数据特征与主流期权品种 (如 S&P500 指数期权) 类似^[4,11].

4.3 模型估计结果

在获得模型参数估计值之前, 需要先确定两个市场权重函数 (8) 中的滞后阶数 K_d 和 K_f . 借鉴 Engle 等^[17] 实证结果, 先把阶数设定为 24, 36, ..., 120 等 9 个整数, 对应着滞后 24 个月, 36 个月, ..., 120 个月, 然后针对每一个整数估计模型并获得对数似然值, 最后对数似然值变得稳定后所对应的整数被选择为滞后阶数. 如图 2 所示, 追随市场的滞后阶数 K_f 为 96 个月, 即 8 年; 主导市场的滞后阶数 $K_d = 84$, 即 7 年. 另外, 如图所示, 这些对数似然值差异很小, 说明估计的结果对滞后阶数的选择是稳健的.

表 4 给出了 5 个模型的估计结果. 具体地, 主导市场和追随市场的杠杆系数 γ_d 和 γ_f 均为正值, 验证了市场中存在着杠杆效应; 我国的 γ_f 值约 16.843 ~ 46.497, 小于美国市场的 $\gamma_d = 253.804 \sim 594.150$, 表明 S&P500 的收益率分布具有更强的左偏性. 这与表 2 中的描述结果吻合, 即 S&P500 的偏度为 -0.365, 小于 50ETF 的 -0.193. 需要注意的是, 加入了期权数据后杠杆系数值高于对应的仅依靠收益率数据获得估计值, 如 SpillMacro-GARCH (NonMPK) 中的 $\lambda_f = 23.780$, 而 SpillMacro-GARCH (MPK) 仅为 16.843. 这可能是下文中非单调定价核获得更高定价精度的原因, 因为杠杆效应有助于提高期权定价效率^[2,9,10]. 溢出效应参数 $\kappa_f = 0.101 \sim 0.151$, 且在 1% 的水平下是显著的. 这说明美国金融市场对我国市场具有正向溢出效应. 这种影响不仅通过收益率渠道, 还会通过波动率渠道 κ_{if} , 见式 (4) 和式 (7). 度量波动持续性 (the persistence of volatility) 由 $\beta'_i, i \in \{d, f\}$ 给出, 它反映波动率的均值回复 (mean reversion) 速度, 该值越趋近于 1 意味着回复速度越慢, 反之则越快. 结果显示, 所有模型均具有高的波动持续性, 为 0.938 ~ 0.988. 这也与期权文献 Christoffersen 等^[4] 一致, 他们还发现高波动持续性能更好地捕捉波动的集聚效应. 此外, 还发现 $\theta_i, i \in \{d, f\}$ 在绝大部分情形下是正值, 意味着更高的通胀率会导致股票市场的更大的震荡, 这与 Engle 等^[17] 的发现相似.

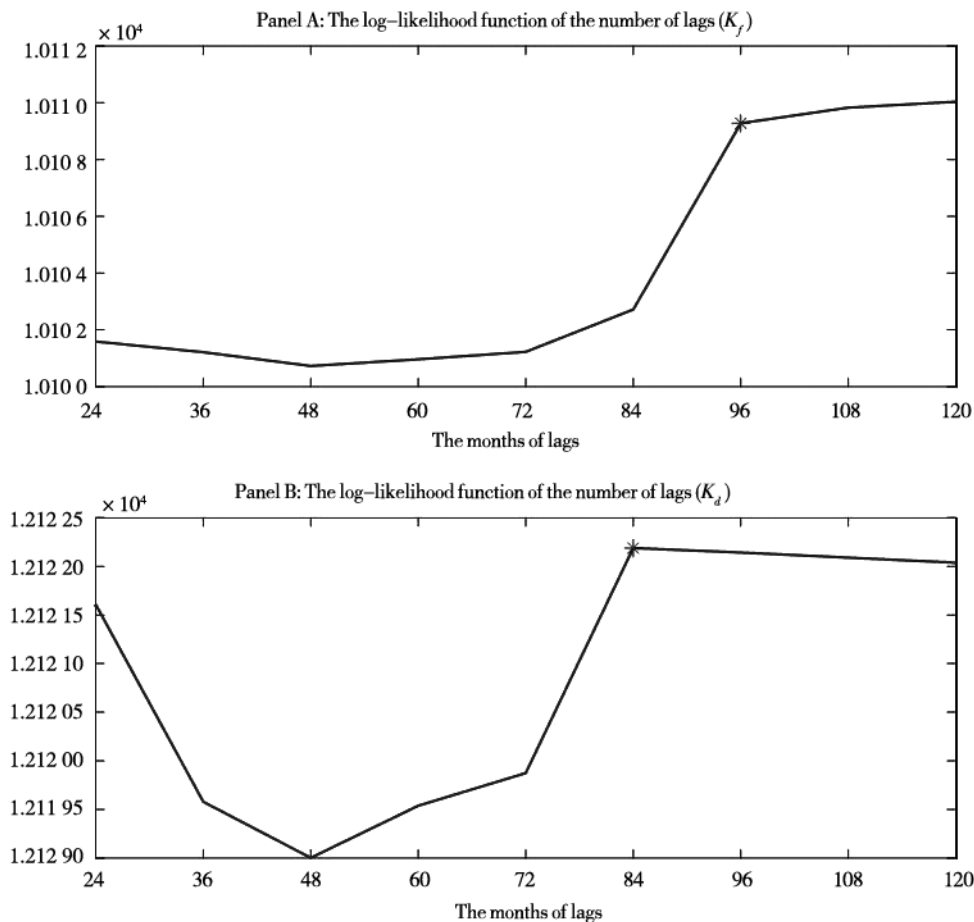


图 2 权重函数(8)中的滞后阶数与对数似然函数的对应关系

Fig. 2 The relationship between the lag order in equation (8) and the log likelihood function

表 4 的下半部分还报告了诊断检验. 根据对数似然值、AIC 准则和 BIC 准则, SpillMacro-GARCH(NonMPK) 模型比其它模型具有更好的数据拟合效果. 同时, 对每个模型的残差进行诊断分析. 发现 Jarque-Bera 统计量和 Kolmogorov-Smirnov 统计量在 1% 显著性水平下拒绝残差为正态性, 但是对照表 2, 相应的统计量值均有大幅度下降. 异方差检验(ARCH)也出现了类似情况. 图 3 显示了各个模型的残差自相关图. 容易观测到每个模型的残差自相关图落在 3 倍标准差内(虚线), 即反映了各个模型能够刻画原始数据中自相关现象. 以上结果说明所构建的新模型只是

部分地捕捉到数据中的典型特征^⑤.

图 4 依次给出 5 个模型的条件波动率. 容易观测到, 所有模型均显示条件波动率是一个动态时变过程, 且在 2008 年 ~ 2009 年和 2015 年 ~ 2016 年处于高位波动, 这分别对应着 2008 年 ~ 2009 年次贷危机和 2015 年 ~ 2016 年沪指从 5 000 多点跌至 2 000 多点的股灾时期. 另外, 基于收益率和期权数据估计的模型 Macro-GARCH(NonMPK) 和 SpillMacro-GARCH(NonMPK) 比仅依赖于收益率的其它 3 个模型得到的条件波动率更加平滑, 这是因为采用了平均加权似然函数所致.

⑤ 在建模过程中, 容易出现模型的样本内拟合效果和其它目标(如期权定价精度和样本外预测等)往往不一致, 如 Christoffersen 等^[27] 研究结果显示非正态的广义误差分布比正态分布具有更好的拟合效果, 但在期权估值时候却表现很差. 与 Christoffersen 等^[27] 一样, 这里比较关心的是模型的期权定价能力, 因此该部分表现只是作为参考. 诚然, 样本内拟合和其它目标同时兼得也一直是建模者的追求.

表4 估计结果

Table 4 Estimation results

	HN-GARCH (MPK)		Macro-GARCH (MPK)		SpillMacro-GARCH (MPK)		Macro-GARCH (NonMPK)		SpillMacro-GARCH (NonMPK)	
	Estimate	S. E.	Estimate	S. E.	Estimate	S. E.	Estimate	S. E.	Estimate	S. E.
λ_d					3.044 **	1.454			3.052 **	1.483
β_d					0.728 ***	0.016			0.577 ***	0.013
α_d					0.000 ***	0.000			0.000 ***	0.000
γ_d					253.804 ***	13.592			594.150 ***	9.092
m_d					0.000	0.000			0.000	0.000
θ_d					0.044	0.032			0.033	0.022
ω_d					4.868	8.566			4.587	7.751
$\tilde{\lambda}_d$					1.487	3.251				
φ_d									0.958 **	0.449
λ_f	1.396	1.072	1.395	0.971	1.336	1.673	1.390	1.068	1.360	1.079
κ_f					0.151 ***	0.024			0.101 ***	0.020
β_f	0.949 ***	0.011	0.945 ***	0.004	0.935 ***	0.005	0.957 ***	0.002	0.984 ***	0.001
α_f	0.000 ***	0.000	0.000 ***	0.000	0.000 ***	0.000	0.000 ***	0.000	0.000 ***	0.000
γ_f	19.714 **	9.978	20.266 ***	4.144	16.843 ***	4.288	46.497 ***	5.440	23.789 ***	7.729
κ_{hf}					0.017 **	0.007			0.002 ***	0.001
m_f	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000 *	0.000	-0.001 ***	0.000	-0.000 ***	0.000
θ_f			0.464 ***	0.055	0.523 ***	0.060	0.633 ***	0.025	-0.520 ***	0.027
ω_f			4.982 ***	1.152	5.070 ***	1.157	6.456 ***	0.312	2.033 ***	0.010
φ_f							0.965 ***	0.013	<1.000 ***	0.022
β'_d					0.963				0.988	
β'_f	0.953		0.950		0.938		0.962		0.984	
Diagnostic test										
Log-lik	10 100		10 109		22 242		17 346		28 734	
AIC	-20 190		-20 204		-44 449		-34 677		-57 431	
BIC	-20 159		-20 161		-44 344		-34 622		-57 309	
JB stat.	235.154 ***		239.215 ***		222.600 ***		239.391 ***		1 307.640 ***	
KS stat.	0.068 ***		0.069 ***		0.067 ***		0.079 ***		0.054 ***	
LBQ(5)	7.731		7.865		9.241 *		7.689		10.023 *	
ARCH(5)	56.759 ***		53.760 ***		56.476 ***		52.752 ***		165.764 ***	

注：该表报告宏观变量为PPI的模型参数估计值。SpillMacro-GARCH(NonMPK)模型和Macro-GARCH(NonMPK)采用了联合估计法(joint estimation)，参见第4节介绍。其余模型采用拟极大似然方法(quasi-maximum likelihood)。星号*，**和***依次表示在10%，5%和1%的显著性水平下拒绝原假设。数据区间：2005年2月23日~2019年2月8日。

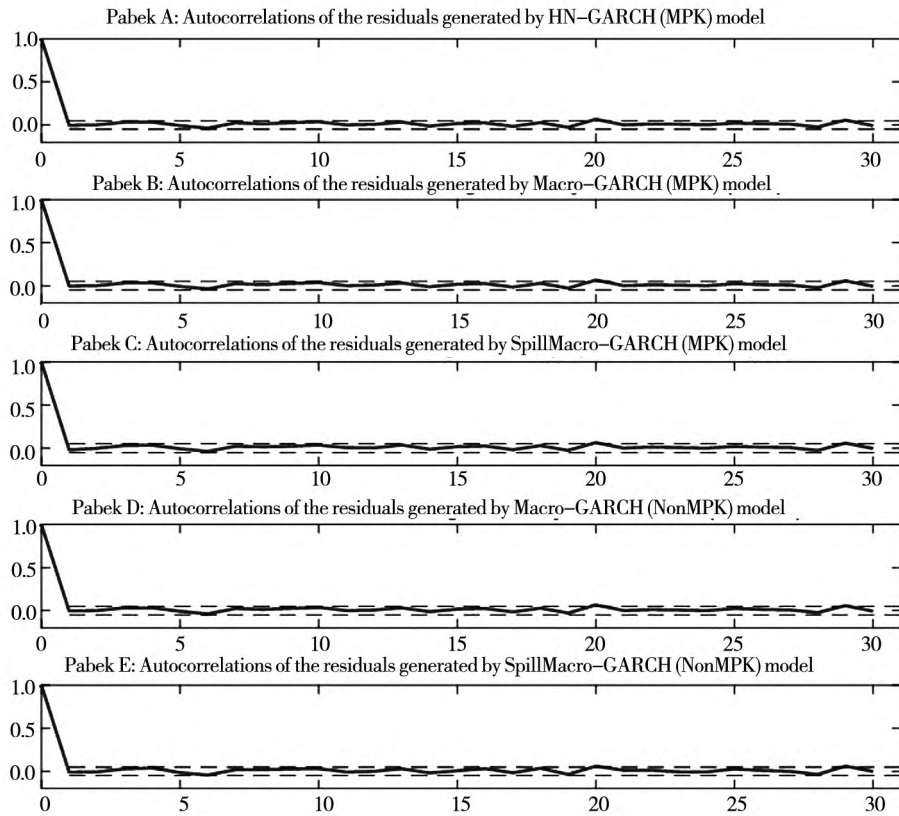


图 3 追随市场残差序列的自相关图

Fig. 3 Autocorrelation graph of the residual for the following market

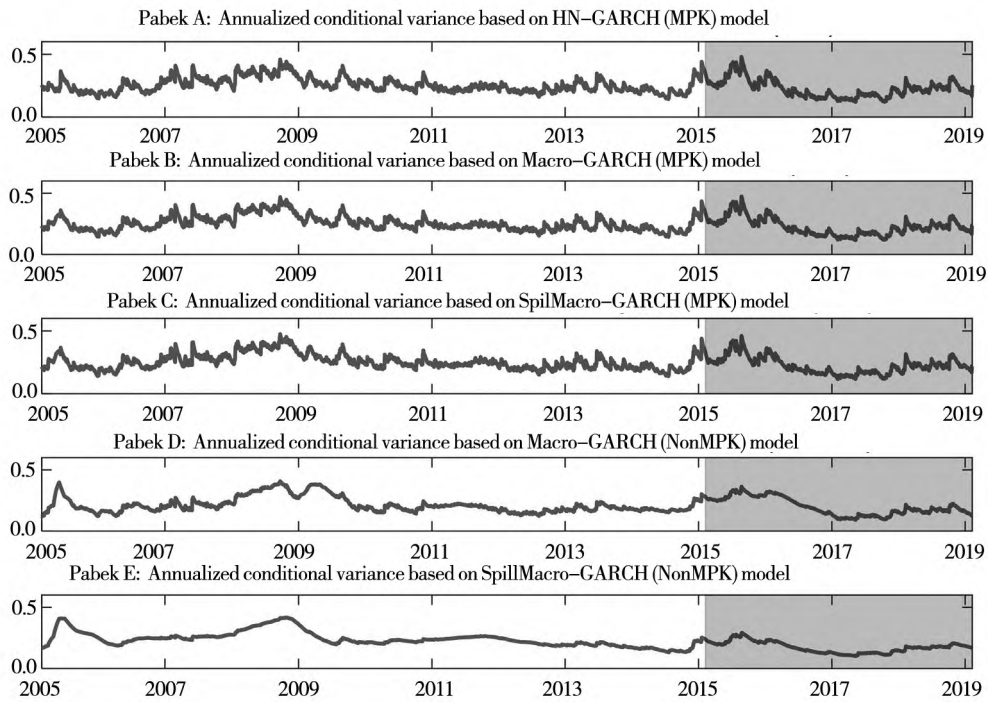


图 4 追随市场年化条件波动率图

Fig. 4 The conditional (annualized) volatility for the following market

图5则给出了国内宏观因素对条件波动率的冲击影响. 这些子图具有相似的时变趋势, 如在2008年~2009年附近, 由于次贷金融危机, PPI

的增长率由高位迅速跌到了最低点-3.4%, 由此降低了对条件波动率的影响. 这说明通货紧缩可能会降低股票市场的波动性.

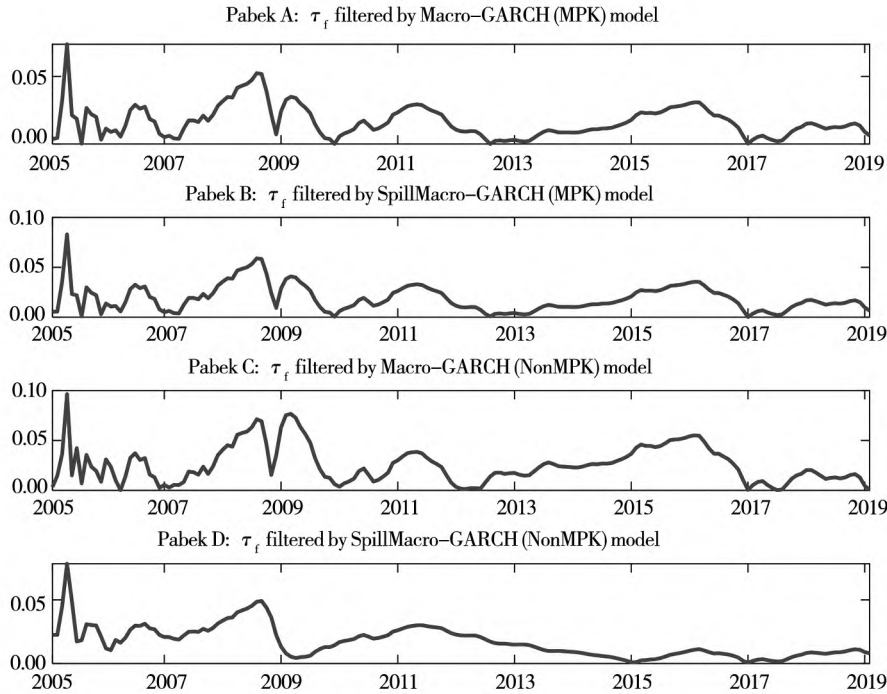


图5 宏观经济因素(PPI)对条件波动率的冲击图(τ_f)

Fig. 5 The impact (τ_f) of macroeconomic factors(PPI) on conditional volatility

4.4 期权定价表现

为了衡量各个模型的期权定价精度, 这里选择基于隐含波动率的均方误(the implied volatility root-mean-square error, IVRMSE)损失函数. Renault^[37]讨论了IVRMSE标准在比较期权定价误差时的优点, 并且随后被广泛采用^[4, 5, 7, 11]. IVRMSE的计算公式如下

$$IVRMSE \equiv \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (IV_i^{MOD} - IV_i^{MKT})^2} \quad (25)$$

其中

$$IV_i^k = BSM^{-1}(C_i^k), k = MOD, MKT \quad (26)$$

C_i^{MOD} 和 C_i^{MKT} 分别表示基于模型获得的期权价格和市场交易价格, $BSM^{-1}(\cdot)$ 是Black-Scholes模型^[1]的逆运算. 显然地, IVRMSE值越小, 意味着对应的模型具有更高的期权定价精度; 反之, 期权定价误差越大.

表5报告了各个模型的期权定价表现, 结果表明兼顾国际金融市场间的溢出效应和国内基本面情况的模型定价精度最高, 特别是采用了非单

调定价核, 即 SpillMacro-GARCH (NonMPK) 模型获得最小的 IVRMSE 值, 达到 0.053. 剩余模型定价表现由好到差依次为 Macro-GARCH (NonMPK), Macro-GARCH (MPK), HN-GARCH (MPK) 和 RollWin (MPK) 模型. 具体地, 在其它条件一样的前提下, 具有溢出效应的 SpillMacro-GARCH (NonMPK) 比 Macro-GARCH (NonMPK) 模型的定价误差降低 14.5%, 这说明增加国际溢出效应可以有效提高期权定价的精度; 非单调定价核的 Macro-GARCH (NonMPK) 比单调定价核的 Macro-GARCH (MPK) 模型的定价误差降低约 47%, 这可能是非单调核模型获得更高的杠杆效应所致 (见表 4), 而杠杆效应有助于虚值期权的定价^[2, 9, 10]; 引入宏观经济基本面因素后 Macro-GARCH (MPK) 比基准的 HN-GARCH (MPK) 和 RollWin (MPK) 模型的定价误差分别下降 7.9% 和 24.0%, 这与 Dorion^[5]的研究发现接近, 他的平均定价误差下降值为 18%; 不出意外, RollWin (MPK) 模型的期权定价表现最差, 因为它并没有考虑方差风险溢价问题^[38].

具体到3种细分情况,即按照货币性(*money-ness*)、剩余到期日(*M*)和隐含波动率(*IV*)的分类。对于3个单调核定价模型: RollWin (MPK), HN-GARCH (MPK) 和 Macro-GARCH (MPK), Panel B 显示 IVRMSE 值随着货币性增加而递增,这说明对深度虚值看跌期权的定价表现变差; Panel C 则反映所有模型均很难拟合具有长剩余到期日(*M*)的期权。以上的这些特征与 Christoffersen 等^[4]基于 S&P500 指数期权获得的结果类似。Panel D 反映 IVRMSE 与隐含波动率(*IV*)反向关系。相应的解释是:由表3中的 Panel C 知道低位的隐含波动率对应着虚值看跌期权,再结合表5中 Panel B 提到虚值看跌期权定价误差偏大,所以就出现这种反向结果。而对于2个非单调核定

价模型: Macro-GARCH (NonMPK) 和 SpillMacro-GARCH (NonMPK), 定价效率在3种细分情况下均出现了U型特征,处在货币性(*money-ness*)、剩余到期日(*M*)和隐含波动率(*IV*)的分类中间会获得更高的定价精度。该结果与基于非单调定价核的 Jump-GARCH 模型^[39]期权定价结果相似。

为了检验期权定价结果的稳健性,论文还计算了 VWRMSE 损失函数式(21)。该损失函数也常被用于评价期权定价的精度(如 Christoffersen 等^[4])。表6提供了 VWRMSE 的计算结果。并不意外,基于 VWRMSE 的排序结果与 IVRMSE 一致。同时,该排序也对货币性(*money-ness*)、剩余到期日(*M*)和隐含波动率(*IV*)的分类是稳健的。

表5 基于 IVRMSE 的期权定价表现

Table 5 IVRMSE-based option pricing performance

	RollWin (MPK)	HN-GARCH (MPK)	Macro-GARCH (MPK)	Macro-GARCH (NonMPK)	SpillMacro-GARCH (NonMPK)
Panel A: Overall IVRMSE					
All	0.154	0.127	0.117	0.062	0.053
Panel B: Sorted by Moneyness					
(0.00,0.93]	0.096	0.078	0.070	0.070	0.057
(0.93,0.97]	0.145	0.114	0.104	0.050	0.036
(0.97,0.99]	0.150	0.118	0.108	0.047	0.036
(0.99,1.00]	0.157	0.121	0.111	0.045	0.036
(1.00,1.01]	0.174	0.141	0.131	0.054	0.048
(1.01,∞)	0.204	0.179	0.168	0.082	0.079
Panel C: Sorted by maturity					
[14,30]	0.126	0.097	0.092	0.063	0.061
(30,90]	0.146	0.115	0.107	0.061	0.049
(90,150]	0.166	0.140	0.129	0.059	0.050
(150,180]	0.163	0.142	0.131	0.069	0.061
Panel D: Sorted by implied volatility					
(0.00,0.14]	0.220	0.184	0.172	0.077	0.071
(0.14,0.18]	0.157	0.123	0.112	0.040	0.022
(0.18,0.22]	0.113	0.092	0.083	0.029	0.021
(0.22,∞)	0.063	0.054	0.048	0.073	0.062

注: 该表报告了基于表4结果计算的 IVRMSE 损失值。按照货币性(*money-ness*)、剩余到期日(*M*)和隐含波动率(*IV*)的分类计算了每个模型的 IVRMSE 值,见式(25)。其值越小,则意味着模型的期权定价越准确。期权数据区间:2015年2月9日~2019年2月8日。

表6 基于VWRMSE的期权定价表现
Table 6 VWRMSE-based option pricing performance

	RollWin (MPK)	HN-GARCH (MPK)	Macro-GARCH (MPK)	Macro-GARCH (NonMPK)	SpillMacro-GARCH (NonMPK)
Panel A: Overall VWRMSE					
All	0.159	0.126	0.115	0.049	0.039
Panel B: Sorted by Moneyness					
(0.00,0.93]	0.127	0.100	0.089	0.052	0.044
(0.93,0.97]	0.181	0.141	0.129	0.053	0.038
(0.97,0.99]	0.163	0.130	0.119	0.049	0.037
(0.99,1.00]	0.164	0.129	0.118	0.047	0.039
(1.00,1.01]	0.162	0.130	0.119	0.047	0.039
(1.01,∞)	0.152	0.124	0.113	0.044	0.037
Panel C: Sorted by maturity					
[14,30]	0.109	0.073	0.067	0.050	0.045
(30,90]	0.156	0.117	0.107	0.047	0.036
(90,150]	0.175	0.143	0.130	0.050	0.037
(150,180]	0.159	0.135	0.123	0.054	0.045
Panel D: Sorted by implied volatility					
(0.00,0.14]	0.217	0.172	0.158	0.055	0.045
(0.14,0.18]	0.169	0.130	0.119	0.045	0.022
(0.18,0.22]	0.129	0.104	0.094	0.028	0.019
(0.22,∞)	0.071	0.061	0.052	0.058	0.051

注: 该表报告了基于表4结果计算的VWRMSE损失值。按照货币性(*moneyness*), 剩余到期日(*M*)和隐含波动率(*IV*)的分类计算了每个模型的VWRMSE值, 见式(21)。其值越小, 则意味着模型的期权定价越准确。期权数据区间: 2015年2月9日~2019年2月8日。

5 稳健性分析

5.1 改变代理宏观变量的分析

正如前面提到, 仅用PPI数据代表宏观基本面是不充分的。为此, 稳健性分析中还选取了采购经理指数代理宏观基本面。采购经理指数(PMI)由于其对经济增长率(GDP)具有良好的预测能力, 通常被选取为经济基本状况的代理变量^[40]。具体地, 选取中国财新制造业PMI(原汇丰制造业PMI)数据和美国供应管理协会(ISM)的制造业PMI数据分别代理中国和美国的宏观基本面, 依次记PMI(CN)和PMI(US)。由于财新中国PMI指数始于2005年9月公布, 因此, PMI(CN)指数的时间区间为2015年9月~2019年2月, 共

162个月度观测值。数据来源于万得(Wind)数据库。表2描述了PMI(CN)和PMI(US)的数据特征。容易观测到PMI数据的标准差大于对应的工业生产指数(PPI), 图1也直观反映了PMI数据波动的激烈程度。此外, PMI指数也是非正态的和平稳的, 这和PPI数据类似。

表7是基于宏观数据为PMI的模型估计结果。与预期一样, 该表估计的结果与基于PPI数据估计的表4相似。如增加了期权数据的杠杆系数($\gamma_i, i \in \{d, f\}$)值比对应的仅依赖收益率的杠杆系数数值大。波动也表现很强的持续性, 即 $\beta'_i, i \in \{d, f\}$ 在0.95附近。参数 $\theta_i > 0, i \in \{d, f\}$ 且在5%显著性水平下是显著的, 这说明宏观变量对波动率有显著的正冲击。

表 7 估计结果(宏观变量:PMI)
Table 7 Estimation results (macro variable: PMI)

	HN-GARCH (MPK)		Macro-GARCH (MPK)		SpillMacro-GARCH(MPK)		Macro-GARCH (NonMPK)		SpillMacro-GARCH (NonMPK)	
	Estimate	S. E.	Estimate	S. E.	Estimate	S. E.	Estimate	S. E.	Estimate	S. E.
λ_d					2.446 *	1.454			2.445	1.569
β_d					0.738 ***	0.014			0.658 ***	0.017
α_d					0.000 ***	0.000			0.000 ***	0.000
γ_d					249.660 ***	13.797			402.540 ***	10.581
m_d					-0.000	0.000			0.000	0.000
θ_d					0.076 ***	0.010			0.050 ***	0.008
ω_d					4.600 ***	0.868			4.547 ***	0.931
$\tilde{\lambda}_d$					1.498	3.861				
φ_d									0.945 ***	0.150
λ_f	1.550 **	0.757	1.548	0.990	1.530	1.842	1.544	1.064	1.517	1.083
κ_f					0.143 ***	0.025			-0.114 ***	0.017
β_f	0.949 ***	0.010	0.943 ***	0.004	0.931 ***	0.006	0.950 ***	0.002	0.983 ***	0.001
α_f	0.000 ***	0.000	0.000 ***	0.000	0.000 ***	0.000	0.000 ***	0.000	0.000 ***	0.000
γ_f	18.197 *	10.238	18.612 ***	3.847	18.150 ***	4.188	37.116 ***	5.042	20.914 ***	7.282
κ_{hf}					0.040 ***	0.010			0.004 ***	0.001
m_f	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.001 ***	0.000	-0.000 ***	0.000
θ_f			0.227 ***	0.047	0.156 **	0.070	0.589 ***	0.038	0.305 ***	0.028
ω_f			4.757 ***	1.297	4.719 *	2.853	5.665 ***	0.337	3.108 ***	0.288
φ_f							0.936 ***	0.014	0.999 ***	0.021
β'_d					0.962				0.979	
β'_f	0.953		0.947		0.935		0.954		0.984	
Diagnostic test										
Log-lik	9 646		9 646		21 204		16 795		27 806	
AIC	-19 282		-19 277		-42 374		-33 573		-55 576	
BIC	-19 252		-19 234		-42 269		-33 519		-55 454	
JB stat.	213.261 ***		198.233 ***		214.318 ***		196.796 ***		1 280.492 ***	
KS stat.	0.069 ***		0.064 ***		0.067 ***		0.080 ***		0.048 ***	
LBQ(5)	7.717		8.147		9.343 *		8.218		8.989	
ARCH(5)	56.681 ***		56.815 ***		67.086 ***		54.820 ***		145.822 ***	

注：该表报告宏观变量为 PMI 的参数估计值。SpillMacro-GARCH (NonMPK) 模型和 Macro-GARCH (NonMPK) 采用了联合估计法 (joint estimation), 参见第 4 节介绍, 其余模型采用拟极大似然方法 (quasi-maximum likelihood)。星号 *, ** 和 *** 依次表示在 10%, 5% 和 1% 的显著性水平下拒绝原假设。数据区间: 2005 年 10 月 3 日 ~ 2019 年 2 月 8 日。

基于 PMI 数据, 表 8 和表 9 依次报告了 IVRMSE 和 VWRMSE 为准则的期权定价表现。结果显示这些模型的期权定价表现与基于 PPI 数据一致: SpillMacro-GARCH (NonMPK) 的定价误差小于 Macro-GARCH (NonMPK) 值, 反映了具有溢出效应的模型优于其它模型; 非单调定价核在期权定价中扮演着重要角色, 即体现在 Macro-

GARCH(NonMPK) 的定价误差小于 Macro-GARCH (MPK); 最后, 考虑了宏观基本面对波动率的冲击也能改善定价能力, 这从 Macro-GARCH (MPK) 的定价误差小于 HN-GARCH (MPK) 和 RollWin (MPK) 所反映。因此, 宏观数据的改变并没有颠覆已获得的结论, 可见已有的结论是稳健的。

表 8 基于 IVRMSE 的期权定价表现 (宏观变量: PMI)
Table 8 IVRMSE-based option pricing performance (macro variable: PMI)

	RollWin (MPK)	HN-GARCH (MPK)	Macro-GARCH (MPK)	Macro-GARCH (NonMPK)	SpillMacro-GARCH (NonMPK)
Panel A: Overall IVRMSE					
All	0.154	0.127	0.110	0.059	0.055
Panel B: Sorted by Moneyness					
(0.00, 0.93]	0.096	0.078	0.064	0.068	0.058
(0.93, 0.97]	0.145	0.115	0.097	0.044	0.041
(0.97, 0.99]	0.150	0.119	0.101	0.042	0.040
(0.99, 1.00]	0.157	0.122	0.105	0.043	0.040
(1.00, 1.01]	0.174	0.142	0.124	0.054	0.051
(1.01, ∞)	0.227	0.206	0.186	0.098	0.101
Panel C: Sorted by maturity					
[14, 30]	0.126	0.097	0.086	0.064	0.063
(30, 90]	0.146	0.115	0.100	0.055	0.052
(90, 150]	0.166	0.141	0.121	0.058	0.053
(150, 180]	0.163	0.143	0.124	0.066	0.064
Panel D: Sorted by implied volatility					
(0.00, 0.14]	0.221	0.185	0.166	0.075	0.075
(0.14, 0.18]	0.157	0.124	0.104	0.022	0.023
(0.18, 0.22]	0.113	0.093	0.073	0.030	0.024
(0.22, ∞)	0.063	0.054	0.041	0.072	0.064

注: 该表报告了基于表 7 结果计算的 IVRMSE 损失值。按照货币性 (*moneyness*), 剩余到期日 (*M*) 和隐含波动率 (*IV*) 的分类计算了每个模型的 IVRMSE 值, 见式(25)。其值越小, 则意味着模型的期权定价越准确。期权数据区间: 2015 年 2 月 9 日 ~ 2019 年 2 月 8 日。

表 9 基于 VWRMSE 的期权定价表现 (宏观变量: PMI)
Table 9 VWRMSE-based option pricing performance (macro variable: PMI)

	RollWin (MPK)	HN-GARCH (MPK)	Macro-GARCH (MPK)	Macro-GARCH (NonMPK)	SpillMacro-GARCH (NonMPK)
Panel A: Overall VWRMSE					
All	0.159	0.127	0.107	0.046	0.043
Panel B: Sorted by moneyness					
(0.00, 0.93]	0.127	0.101	0.079	0.051	0.045
(0.93, 0.97]	0.181	0.142	0.121	0.046	0.043
(0.97, 0.99]	0.163	0.131	0.112	0.044	0.042
(0.99, 1.00]	0.164	0.129	0.112	0.046	0.043
(1.00, 1.01]	0.162	0.131	0.113	0.046	0.043
(1.01, ∞)	0.142	0.120	0.100	0.041	0.039
Panel C: Sorted by maturity					
[14, 30]	0.109	0.073	0.062	0.049	0.048
(30, 90]	0.156	0.118	0.100	0.042	0.040
(90, 150]	0.175	0.144	0.122	0.048	0.042
(150, 180]	0.159	0.137	0.115	0.049	0.048
Panel D: Sorted by implied volatility					
(0.00, 0.14]	0.217	0.173	0.152	0.053	0.051
(0.14, 0.18]	0.170	0.132	0.111	0.026	0.026
(0.18, 0.22]	0.129	0.105	0.082	0.027	0.022
(0.22, ∞)	0.071	0.060	0.044	0.058	0.053

注: 该表报告了基于表 7 结果计算的 VWRMSE 损失值。按照货币性 (*moneyness*), 剩余到期日 (*M*) 和隐含波动率 (*IV*) 的分类计算了每个模型的 VWRMSE 值, 见式(21)。其值越小, 则意味着模型的期权定价越准确。期权数据区间: 2015 年 2 月 9 日 ~ 2019 年 2 月 8 日。

5.2 改变样本区间的分析

为了防止由于采用了特殊时间段数据而获得有利的结论问题,即数据挖掘(data mining),因此需要在改变样本区间后再评估各个模型的期权定价能力.具体做法是,把原估计区间缩短1年,即由原来的2005年2月23日~2019年2月8日变为2005年2月23日~2018年2月8日.相应的,期权数据由2015年2月9日~2019年2月8日(4年)变为2015年2月9日~2018年2月8日(3年).这种样本区间选取主要考虑了我国上市的期权合约数量逐年增加的特点,即前3年的期权合约数为1724张,而仅第4年就有1239张.这相当于大致把总的2963张期权合约数一分为二.

表10和表11计算了子样本区间在2015年2月9日~2018年2月8日期权定价表现^⑥.容易观测到与基于全样本的期权表现(表5和表6)相一致,再次验证了结论的可靠性.

5.3 样本外定价能力分析

由于样本内拟合效果与样本外的表现没有必

然的联系,所以还需进一步观察模型的样本外表现.为此,基于5.2节的区间划分,把区间2005年2月23日~2018年2月8日的子样本作为训练数据,用于估计模型参数,而2018年2月9日~2019年2月8日的期权数据用于样本外分析.具体操作如下:基于训练数据,先估计出每个模型的参数,然后通过波动的动态过程获得样本外的条件方差,如在SpillMacro-GARCH(NonMPK)模型中,利用式(15)即可外推获得样本外方差.需要注意的是,在这里没有采用滚动窗方法获得每个模型的预测方差,主要原因在于引入了期权数据后的模型估计非常耗时(time consuming).最后只能选择伪样本外分析(pseudo-out-of-sample analysis).该方法在期权定价文献^[5,31]和波动率预测文献^[17]被广泛使用.

表12和表13分别计算了样本外的IVRMSE和VWRMSE的损失值.容易看出,无论是基于IVRMSE准则,还是基于VWRMSE准则,每个模型的定价表现排序与表5和表6相一致.进一步说明了所获的结论是稳健的.

表10 基于IVRMSE的期权定价表现

Table 10 IVRMSE-based option pricing performance

	RollWin (MPK)	HN-GARCH (MPK)	Macro-GARCH (MPK)	Macro-GARCH (NonMPK)	SpillMacro-GARCH (NonMPK)
Panel A: Overall IVRMSE					
All	0.183	0.150	0.139	0.053	0.046
Panel B: Sorted by moneyness					
(0.00,0.93]	0.134	0.107	0.099	0.075	0.074
(0.93,0.97]	0.172	0.137	0.126	0.045	0.029
(0.97,0.99]	0.173	0.139	0.127	0.042	0.028
(0.99,1.00]	0.180	0.142	0.131	0.037	0.030
(1.00,1.01]	0.196	0.161	0.150	0.045	0.043
(1.01,∞)	0.247	0.221	0.208	0.082	0.079
Panel C: Sorted by maturity					
[14,30]	0.175	0.124	0.117	0.053	0.043
(30,90]	0.179	0.137	0.128	0.048	0.039
(90,150]	0.186	0.159	0.146	0.051	0.042
(150,180]	0.186	0.162	0.150	0.066	0.064
Panel D: Sorted by implied volatility					
(0.00,0.14]	0.221	0.184	0.171	0.051	0.049
(0.14,0.18]	0.161	0.126	0.115	0.042	0.019
(0.18,0.22]	0.119	0.095	0.088	0.043	0.040
(0.22,∞)	0.095	0.082	0.076	0.118	0.108

注:该表基于子区间(2005年2月23日~2018年2月8日)数据估计结果来计算的IVRMSE损失值.按照货币性(moneyness),剩余到期日(M)和隐含波动率(IV)的分类计算了每个模型的IVRMSE值,见式(25).其值越小,则意味着模型的期权定价越准确.期权数据区间:2015年2月9日~2018年2月8日.

⑥ 新区间(2005年2月23日~2018年2月8日)的参数估计结果与表4相近,为了节约版面,这里没有给出,感兴趣的读者可向作者索取.

表 11 基于 VWRMSE 的期权定价表现
Table 11 VWRMSE-based option pricing performance

	RollWin (MPK)	HN-GARCH (MPK)	Macro-GARCH (MPK)	Macro-GARCH (NonMPK)	SpillMacro-GARCH (NonMPK)
Panel A: Overall VWRMSE					
All	0.194	0.155	0.143	0.043	0.034
Panel B: Sorted by moneyness					
(0.00,0.93]	0.181	0.139	0.127	0.062	0.057
(0.93,0.97]	0.217	0.172	0.157	0.045	0.029
(0.97,0.99]	0.189	0.153	0.140	0.041	0.029
(0.99,1.00]	0.189	0.151	0.139	0.037	0.031
(1.00,1.01]	0.187	0.152	0.140	0.033	0.028
(1.01,∞)	0.172	0.146	0.133	0.035	0.032
Panel C: Sorted by maturity					
[14,30]	0.166	0.110	0.103	0.036	0.023
(30,90]	0.197	0.147	0.136	0.039	0.028
(90,150]	0.200	0.167	0.153	0.043	0.032
(150,180]	0.183	0.157	0.144	0.052	0.048
Panel D: Sorted by implied volatility					
(0.00,0.14]	0.228	0.184	0.169	0.036	0.033
(0.14,0.18]	0.177	0.139	0.127	0.041	0.015
(0.18,0.22]	0.138	0.111	0.102	0.036	0.031
(0.22,∞)	0.100	0.087	0.079	0.097	0.089

注:该表基于子区间(2005年2月23日~2018年2月8日)数据估计结果来计算的VWRMSE损失值.按照货币性(*moneyness*),剩余到期日(*M*)和隐含波动率(*IV*)的分类计算了每个模型的VWRMSE值,见式(21).其值越小,则意味着模型的期权定价越准确.期权数据区间:2015年2月9日~2018年2月8日.

表 12 基于 IVRMSE 的样本外期权定价表现
Table 12 IVRMSE-based out-of-sample performance

	RollWin (MPK)	HN-GARCH (MPK)	Macro-GARCH (MPK)	Macro-GARCH (NonMPK)	SpillMacro-GARCH (NonMPK)
Panel A: Overall IVRMSE					
All	0.101	0.093	0.086	0.050	0.044
Panel B: Sorted by moneyness					
(0.00,0.93]	0.072	0.062	0.054	0.049	0.039
(0.93,0.97]	0.077	0.067	0.058	0.045	0.042
(0.97,0.99]	0.080	0.066	0.058	0.033	0.025
(0.99,1.00]	0.085	0.068	0.060	0.038	0.025
(1.00,1.01]	0.105	0.100	0.092	0.059	0.057
(1.01,∞)	0.197	0.196	0.186	0.075	0.072
Panel C: Sorted by maturity					
[14,30]	0.099	0.090	0.085	0.060	0.065
(30,90]	0.095	0.089	0.081	0.040	0.036
(90,150]	0.110	0.099	0.090	0.060	0.039
(150,180]	0.103	0.103	0.092	0.041	0.036
Panel D: Sorted by implied volatility					
(0.00,0.14]	0.219	0.217	0.207	0.074	0.073
(0.14,0.18]	0.139	0.129	0.119	0.056	0.053
(0.18,0.22]	0.106	0.092	0.082	0.043	0.034
(0.22,∞)	0.058	0.051	0.043	0.047	0.040

注:该表基于子区间(2005年2月23日~2018年2月8日)数据估计结果来计算样本外的IVRMSE损失值.按照货币性(*moneyness*),剩余到期日(*M*)和隐含波动率(*IV*)的分类计算了每个模型的IVRMSE值,见式(25).其值越小,则意味着模型的期权定价越准确.期权数据区间:2018年2月9日~2019年2月8日.

表 13 基于 VWRMSE 的样本外期权定价表现
Table 13 VWRMSE-based out-of-sample performance

	RollWin (MPK)	HN-GARCH (MPK)	Macro-GARCH (MPK)	Macro-GARCH (NonMPK)	SpillMacro-GARCH (NonMPK)
Panel A: Overall VWRMSE					
All	0.161	0.152	0.147	0.042	0.034
Panel B: Sorted by moneyness					
(0.00, 0.93]	0.093	0.079	0.067	0.049	0.036
(0.93, 0.97]	0.087	0.076	0.066	0.045	0.040
(0.97, 0.99]	0.086	0.073	0.064	0.034	0.029
(0.99, 1.00]	0.090	0.073	0.065	0.040	0.028
(1.00, 1.01]	0.353	0.346	0.343	0.035	0.037
(1.01, ∞)	0.292	0.283	0.279	0.030	0.026
Panel C: Sorted by maturity					
[14, 30]	0.232	0.223	0.221	0.051	0.051
(30, 90]	0.122	0.113	0.106	0.034	0.030
(90, 150]	0.177	0.166	0.160	0.051	0.029
(150, 180]	0.102	0.096	0.086	0.033	0.025
Panel D: Sorted by implied volatility					
(0.00, 0.14]	0.298	0.289	0.286	0.029	0.026
(0.14, 0.18]	0.302	0.291	0.286	0.030	0.027
(0.18, 0.22]	0.149	0.132	0.123	0.039	0.029
(0.22, ∞)	0.102	0.095	0.090	0.046	0.038

注: 该表基于子区间(2005年2月23日~2018年2月8日)数据估计结果来计算样本外的 VWRMSE 损失值。按照货币性(moneyness)、剩余到期日(M)和隐含波动率(IV)的分类计算了每个模型的 VWRMSE 值, 见式(21)。其值越小, 则意味着模型的期权定价越准确。期权数据区间: 2018年2月9日~2019年2月8日。

6 结束语

结合金融市场存在的典型事实, 构建了一个新的两市场综合模型(SpillMacro-GARCH model), 并把它应用到期权定价领域。在两市场综合模型中, 设定其中一个主导市场对另一个追随市场产生溢出影响; 在两市场中还考虑了本国的宏观经济基本面影响, 以便有效连接商业经济周期和股票市场波动率之间的关系。由于 SpillMacro-GARCH 模型具有仿射(affine)结构, 在非单调定价核(non-monotonic pricing kernel)的假设前提下, 推导出了欧式期权价格的封闭解, 方便实证计算。新的研究框架适合于分析新兴市场的期权衍生品定价问题, 这是因为新兴市场除了受本国宏观经济基本面影响外, 还会受发达国家资本市场的冲击^[22-25]。

在实证方面, 基于上证 50ETF 期权数据, 全面比较了新模型和竞争模型的期权定价能力表现。

结果显示: 基于 IVRMSE 损失准则, 在其它条件保持不变的前提下, 允许存在溢出效应的两市场综合模型 SpillMacro-GARCH(NonMPK) 比单市场模型 Macro-GARCH(NonMPK) 的定价误差降低了 14.5%, 这说明考虑溢出效应可以有效提高期权定价的精度; 考虑宏观基本面因素的 Macro-GARCH(MPK) 比传统的 HN-GARCH(MPK) 和 RollWin(MPK) 的定价误差分布降低了 7.9% 和 24.0%。这与 Dorion^[5] 的研究结果相近, 他发现宏观因素能够降低期权定价误差约 18%。另外, 结果还显示非单调定价核比单调的定价核获得更高的定价精度。这可能是因为, 在估计非单调定价核模型的时候, 引入了期权数据从而获得更高的杠杠效应值, 进而提高期权定价效率^[2, 9, 10]。以上的结论对另外的损失函数评价标准 VWRMSE、不同的宏观基本面代理变量、改变研究样本区间和样本外定价能力分析均是稳健的。因此, 兼顾国际市场间的溢出机制和国内宏观经济基本面的影响, 可以提高期权定价的精度, 带来相应的经济价值。

参考文献:

- [1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. *Journal of Political Economy*, 1973, 81(3): 637 – 654.
- [2] Christoffersen P, Heston S, Jacobs K. Option valuation with conditional skewness[J]. *Journal of Econometrics*, 2006, 131(1–2): 253 – 284.
- [3] Christoffersen P, Jacobs K, Ornathanalai C. Dynamic jump intensities and risk premiums: Evidence from S & P 500 returns and options[J]. *Journal of Financial Economics*, 2012, 106(3): 447 – 472.
- [4] Christoffersen P, Feunou B, Jacobs K, et al. The economic value of realized volatility: Using high-frequency returns for option valuation[J]. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 2014, 49(3): 663 – 697.
- [5] Dorion C. Option valuation with macro-finance variables[J]. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 2016, 51(4): 1359 – 1389.
- [6] Duan J C. The GARCH option pricing model[J]. *Mathematical Finance*, 1995, 5(1): 13 – 32.
- [7] Escobar-Anel M, Rastegari J, Stentoft L. Option pricing with conditional GARCH models[J]. *European Journal of Operational Research*, 2021, 289(1): 350 – 363.
- [8] Heston S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. *The Review of Financial Studies*, 1993, 6(2): 327 – 343.
- [9] Heston S L, Nandi S. A closed-form GARCH option valuation model[J]. *The Review of Financial Studies*, 2000, 13(3): 585 – 625.
- [10] Majewski A A, Bormetti G, Corsi F. Smile from the past: A general option pricing framework with multiple volatility and leverage components[J]. *Journal of Econometrics*, 2015, 187(2): 521 – 531.
- [11] Ornathanalai C. Lévy jump risk: Evidence from options and returns[J]. *Journal of Financial Economics*, 2014, 112(1): 69 – 90.
- [12] 吴恒煜, 朱福敏, 温金明. 带杠杆效应的无穷纯跳跃 Lévy 过程期权定价[J]. *管理科学学报*, 2014, 17(8): 74 – 94.
Wu Hengyu, Zhu Fumin, Wen Jinming. Option pricing based on conditional infinite pure jump Lévy processes with leverage effect[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2014, 17(8): 74 – 94. (in Chinese)
- [13] 刘志东, 刘雯宇, 阮禹铭. Lévy 过程驱动非高斯 OU 随机波动率下的期权定价[J]. *管理科学学报*, 2019, 22(1): 17 – 43.
Liu Zhidong, Liu Wenyu, Ruan Yuming. Option pricing in non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck stochastic volatility processes driven by the Lévy process[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2019, 22(1): 17 – 43. (in Chinese)
- [14] Christoffersen P, Elkamhi R, Feunou B, et al. Option valuation with conditional heteroskedasticity and nonnormality[J]. *The Review of Financial Studies*, 2010, 23(5): 2139 – 2183.
- [15] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity[J]. *Journal of Econometrics*, 1986, 31(3): 307 – 327.
- [16] Glosten L R, Jagannathan R, Runkle D E. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks[J]. *The Journal of Finance*, 1993, 48(5): 1779 – 1801.
- [17] Engle R F, Ghysels E, Sohn B. Stock market volatility and macroeconomic fundamentals[J]. *Review of Economics and Statistics*, 2013, 95(3): 776 – 797.
- [18] 吴鑫育, 李心丹, 马超群. 考虑微观结构噪声的非仿射期权定价研究——基于上证 50ETF 期权高频数据的实证分析[J]. *中国管理科学*, 2017, 25(12): 99 – 108.
Wu Xinyu, Li Xindan, Ma Chaoqun. Non-affine option pricing in the presence of microstructure noises: An empirical study based on the high-frequency Shanghai 50ETF options data[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2017, 25(12): 99 – 108. (in Chinese)
- [19] 孙有发, 郭婷, 刘彩燕, 等. 股灾期间上证 50ETF 期权定价研究[J]. *系统工程理论与实践*, 2018, 38(11): 2721 – 2737.
Sun Youfa, Guo Ting, Liu Caiyan, et al. Pricing the SSE 50ETF options during stock market crash[J]. *Systems Engineer-*

- ing: Theory & Practice, 2018, 38(11): 2721–2737. (in Chinese)
- [20] 吴鑫育, 赵凯, 李心丹, 等. 时变风险厌恶下的期权定价——基于上证50ETF期权的实证研究[J]. 中国管理科学, 2019, 27(11): 11–22.
- Wu Xinyu, Zhao Kai, Li Xindan, et al. Option pricing under time-varying risk aversion: An empirical study based on SSE 50ETF options[J]. Chinese Journal of Management Science, 2019, 27(11): 11–22. (in Chinese)
- [21] 王西梅, 赵延龙, 史若诗, 等. 基于局部波动率模型的上证50ETF期权定价研究[J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(10): 2487–2501.
- Wang Ximei, Zhao Yanlong, Shi Ruoshi, et al. Empirical analysis of Shanghai 50ETF options pricing based on local volatility model[J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2019, 39(10): 2487–2501. (in Chinese)
- [22] Rapach D E, Strauss J K, Zhou G. International stock return predictability: What is the role of the United States? [J]. The Journal of Finance, 2013, 68(4): 1633–1662.
- [23] Wang Y, Pan Z, Wu C. Volatility spillover from the US to international stock markets: A heterogeneous volatility spillover GARCH model[J]. Journal of Forecasting, 2018, 37(3): 385–400.
- [24] 何德旭, 苗文龙. 国际金融市场波动溢出效应与动态相关性[J]. 数量经济技术经济研究, 2015, 11: 23–40.
- He Dexu, Miao Wenlong. Spillover effect and dynamic correlation among international financial market[J]. The Journal of Quantitative & Technical Economics, 2015, 11: 23–40. (in Chinese)
- [25] 汪冬华, 张裕恒. 基于Hawkes过程中美股市大幅波动互激效应的研究[J]. 中国管理科学, 2018, 26(7): 32–39.
- Wang Donghua, Zhang Yuheng. Research on large volatility mutually exciting effect of Chinese and American stock markets based on Hawkes process[J]. Chinese Journal of Management Science, 2018, 26(7): 32–39. (in Chinese)
- [26] Schwert G W. Why does stock market volatility change over time? [J]. The Journal of Finance, 1989, 44(5): 1115–1153.
- [27] Christoffersen P, Dorion C, Jacobs K, et al. Volatility components, affine restrictions, and nonnormal innovations[J]. Journal of Business & Economic Statistics, 2010, 28(4): 483–502.
- [28] Pan Z, Wang Y, Wu C, et al. Oil price volatility and macroeconomic fundamentals: A regime switching GARCH-MIDAS model[J]. Journal of Empirical Finance, 2017, 43: 130–142.
- [29] Black F, Cox J C. Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions[J]. The Journal of Finance, 1976, 31(2): 351–367.
- [30] Christoffersen P, Jacobs K, Wang Y. Option valuation with long-run and short-run volatility components[J]. Journal of Financial Economics, 2008, 90(3): 272–297.
- [31] Christoffersen P, Heston S, Jacobs K. Capturing option anomalies with a variance-dependent pricing kernel[J]. The Review of Financial Studies, 2013, 26(8): 1963–2006.
- [32] Babaoglu K, Christoffersen P, Heston S. Option valuation with volatility components, fat tails, and nonmonotonic pricing kernels[J]. The Review of Asset Pricing Studies, 2018, 8(2): 183–231.
- [33] Bollerslev T, Wooldridge J M. Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances[J]. Econometric Reviews, 1992, 11(2): 143–172.
- [34] Wooldridge J M. Estimation and inference for dependent processes[J]. Handbook of econometrics, 1994, 4: 2639–2738.
- [35] Trolle A B, Schwartz E S. Unspanned stochastic volatility and the pricing of commodity derivatives[J]. The Review of Financial Studies, 2009, 22(11): 4423–4461.
- [36] Hu F, Zidek J V. The weighted likelihood[J]. Canadian Journal of Statistics, 2002, 30(3): 347–371.
- [37] Renault E. Econometric models of option pricing errors[J]. Econometric Society Monographs, 1997, 28: 223–278.
- [38] Bollerslev T, Tauchen G, Zhou H. Expected stock returns and variance risk premia[J]. The Review of Financial Studies, 2009, 22(11): 4463–4492.
- [39] Byun S J, Jeon B H, Min B, et al. The role of the variance premium in Jump-GARCH option pricing models[J]. Journal of Banking & Finance, 2015, 59: 38–56.
- [40] 刘超, 郑莹, 刘宸琦, 等. 股市是经济的晴雨表吗? ——基于2005~2017年沪深300指数和采购经理人指数数据[J]. 系统工程理论与实践, 2020, 40(1): 55–68.
- Liu Chao, Zheng Ying, Liu Chenqi, et al. Is the stock market a barometer of the economy? Based on 2005~2017 years' CSI 300 index and PMI data[J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2020, 40(1): 55–68. (in Chinese)

International spillover, domestic fundamentals and option pricing

PAN Zhi-yuan^{1, 2}, LIU Li^{3*}, LIU Zi-ru¹

1. Institute of Chinese Financial Studies, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 610074, China;
2. Collaborative Innovation Center of Financial Security, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 610074, China;
3. School of Finance, Nanjing Audit University, Nanjing 211815, China

Abstract: This paper develops a new comprehensive model for two markets: The dominant and the following market. This model can capture the spillover effect from international market and domestic fundamentals. A closed-form solution is derived for European option pricing assuming non-monotonic pricing kernel. Using the 50ETF option data, the paper finds that accounting for the spillover effect reduces implied volatility root-mean-square error (IVRMSE) by 14.5%. The model with macroeconomic fundamentals has a 7.9% and 24.0% improvement over the traditional GARCH model and rolling window method, respectively. Further, the non-monotonic pricing kernel results are with a higher pricing accuracy than its monotonic counterpart. This result is consistent when using an alternative evaluation criterion of Vega weighted root-mean-square error (VWRMSE). Our findings are robust to different macroeconomic variables, various evaluation periods, and out-of-sample option pricing exercise.

Key words: spillover effect; macroeconomic fundamentals; non-monotonic pricing kernel; option pricing

附录:

命题 1 的证明 如果等价鞅测度 (EMM) 存在, 那么追随市场的资产期望收益率在 t 期中的 i 时刻至 $i+1$ 时刻必须等于无风险利率^⑦

$$E_{i,t}^Q \left[\frac{S_{f,i+1,t}}{S_{f,i,t}} \right] \equiv \exp(r_f) \quad (\text{A1})$$

利用追随市场模型设定 (4) 和定价核 (9), 有

$$\begin{aligned} E_{i,t}^Q \left[\frac{S_{f,i+1,t}}{S_{f,i,t}} \right] &= E_{i,t} \left[Z_{i+1,t} \exp \left(r_f + \left(\tilde{\lambda}_d - \frac{\kappa_f^2}{2} \right) h_{d,i+1,t} + \left(\lambda_f - \frac{1}{2} \right) h_{f,i+1,t} + \kappa_f z_{d,i+1,t} + z_{f,i+1,t} \right) \right] \\ &= \frac{\exp \left(r_f + \left(\tilde{\lambda}_d - \frac{\kappa_f^2}{2} \right) h_{d,i+1,t} + \left(\lambda_f - \frac{1}{2} \right) h_{f,i+1,t} \right)}{E_{i,t} \left[\exp \left(v_{2,d,i+1,t} z_{d,i+1,t}^2 + v_{1,d,i+1,t} z_{d,i+1,t} + v_{2,f,i+1,t} z_{f,i+1,t}^2 + v_{1,f,i+1,t} z_{f,i+1,t} \right) \right]} \times \\ &\quad E_{i,t} \left[v_{2,d,i+1,t} z_{d,i+1,t}^2 + (v_{1,d,i+1,t} + \kappa_f) z_{d,i+1,t} + v_{2,f,i+1,t} z_{f,i+1,t}^2 + (v_{1,f,i+1,t} + 1) z_{f,i+1,t} \right] \\ &= \exp(r_f) \times \exp \left(\left(\tilde{\lambda}_d - \frac{\kappa_f^2}{2} + \frac{2 v_{1,d,i+1,t} \kappa_f + \kappa_f^2}{2(1 - 2 v_{2,d,i+1,t} h_{d,i+1,t})} \right) h_{d,i+1,t} \right) \times \\ &\quad \exp \left(\left(\lambda_f - \frac{1}{2} + \frac{2 v_{1,f,i+1,t} + 1}{2(1 - 2 v_{2,f,i+1,t} h_{f,i+1,t})} \right) h_{f,i+1,t} \right) \\ &= \exp(r_f) \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

在上式计算过程中, 多次利用了一个事实 $E[\exp(az^2 + 2abz)] = \exp(-\frac{1}{2} \ln(1 - 2a) + \frac{2a^2 b^2}{1 - 2a})$, 其中 z 服从标准正态分布. 条件方差过程始终保持正值: $h_{f,i+1,t}, h_{d,i+1,t} > 0$, 为了使得最后一个等式成立以满足条件 (A1), 则令

^⑦ 为了节省篇幅, 这里只证明追随市场的等价鞅测度需要满足的条件, 而主导市场的情况可以视为追随市场的一种特殊情况, 故略去. 下文命题 2 和命题 3 的证明也如此.

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_d - \frac{\kappa_f^2}{2} + \frac{2v_{1,d,i+1,t}\kappa_f + \kappa_f^2}{2(1-2v_{2,d,i+1,t}h_{d,i+1,t})} &= 0 \\ \lambda_f - \frac{1}{2} + \frac{2v_{1,f,i+1,t} + 1}{2(1-2v_{2,f,i+1,t}h_{f,i+1,t})} &= 0 \end{aligned} \tag{A3}$$

同理,在主导市场模型也满足条件 $E_{i,t}^Q\left[\frac{S_{d,i+1,t}}{S_{d,i,t}}\right] = \exp(r_d)$ 时,则有

$$\lambda_d - \frac{1}{2} + \frac{2v_{1,d,i+1,t} + 1}{2(1-2v_{2,d,i+1,t}h_{d,i+1,t})} = 0 \tag{A4}$$

进一步,假设 $v_{1,d,i+1,t} = v_{1,d}$, $v_{1,f,i+1,t} = v_{1,f}$, 以及 $v_{2,d,i+1,t} = \frac{1-\varphi_d}{2h_{d,i+1,t}}$, $v_{2,f,i+1,t} = \frac{1-\varphi_f}{2h_{f,i+1,t}}$. 经过简单的整理得到命题 1.

证毕.

命题 2 的证明 在第 2.2 节中,已经给了风险中测度(\mathbb{Q})下随机变量 $z_{d,i+1,t}^*$ 和 $z_{f,i+1,t}^*$ 的分布. 现在,基于风险中性测度(\mathbb{Q})下的 $z_{d,i+1,t}^*$ 和 $z_{f,i+1,t}^*$ 重新表示式(4)和式(7),则有

$$\begin{aligned} R_{f,i+1,t} &= r_f + \left(\tilde{\lambda}_d - \frac{\kappa_f^2}{2}\right)h_{d,i+1,t} + \left(\lambda_f - \frac{1}{2}\right)h_{f,i+1,t} + \kappa_f(z_{d,i+1,t}^* + v_{1,d}h_{d,i+1,t}^*) + (z_{f,i+1,t}^* + v_{1,f}h_{f,i+1,t}^*) \\ h_{f,i+1,t} &= \tau_{f,t} + \beta_f h_{f,i,t} + \frac{\alpha_f}{h_{f,i,t}}(z_{f,i,t}^* + v_{1,f}h_{f,i,t}^* - \gamma_f h_{f,i,t}^*)^2 \end{aligned} \tag{A5}$$

结合命题 1 的结论,经过简单整理,式(A5)又可写为

$$R_{f,i+1,t} = r_f - \frac{\kappa_f^2}{2}h_{d,i+1,t}^* - \frac{1}{2}h_{f,i+1,t}^* + \kappa_f z_{d,i+1,t}^* + z_{f,i+1,t}^* \tag{A6}$$

$$h_{f,i+1,t}^* = \tau_{f,t}^* + \beta_f h_{f,i,t}^* + \frac{\alpha_f^*}{h_{f,i,t}^*}(z_{f,i,t}^* - \gamma_f^* h_{f,i,t}^*)^2 \tag{A7}$$

其中 $\tau_{f,t}^* = \frac{\tau_{f,t}}{\varphi_f}$, $\alpha^* = \frac{\alpha}{\varphi_f^2}$ 和 $\gamma_f^* = \gamma_f \varphi_f - v_{1,f}$. 容易看出,在风险中性测度(\mathbb{Q})下,资产收益率并不受风险价格的影响,见式(A6). 这与风险中性定价的理论相吻合,

证毕.

在证明命题 3 之前,需要先证明以下的引理.

引理 1 假设追随市场的收益率 $R_{f,i+1,t}$,条件方差驱动过程 $h_{f,i+1,t}$ 和主动市场的条件方差驱动过程 $h_{d,i+1,t}$ 依次由式(14),式(15)和式(13)所示,则在风险中性测度(\mathbb{Q})下有

$$E_{i,t}^Q[\exp(uR_{f,i+1,t} + \psi_f h_{f,i+2,t}^* + \psi_d h_{d,i+2,t}^*)] = \exp(A_f(u, \psi_f, \psi_d)h_{f,i+1,t}^* + A_d(u, \psi_f, \psi_d)h_{d,i+1,t}^* + B(u, \psi_f, \psi_d)) \tag{A8}$$

其中 $A_f(u, \psi_f, \psi_d)$, $A_d(u, \psi_f, \psi_d)$ 和 $B(u, \psi_f, \psi_d)$ 被下文式(A14)所定义.

引理 1 的证明 把式(14),式(15)和式(13)代入式(A8),便有

$$\begin{aligned} E_{i,t}^Q[\exp(uR_{f,i+1,t} + \psi_f h_{f,i+2,t}^* + \psi_d h_{d,i+2,t}^*)] &= \\ E_{i,t}^Q\left[\exp\left(u\left(r_f - \frac{\kappa_f^2}{2}h_{d,i+1,t}^* - \frac{1}{2}h_{f,i+1,t}^* + \kappa_f z_{d,i+1,t}^* + z_{f,i+1,t}^*\right) + \psi_f\left(\tau_{f,t}^* + \beta_f h_{f,i+1,t}^* + \frac{\alpha_f^*}{h_{f,i+1,t}^*}(z_{f,i+1,t}^* - \gamma_f^* h_{f,i+1,t}^*)^2\right) + \right. \right. \\ &\left. \left. \psi_d\left(\tau_{d,t}^* + \beta_d h_{d,i+1,t}^* + \frac{\alpha_d^*}{h_{d,i+1,t}^*}(z_{d,i+1,t}^* - \gamma_d^* h_{d,i+1,t}^*)^2\right)\right)\right] \end{aligned} \tag{A9}$$

把非随机项移到期望符号外面,则式(A9)又等于

$$\begin{aligned} \exp\left(u\left(r_f - \frac{\kappa_f^2}{2}h_{d,i+1,t}^* - \frac{1}{2}h_{f,i+1,t}^*\right) + \psi_f(\tau_{f,t}^* + \beta_f h_{f,i+1,t}^*) + \psi_d(\tau_{d,t}^* + \beta_d h_{d,i+1,t}^*)\right) \times \\ E_{i,t}^Q\left[\exp\left(u(\kappa_f z_{d,i+1,t}^* + z_{f,i+1,t}^*) + \psi_f \frac{\alpha_f^*}{h_{f,i+1,t}^*}(z_{f,i+1,t}^* - \gamma_f^* h_{f,i+1,t}^*)^2 + \psi_d \frac{\alpha_d^*}{h_{d,i+1,t}^*}(z_{d,i+1,t}^* - \gamma_d^* h_{d,i+1,t}^*)^2\right)\right] \equiv I \times II \end{aligned} \tag{A10}$$

为了求解第 II 部分的条件期望,需要展开平方项并合并同类项,且随机变量 $z_{f,i+1,t}^* = \sqrt{h_{f,i+1,t}^*} \in_{f,i+1,t}^*$ 和 $z_{d,i+1,t}^* = \sqrt{h_{d,i+1,t}^*} \in_{d,i+1,t}^*$,其中 $\in_{f,i+1,t}^* \sim N(0,1)$ 和 $\in_{d,i+1,t}^* \sim N(0,1)$,则有

$$\begin{aligned} II &= E_{i,t}^Q\left[\exp\left(\psi_f \alpha_f^* \gamma_f^{*2} h_{f,i+1,t}^* + \psi_d \alpha_d^* \gamma_d^{*2} h_{d,i+1,t}^* + (u - 2\psi_f \alpha_f^* \gamma_f^*) \sqrt{h_{f,i+1,t}^*} \in_{f,i+1,t}^* + \psi_f \alpha_f^* \in_{f,i+1,t}^{*2} + \right. \right. \\ &\left. \left. (u\kappa_f - 2\psi_d \alpha_d^* \gamma_d^*) \sqrt{h_{d,i+1,t}^*} \in_{d,i+1,t}^* + \psi_d \alpha_d^* \in_{d,i+1,t}^{*2}\right)\right] \\ &= E_{i,t}^Q\left[\exp(\psi_f \alpha_f^* \gamma_f^{*2} h_{f,i+1,t}^* + (u - 2\psi_f \alpha_f^* \gamma_f^*) \sqrt{h_{f,i+1,t}^*} \in_{f,i+1,t}^* + \psi_f \alpha_f^* \in_{f,i+1,t}^{*2})\right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_{i,t}^Q \left[\exp(\psi_d \alpha_d^* \gamma_d^{*2} h_{d,i+1,t}^* + (u\kappa_f - 2\psi_d \alpha_d^* \gamma_d^*) \sqrt{h_{d,i+1,t}^*} \in_{d,i+1,t}^* + \psi_d \alpha_d^* \in_{d,i+1,t}^{*2}) \right] \\
& = \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln(1 - 2a_f) + \ln(1 - 2a_d)) + c_f h_{f,i+1,t}^* + c_d h_{d,i+1,t}^*\right)
\end{aligned} \tag{A11}$$

其中

$$\begin{aligned}
a_f &= \psi_f \alpha_f^*, \quad a_d = \psi_d \alpha_d^*, \\
b_f &= \frac{u - 2\psi_f \alpha_f^* \gamma_f^*}{2\psi_f \alpha_f^*}, \quad b_d = \frac{u\kappa_f - 2\psi_d \alpha_d^* \gamma_d^*}{2\psi_d \alpha_d^*}, \\
c_f &= \psi_f \alpha_f^* \gamma_f^{*2} + \frac{2a_f^2 b_f^2}{1 - 2a_f}, \quad c_d = \psi_d \alpha_d^* \gamma_d^{*2} + \frac{2a_d^2 b_d^2}{1 - 2a_d}
\end{aligned} \tag{A12}$$

最后,整理式(A10)和式(A11),则式(A9)的期望为

$$E_{i,t}^Q [\exp(uR_{f,i+1,t} + \psi_f h_{f,i+2,t}^* + \psi_d h_{d,i+2,t}^*)] = \exp(A_f(u, \psi_f, \psi_d) h_{f,i+1,t}^* + A_d(u, \psi_f, \psi_d) h_{d,i+1,t}^* + B(u, \psi_f, \psi_d)) \tag{A13}$$

其中

$$\begin{aligned}
A_f(u, \psi_f, \psi_d) &= c_f - \frac{u}{2} + \psi_f \beta_f, \\
A_d(u, \psi_f, \psi_d) &= c_d - \frac{u\kappa_f^2}{2} + \psi_d \beta_d, \\
B(u, \psi_f, \psi_d) &= -\frac{1}{2}(\ln(1 - 2a_f) + \ln(1 - 2a_d)) + u r_f + \psi_f \tau_{f,t}^* + \psi_d \tau_{d,t}^*
\end{aligned} \tag{A14}$$

证毕.

命题 3 的证明 因为 SpillMacro-GARCH 模型设定具有仿射(affine)架构,所以可以猜测(conjecture) M 期的条件矩母函数为

$$\begin{aligned}
\Psi_{i,i+M,t}^Q(u) &= E_{i,t}^Q \left[\exp\left(u \sum_{j=1}^M R_{f,i+j,t}\right) \right] \\
&= \exp(C_f(u, M) h_{f,i+1,t}^* + C_d(u, M) h_{d,i+1,t}^* + D(u, M))
\end{aligned} \tag{A15}$$

自然地,期限为 $M + 1$ 时的条件矩母函数为

$$\begin{aligned}
\Psi_{i,i+M+1,t}^Q(u) &= E_{i,t}^Q \left[\exp\left(u \sum_{j=1}^{M+1} R_{f,i+j,t}\right) \right] \\
&= E_{i,t}^Q \left[E_{i+1,t}^Q \left[\exp\left(u \sum_{j=1}^{M+1} R_{f,i+j,t}\right) \right] \right] \\
&= E_{i,t}^Q \left[\exp(uR_{f,i+1,t}) E_{i+1,t}^Q \left[\exp\left(u \sum_{j=2}^{M+1} R_{f,i+j,t}\right) \right] \right] \\
&= E_{i,t}^Q \left[\exp(uR_{f,i+1,t}) E_{i+1,t}^Q \left[\exp\left(u \sum_{k=1}^M R_{f,i+1+k,t}\right) \right] \right] \\
&= E_{i,t}^Q [\exp(uR_{f,i+1,t} + C_f(u, M) h_{f,i+2,t}^* + C_d(u, M) h_{d,i+2,t}^* + D(u, M))] \\
&= \exp(A_f(u, C_f(u, M), C_d(u, M)) h_{f,i+1,t}^* + A_d(u, C_f(u, M), C_d(u, M)) h_{d,i+1,t}^* + \\
&\quad B(u, C_f(u, M), C_d(u, M)) + D(u, M))
\end{aligned} \tag{A16}$$

其中第二个等式利用迭代(iterated)条件期望公式;最后一个等式利用引理 1 的结论. 最后,令(A15)中 $M \leftarrow M + 1$, 则必有式(A15)和式(A16)相等,即得到

$$\begin{aligned}
C_f(u, M + 1) &= A_f(u, C_f(u, M), C_d(u, M)), \\
C_d(u, M + 1) &= A_d(u, C_f(u, M), C_d(u, M)), \\
D(u, M + 1) &= B(u, C_f(u, M), C_d(u, M)) + D(u, M)
\end{aligned} \tag{A17}$$

它们的初始条件分别为

$$\begin{aligned}
C_f(u, 1) &= A_f(u, 0, 0), \\
C_d(u, 1) &= A_d(u, 0, 0), \\
D(u, 1) &= B(u, 0, 0)
\end{aligned} \tag{A18}$$

证毕.