

doi:10.19920/j.cnki.jmsc.2023.01.006

# 引入方差/波动率资产的动态最优投资组合<sup>①</sup>

周春阳, 吴冲锋

(上海交通大学安泰经济与管理学院, 上海 200030)

**摘要:** 本文在构建投资组合时,除了包含传统的股票资产和无风险资产,还引入方差/波动率资产.给出了动态最优投资组合的显式解,发现方差/波动率资产价格是影响投资组合权重的重要状态变量.方差/波动率资产价格反映了市场的波动程度,股票资产以及方差/波动率资产的最优权重都会随着方差/波动率资产价格的增加而降低.基于美国市场的实证研究表明,组合中加入 VIX 期货有助于分散组合风险和组合样本外绩效,而组合中不包含 VIX 期货会导致投资者遭受一定的经济成本.

**关键词:** 动态投资组合; 方差/波动率资产; 经济成本

**中图分类号:** F830 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2023)01-0105-11

## 0 引言

波动率是重要的市场变量,对投资者进行投资决策和风险管理具有重要的参考价值.例如,芝加哥期权交易所基于期权价格构建的波动率指数 VIX (volatility index),反映了投资者对未来市场波动的预期<sup>②</sup>,已经成为投资者把握市场情绪和管理投资风险的重要指标.众多研究文献指出,VIX 指数对未来市场收益率、波动率和相关性有显著的预测能力<sup>[1-3]</sup>,投资者在构建组合时考虑期权隐含波动率信息能够提高组合的投资绩效<sup>[4,5]</sup>.

由于波动率变动同股票收益率呈负相关关系,特别是在不利市场条件下两者的相关性更低<sup>[5]</sup>,因而以方差/波动率为标的的方差/波动率资产,能够为投资者提供一个良好的分散股票风险的工具.在美国等发达国家金融市场,从场外柜

台市场的方差互换,到交易所市场基于波动率指数派生出来的 VIX 期货、期权、ETF 和 ETN 等金融产品,交易都非常活跃.在学术研究方面,Dash 和 Moran<sup>[6]</sup>、Szado<sup>[7,8]</sup> 和 Yan 等<sup>[9]</sup> 的研究表明,在传统的股票债券等资产组合中加入 VIX 期货或 VIX 期权等波动率资产有助于分散投资组合(下端)风险,Hilal 等<sup>[10]</sup> 基于极值理论研究如何使用 VIX 期货对冲股票市场的黑天鹅风险.

可见,方差/波动率资产可以从如下两个方面影响投资者的投资决策:一方面,方差/波动率资产的价格反映了投资者对市场波动的预期,是重要的市场状态变量;另一方面,方差/波动率资产同股票收益率呈负相关关系,有助于分散股票组合风险.以往文献往往单独考虑上述两个因素对最优投资组合的影响.本文在传统的股票资产和无风险资产组合中引入方差/波动率资产,在投资者具有幂效用函数的假设下,给出了动态最优投

① 收稿日期:2020-12-10;修订日期:2022-01-24.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(71771144);国家自然科学基金资助重大项目(71790592).

作者简介:周春阳(1980—),男,山东荣成人,博士,副研究员. Email: cyzhou@sjtu.edu.cn

② 计算 VIX 波动率指数的主要思想是通过一系列标普 500 指数虚值期权来复制 30 天期限的方差互换,由无套利定价原理可知,该期权组合的价格等于方差互换的价格,或 VIX 波动率指数的平方. VIX 指数反映了投资者对市场波动的预期,VIX 指数越高,投资者为转移波动率风险所需要支付的成本越高. VIX 的具体算法可以参阅芝加哥期权交易所波动率指数白皮书(见 <https://cdn.cboe.com/resources/futures/vixwhite.pdf>).

投资组合的显示解. 本文综合考察方差/波动率资产作为状态变量和风险分散工具对最优投资组合权重和投资组合绩效的影响, 并通过经济成本分析, 研究方差/波动率资产对投资者期望效用的影响.

研究发现, 方差/波动率资产价格是影响投资者投资决策的重要状态变量. 随着方差/波动率资产价格的增加, 投资者会降低股票资产和方差/波动率资产的投资权重, 增加无风险资产的投资权重. 本研究同时求解了组合中不包含方差/波动率资产的动态投资组合问题, 并考察不包含方差/波动率资产给投资者带来的经济成本. 基于美国标准普尔 500 全收益指数和 VIX 期货数据的实证结果表明, 组合中加入 VIX 期货有助于分散组合风险. 组合中不包含 VIX 期货会导致投资者在市场风险较小的时候过于谨慎, 而在市场风险较高的时候承担了较高的市场不利变动风险, 缺乏 VIX 期货作为风险分散工具导致投资者遭受较高的经济成本. 最后, 样本外实证结果表明, 在传统的股票和无风险资产组合中加入 VIX 期货有助于提高投资收益和获得更高的夏普比.

## 1 方差/波动率资产的价格动态过程和动态最优投资组合问题

### 1.1 模型假设

令  $S_t$  和  $X_t$  分别代表  $t$  时刻股票资产及对应方差资产的价格, 借鉴 Chacko 和 Viceira<sup>[11]</sup>, 假定他们服从以下随机微分方程

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\alpha_S + \beta_S X_t) dt + \sigma_S \sqrt{X_t} dB_{S,t} \quad (1)$$

$$\frac{dX_t}{X_t} = (\alpha_X + \beta_X X_t) dt + \sigma_X \sqrt{X_t} dB_{X,t} \quad (2)$$

其中  $\langle dB_{X,t}, dB_{S,t} \rangle = \rho dt$ , 式(1)和式(2)表明, 方差风险是影响股票资产和方差资产期望收益的系统性风险, 其中  $\beta_S$  和  $\beta_X$  分别刻画了股票资产和方差资产的风险溢价; 同时, 两种资产收益率的波动程度也会随着方差资产价格的增加而增加.

方差互换是非常流行的方差资产. 如果在构建组合的时候不采用方差资产, 而是采用波动率资产, 如 VIX 期货, 此时令  $V_t = \sqrt{X_t}$  代表波动率资产的价格, 容易证明他满足以下随机微分方程

$$\frac{dV_t}{V_t} = (\alpha_V + \beta_V V_t^2) dt + \sigma_V V_t dB_{X,t} \quad (3)$$

式(2)和式(3)的模型参数存在以下对应关系

$$\alpha_V = 0.5\alpha_X, \sigma_V = 0.5\sigma_X,$$

$$\beta_V = 0.5(\beta_X - \sigma_X^2).$$

令  $Y_t = X_t^{-1}$ , 即  $Y_t$  代表  $t$  时刻收益率的精度, 则  $Y_t$  满足以下随机微分方程

$$dY_t = \kappa_Y(\theta_Y - Y_t) dt - \sigma_X \sqrt{Y_t} dB_{X,t}$$

其中  $\kappa_Y = \alpha_X, \theta_Y = \frac{\sigma_X^2 - \beta_X}{\alpha_X}$

最后, 假设投资者具有幂效用函数, 即

$$u(W_T) = \frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

其中  $W_T$  代表投资者在期末的财富,  $\gamma > 0$  代表投资者的相对风险厌恶系数.

### 1.2 包含方差/波动率资产的动态最优投资组合

$$Z_t = \begin{bmatrix} S_t \\ M_t \end{bmatrix}, \alpha_Z = \begin{bmatrix} \alpha_S \\ \alpha_M \end{bmatrix}, \beta_Z = \begin{bmatrix} \beta_S \\ \beta_M \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_S & 0 \\ 0 & \sigma_M \end{bmatrix}, B_{Z,t} = \begin{bmatrix} B_{S,t} \\ B_{X,t} \end{bmatrix}$$

其中当  $M = X$  时代表方差资产, 当  $M = V$  时代表波动率资产. 由式(1)~式(3), 有

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = (\alpha_Z + \beta_Z Y_t^{-1}) dt + \Sigma \sqrt{Y_t^{-1}} dB_{Z,t}$$

投资者可以投资股票资产  $S_t$ , 方差或波动率资产  $M_t$ , 以及无风险资产  $r$ . 令

$$\omega_{Z,t} = \begin{bmatrix} \omega_{S,t} \\ \omega_{M,t} \end{bmatrix}$$

代表股票资产和方差/波动率资产的权重构成的向量, 则投资者财富的动态过程可以写作

$$\begin{aligned} dW_t &= \frac{W_t \omega'_{Z,t}}{Z_t} dZ_t + (1 - \omega'_{Z,t} \mathbf{1}) W_t r dt \\ &= W_t [r + \omega'_{Z,t} (\alpha_Z + \beta_Z Y_t^{-1} - r \mathbf{1})] dt + \\ &\quad W_t \sqrt{Y_t^{-1}} \omega'_{Z,t} \Sigma dB_{Z,t} \end{aligned} \quad (4)$$

其中粗体  $\mathbf{1}$  代表所有元素为 1 的 2 维列向量. 以下命题给出了动态最优权重  $\omega_{Z,t}^*$  的显示解.

**命题 1** 给定财富动态过程如式(4)所示, 不考虑卖空和借贷约束, 投资者最大化期末财富效用函数

$$\max_{\omega_{z,t}} E_0 \left[ \frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right] \quad (5)$$

式(5)的最优动态投资组合可以写作

$$\omega_{z,t}^* = \frac{1}{\gamma} \Sigma_Z^{-1} [(\alpha_Z - r) Y_t + \beta_Z] - \frac{1}{\gamma} [0, A_t Y_t + B_t]' \quad (6)$$

其中  $\Sigma_Z$ ,  $A_t$  和  $B_t$  分别由附录 A 中式(A2)、式(A8)和式(A9)给出. 证明见附录 A.

式(6)中  $\frac{1}{\gamma} \Sigma_Z^{-1} [(\alpha_Z - r) Y_t + \beta_Z]$  代表均值方差最优投资组合权重, 当  $\alpha_Z > r$  时它是  $Y_t$  的增函数, 或方差/波动率资产价格的减函数. 第 2 项代表对冲跨期风险所配置的资产权重. 可以看到第 2 项的第 1 个分量为 0, 代表股票资产的跨期风险对冲需求为 0, 这表明股票资产的权重不会随着投资期限的变化而变化. 第 2 项的第 2 个分量, 即  $-\frac{1}{\gamma} A_t Y_t - B_t$  代表方差/波动率资产的跨期风险对冲需求. 当  $\gamma > 1$  时  $A_t$  取值为负, 因而方差/波动率资产的风险对冲需求为  $Y_t$  的增函数, 或方差/波动率资产价格的减函数. 综上所述, 方差/波动率资产价格是影响投资者资产配置的状态变量, 随着其价格的增加, 投资者会同时降低股票资产和方差/波动率资产的权重.

### 1.3 不包含方差/波动率资产的最优投资组合

当组合中不包含方差/波动率资产时, 投资者财富的动态过程可以写作

$$\begin{aligned} dW_t &= \frac{W_t \omega_{s,t}}{S_t} dS_t + (1 - \omega_{s,t}) W_t r dt \\ &= W_t [r + \omega_{s,t} (\alpha_s + \beta_s Y_t^{-1} - r)] dt + \\ &\quad W_t \sqrt{Y_t^{-1}} \omega_{s,t} \sigma_s dB_{s,t} \end{aligned} \quad (7)$$

此时有以下命题成立.

**命题 2** 给定财富动态过程如式(7)所示, 不考虑卖空和借贷约束, 投资者最大化期末财富效用函数式(5)的最优动态投资组合为

$$\omega_{s,t}^* = \frac{(\alpha_s - r) Y_t + \beta_s}{\gamma \sigma_s^2} - \frac{(A_{s,t} Y_t + B_{s,t}) \sigma_M \rho}{\gamma \sigma_s} \quad (8)$$

其中  $A_{s,t}$  和  $B_{s,t}$  分别由附录 B 中式(A11)和式(A12)给出. 证明见附录 B.

式(8)的第 1 项  $\frac{(\alpha_s - r) Y_t + \beta_s}{\gamma \sigma_s^2}$  为均值方差

最优组合, 它是  $Y_t$  的增函数, 或方差/波动率资产价格的减函数. 第 2 项  $-\frac{(A_{s,t} Y_t + B_{s,t}) \sigma_M \rho}{\gamma \sigma_s}$  代表跨期风险对冲需求, 它依赖于股票资产和方差/波动率资产的价格相关性  $\rho$ . 通常情况下  $\rho < 0$ , 即股票资产价格的变动和方差/波动率的变动是负相关的. 同时, 当  $\gamma > 1$  时  $A_{s,t}$  取值为负, 因而为了对冲方差/波动率随时间的变动, 投资者会随着方差/波动率资产价格的增加, 降低股票资产的权重.

### 1.4 组合中不包含方差/波动率资产的经济成本

为了考察在组合中不加入方差/波动率资产给投资者带来的经济成本, 类似于 Li 和 Zhou<sup>[12]</sup>, 求解以下方程

$$\begin{aligned} E_0 [u(W_T(\omega_{z,t}^*) | W_0 = 1)] &= \\ E_0 [u(W_T(\omega_{s,t}^*) | W_0 = c)] \end{aligned}$$

$c$  越大, 表明投资者需要更高的初始财富投资  $\omega_{s,t}^*$ , 才能获得用 1 元投资  $\omega_{z,t}^*$  相同的期望期末效用. 显然,  $c$  可以由下式得到

$$c = \exp \left( \frac{(A_t - A_{s,t}) Y_t + (B_t - B_{s,t}) \ln(Y) + C_t - C_{s,t}}{1 - \gamma} \right)$$

因而, 组合中不包含方差/波动率资产的经济成本可以写作  $\bar{c} = c - 1$ , 代表每一元期初财富, 投资者需要额外  $\bar{c}$  元补偿, 才能使他愿意投资  $\omega_{s,t}^*$  而不是  $\omega_{z,t}^*$ .

## 2 实证研究

### 2.1 数据和参数估计

本文采用的数据是美国标普 500 全收益指数和 VIX 期货连续合约, 数据样本区间为 2005 年 1 月 3 日至 2018 年 12 月 31 日共 3 651 个交易日数据. 计算了两种资产的对数收益率并乘上 100, 其样本统计量如表 1 所示. 可以看到同标普 500 全收益指数相比, VIX 期货具有更大的标准差和峰度, 表明 VIX 期货更有可能发生较大的波动. 标普 500 全收益指数收益率具有负的偏度, 而 VIX 期货具有正的偏度, 即股票资产更有可能发生负向变动, 而波动率资产更有可能发生向上的正向变动. 最后, 两种资产的相关系数为 -0.654 0.

表 1 资产对数收益率的样本统计值

Table 1 Summary statistics of logarithmic assets returns

	均值	标准差	偏度	峰度	相关系数
标普 500 全收益指数	0.028 1	1.161 6	-0.363 5	15.19	-0.654 0
VIX 期货	0.013 2	4.115 8	1.497 3	21.68	-

采用 Ait-Sahalia 和 Kimmel<sup>[13]</sup> 的方法对模型 (1) 和模型 (3) 进行估计, 估计结果如表 2 所示.  $\beta_s$  的估计值较小且不显著, 表明波动率的增加不能显著提高股票资产的风险溢价.  $\beta_v$  的估计值为 -0.001 4, 且在 1% 水平上显著. 由模型 (3) 可知 VIX 期货价格的长期均衡值为

$$\sqrt{0.941\ 1/0.001\ 4} \approx 25.93$$

$\rho$  的估计值为 -0.661 0, 且在 1% 水平上显著, 即股票收益率和波动率变动之间存在负相关关系. 最后, 股票资产的波动率  $\sigma_s$  和 VIX 期货的波动率  $\sigma_v$  均显著, 但前者要远小于后者.

表 2 参数估计结果

Table 2 Result of parameters estimates

	$\alpha_s$	$\beta_s$	$\alpha_v$	$\beta_v$	$\rho$	$\sigma_s$	$\sigma_v$
估计值	0.057 7	0.000 1	0.941 1***	-0.001 4***	-0.661 0***	0.007 6***	0.035 1***
标准差	0.059 8	0.000 2	0.241 6	0.000 5	0.013 6	0.000 1	0.001 3

注: \*\*\* 表示在 1% 水平上显著.

### 2.2 最优动态投资组合和经济成本

根据命题 1 和命题 2, 求解包含 VIX 期货和不包含 VIX 期货时的最优投资组合问题. 投资者风险厌恶系数设为 10, 无风险利率设为 0.03, 投资期限为 1 年. 图 1 画出了不同 VIX 期

货价格下投资者的最优投资组合权重. 可以看到, 不管是否包含 VIX 期货, 风险资产的权重都会随着 VIX 期货价格的增加而降低, 而无风险资产的权重会随着 VIX 期货价格的增加而增加.

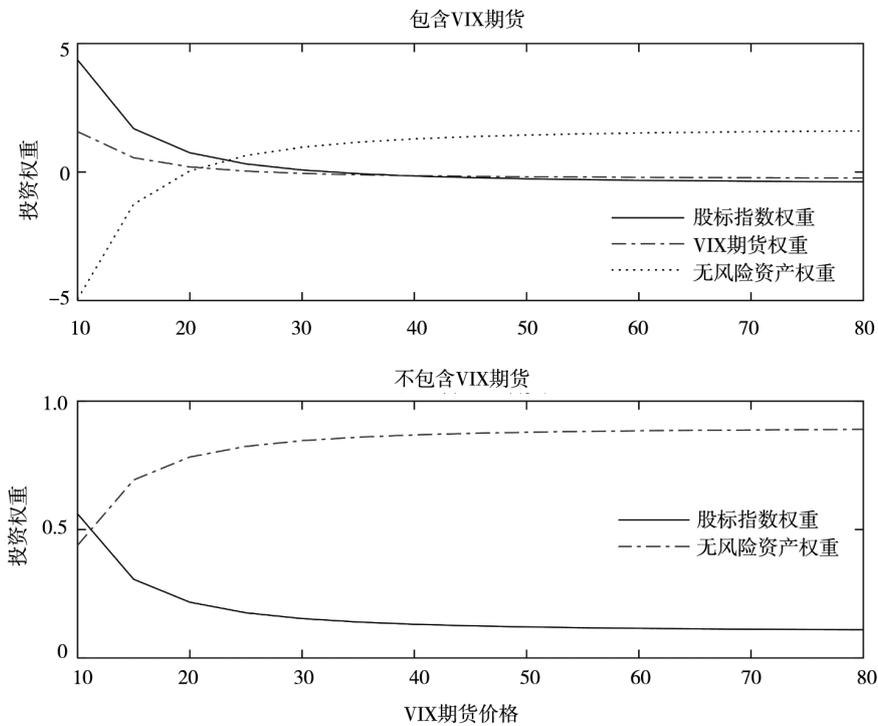


图 1 最优动态投资组合

Fig. 1 Optimal dynamic portfolio allocation

当组合中包含 VIX 期货时,投资者在 VIX 期货价格较低的时候会投资较高比重的风险资产. 例如,当 VIX 期货价格为 10 的时候,此时市场整体的风险较低,股票资产会有较高的吸引力;同时由于 VIX 期货价格位于均衡值以下,有较大的概率向上回复. 因而,投资者在标普 500 指数和 VIX 期货的投资权重分别为 4.371 2 和 1.293 8,即风险资产的总权重达 5.665,而无风险资产的权重为 -4.665. 当 VIX 期货价格增加时,投资者会迅速降低风险资产的比重. 当 VIX 期货价格接近 30 时,风险资产的权重基本接近于 0. 当 VIX 期货价格达到较高水平,投资者此时会同时做空标普 500 指数和 VIX 期货. 例如,当 VIX 期货价格为 80 时,标普 500 指数和 VIX 期货的权重分别为 -0.378 2 和 -0.168 5,无风险资产的权重为 1.546 7. 此时尽管股票资产可能出现反弹而出现

亏损,但是 VIX 期货价格向下均值回复,会有效降低组合的风险.

相比而言,如果组合中不包含 VIX 期货,投资者在 VIX 期货价格较低时对风险资产的投资会谨慎很多. 例如,当 VIX 期货价格为 10 的时候,标普 500 指数的投资权重仅为 0.571 3. 当 VIX 期货价格进一步上升时,投资者会降低对标普 500 指数的投资. 但是当 VIX 期货价格增长至 30 以上时,VIX 期货价格的变化对风险资产权重的影响非常小. 即使在 VIX 期货价格为 80 时,投资者在标普 500 指数的投资权重仍达到 0.107 4. 此时投资者承担了较高的市场价格波动风险.

根据命题 1 和命题 2,表 3 将风险资产的投资权重进一步分解为均值方差静态组合权重和跨期对冲需求权重,分别对应于式(6)或式(8)的第 1 项和第 2 项.

表 3 投资组合权重的两个组成成分

Table 3 Two components of portfolio weights

VIX 期货价格	均值方差组合权重		跨期对冲需求权重					
			投资期限 1 个月		投资期限 1 年		投资期限 2 年	
	股票指数	VIX 期货	股票指数	VIX 期货	股票指数	VIX 期货	股票指数	VIX 期货
面板 A: 包含 VIX 期货								
10	4.371 2	1.251 7	0.000 0	0.042 0	0.000 0	0.324 8	0.000 0	0.436 2
20	0.752 6	0.176 4	0.000 0	0.003 3	0.000 0	0.026 6	0.000 0	0.037 2
30	0.082 5	-0.022 7	0.000 0	-0.003 9	0.000 0	-0.028 7	0.000 0	-0.036 7
40	-0.152 1	-0.092 4	0.000 0	-0.006 4	0.000 0	-0.048 0	0.000 0	-0.062 6
50	-0.260 6	-0.124 7	0.000 0	-0.007 6	0.000 0	-0.056 9	0.000 0	-0.074 6
60	-0.319 6	-0.142 2	0.000 0	-0.008 2	0.000 0	-0.061 8	0.000 0	-0.081 1
70	-0.355 2	-0.152 8	0.000 0	-0.008 6	0.000 0	-0.064 7	0.000 0	-0.085 0
80	-0.378 2	-0.159 6	0.000 0	-0.008 9	0.000 0	-0.066 6	0.000 0	-0.087 5
面板 B: 不包含 VIX 期货								
10	0.572 8		-0.001 5		-0.011 3		-0.013 2	
20	0.217 3		0.000 6		0.000 2		-0.000 2	
30	0.151 4		0.000 9		0.002 3		0.002 2	
40	0.128 4		0.001 1		0.003 1		0.003 0	
50	0.117 7		0.001 1		0.003 4		0.003 4	
60	0.111 9		0.001 2		0.003 6		0.003 6	
70	0.108 4		0.001 2		0.003 7		0.003 7	
80	0.106 2		0.001 2		0.003 8		0.003 8	

由面板 A 可以看到,当组合中包含 VIX 期货时,均值方差组合在 VIX 期货价格较低时同时买

入股票和 VIX 期货,而在 VIX 期货价格较高时同时卖出股票和 VIX 期货. 由命题 1 后续评论可

知,股票指数的跨期风险对冲需求为0,而VIX期货的跨期风险对冲需求是VIX期货价格的减函数.表3中的实证结果和本研究的理论结果相一致,也具有直观的经济解释.由于VIX期货价格存在均值回复特性,因而当VIX期货价格较低时VIX期货的跨期对冲需求为正,而当VIX期货价格较高时VIX期货的跨期对冲需求为负.

当组合中不包含VIX期货时,由命题2后续的评论可知,股票指数的均值方差组合权重和跨期对冲需求权重都随着VIX期货价格的增加而降低.面板B中的实证结果与本研究理论结果也是一致的.随着VIX期货价格的增加,风险厌恶的投资者在均值方差组合中会降低股票指数的投资权重,相应增加无风险资产的投资权重.同样,考虑到VIX期货的均值回复特性,投资者在VIX

期货价格较低时会担心VIX期货价格回升从而降低股票的投资权重,因而此时股票的跨期对冲需求为负.相应的,当VIX期货价格较高时,投资者的跨期对冲需求为正.

图2给出了当包含VIX期货时,投资者在不同投资期限下的最优组合权重.同表3的结论一致,标普500指数的跨期风险对冲需求为0,因而其权重不会随着投资期限的变化而变化.而VIX期货权重的跨期需求依赖于VIX期货价格水平.可以看到,当VIX期货价格较低时,由于VIX期货价格有向上均值回复的趋势,此时VIX期货有正的跨期风险对冲需求,即VIX期货的投资权重会随着投资期限的增加而增加.而当VIX期货价格较高时,此时VIX期货价格有较大的可能性会向下均值回复,此时VIX期货的投资权重会随着投资期限的延长而降低.

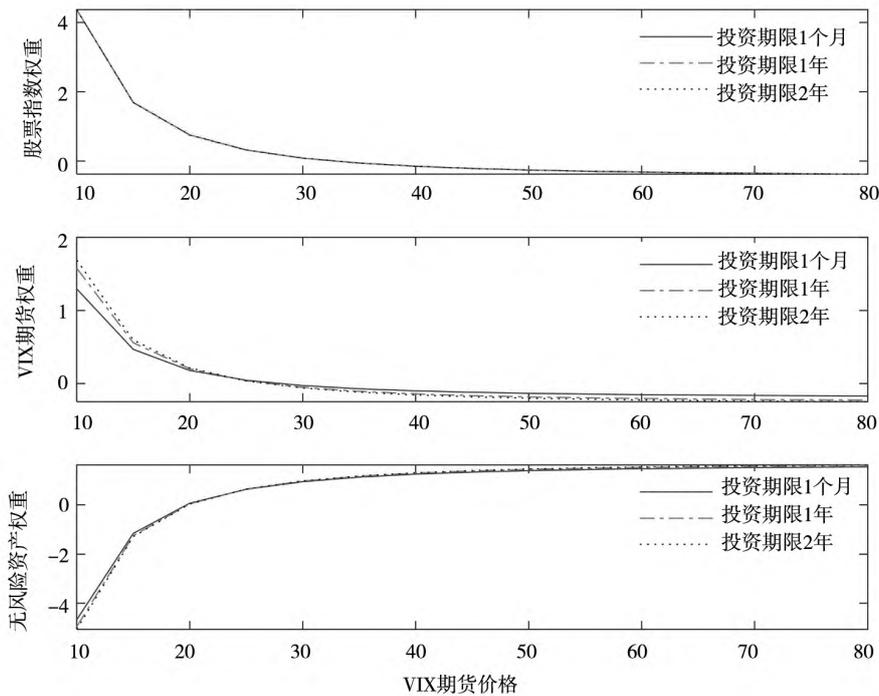


图2 不同投资期限下的最优投资组合

Fig. 2 Optimal portfolio allocation under different investment horizons

最后,图3给出了组合中不包含VIX期货对投资者带来的经济成本.首先,当VIX期货价格较低时,投资者由于没有在市场风险较低的时候充分投资风险资产,此时会遭受较高的经济成本.可以看到,当投资期限为1年,VIX期货价格为10时,经济成本达0.3049元,即需要额

外支付30.49%的财富给投资者,才能使他愿意在组合中不加入VIX期货.其次,当VIX期货价格较高的时候,投资者由于没有在市场风险较高的时候规避风险,或采用VIX期货来分散和对冲股票市场风险,同样也会遭受较大的经济成本.可以看到,当VIX期货价格为80时,经济

成本达到 0.182 3 元. 当 VIX 期货价格接近其均衡价格时, 不包含 VIX 期货所导致的经济成本相对较小.

经济成本的 U 型曲线也是和图 1 中的结果一致. 由图 1 可以看到, 当 VIX 期货价格较低时, 投资者会购买 VIX 期货分散股票多头的风险; 当 VIX 期货价格较高时, 投资者会做空 VIX 期货分散股票空头的风险; 当 VIX 期货处于中间的均衡水平时, 投资者对风险资产的投资权重接近于 0. 因而当 VIX 期货价格较高或较低时, 投资者通过投资 VIX 期货分散股票组合风险所得到的好处更大, 相应的不包含 VIX 期货所带来的经济成本也越高. 最后, 可以看到组合中不加入 VIX 期货所导致的经济成本会随着投资期限的延长而增加.

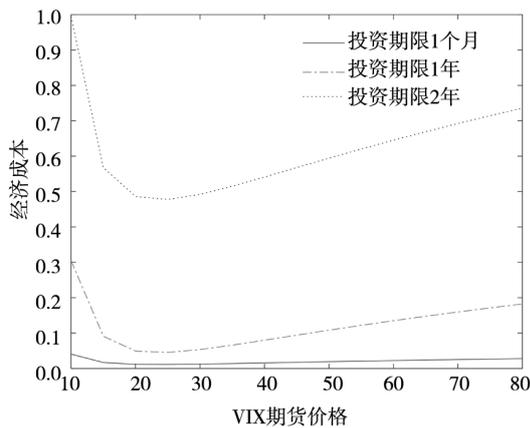


图 3 组合中不包含 VIX 期货的经济成本

Fig. 3 Economic cost of exclusion of VIX future in the portfolio

表 4 组合的样本外投资绩效 (  $T = 20 \text{ d}$ ,  $\gamma = 10$  )

Table 4 Out-of-sample portfolio performance (  $T = 20 \text{ d}$ ,  $\gamma = 10$  )

	年化均值	年化标准差	年化夏普比	平均成交额
等权组合	0.037 5	0.077 0	0.487 2	0.001 9
不包含 VIX 期货	0.047 5	0.085 4	0.555 4	0.009 6
包含 VIX 期货	0.265 7	0.152 1	1.747 2	0.095 0

表 4 中的第 1 行给出的是股票和无风险资产等权组合的绩效表现. 该组合虽然风险较小, 但收益率最低, 最终在 3 个模型中夏普比率最低. 第 3 行给出的是不包含 VIX 期货的动态投资组合的绩效表现. 同等权组合相比, 该组合能够获得较高的收益率和夏普比率, 表明考虑波动率时变风险

### 2.3 样本外投资绩效

本节考察引入 VIX 期货是否能提高投资组合的样本外绩效. 用 2005 年 1 月 3 日—2007 年 12 月 31 日共 780 个的样本内日收益率数据估计模型(1)和模型(3), 并使用剩下的数据做样本外检验. 设定模型参数在样本外期间保持不变, 因而资产权重的变化依赖于市场状态变量, 即 VIX 期货的价格以及投资期限. 假设投资者初始的投资期限为 20 天, 随着时间向前推移一天投资期限相应减 1, 并通过式(6)或式(8)求得风险资产的投资权重. 当剩余期限为 0, 可以求得 20 天投资期限的投资收益率, 并重新开始新一轮 20 天投资期限的投资决策. 通过这样的方法, 一共得到了 143 个互不重叠的投资期限为 20 天的样本外收益率. 表 4 给出了不同模型的样本外绩效表现, 包括年化收益率均值、标准差、夏普比率和平均成交额. 在计算收益率时, 忽略了交易费用的影响. 按照 Kirby 和 Ostdiek<sup>[14]</sup>的方法计算风险资产的成交额

$$\tau = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{i=1}^M \left| \omega_{i,t}^* - \frac{\omega_{i,t-1}^* (1 + R_{i,t})}{1 + \sum_{i=1}^M \omega_{i,t-1}^* R_{i,t} + \left(1 - \sum_{i=1}^M \omega_{i,t-1}^*\right) R_{f,t}} \right|$$

其中  $M$  为风险资产的数量,  $\omega_{i,t}^*$  代表  $t$  时刻风险资产  $i$  的投资权重,  $R_{i,t}$  为风险资产  $i$  在  $t-1$  至  $t$  的收益率.

有助于提高组合绩效<sup>[15]</sup>. 最后, 第 4 行给出的是包含 VIX 期货的最优投资组合的样本外绩效. 可以看到, 加入 VIX 期货的动态投资组合具有更高的波动风险, 年化波动率是前述两个模型的两倍. 图 1 的结果表明, 由于 VIX 期货和标普 500 指数存在风险分散的效果, 在 VIX 期货价格很低或很

高的时候组合中风险资产权重的绝对值都比较大. 考虑到模型不确定性因素的影响, 风险资产的高权重可能会导致组合波动率增加; 同时, 较高的风险资产权重也使得组合的成交额更高. 与另外两个模型相比, 该模型也获得了更高的收益和更高的夏普比.

为了检验表 4 中的结果在不同的参数下是否稳健, 表 5 给出了投资期限分别为 10 天和 30 天,

风险厌恶系数分别为 5 和 20 时组合的样本外绩效. 同表 4 的结论一致, 表 5 的实证结果表明, 在股票组合中加入 VIX 期货有助于提高组合收益和收益风险比. 同时, 同投资期限相比, 投资者风险厌恶系数对组合波动率和风险资产成交规模的影响更为显著. 特别的, 较高的风险厌恶程度有助于降低组合的波动率以及风险资产的成交额.

表 5 不同参数下各个组合的样本外投资绩效

Table 5 Out-of-sample portfolio performance under different investment horizons and risk aversions

	年化均值	年化标准差	年化夏普比	平均成交额
面板 A: $T = 10$ 天, $\gamma = 10$				
等权组合	0.038 0	0.083 1	0.456 8	0.001 9
不包含 VIX 期货	0.047 7	0.093 4	0.511 1	0.009 5
包含 VIX 期货	0.263 6	0.152 8	1.725 3	0.094 7
面板 B: $T = 30$ 天, $\gamma = 10$				
等权组合	0.041 1	0.079 2	0.518 9	0.001 9
不包含 VIX 期货	0.051 5	0.088 9	0.579 7	0.009 7
包含 VIX 期货	0.276 7	0.185 8	1.489 4	0.095 2
面板 C: $T = 20$ 天, $\gamma = 5$				
等权组合	0.037 5	0.077 0	0.487 2	0.001 9
不包含 VIX 期货	0.059 5	0.170 2	0.349 8	0.018 6
包含 VIX 期货	0.502 3	0.322 2	1.559 1	0.193 6
面板 D: $T = 20$ 天, $\gamma = 20$				
等权组合	0.037 5	0.077 0	0.487 2	0.001 9
不包含 VIX 期货	0.039 4	0.042 8	0.921 6	0.005 2
包含 VIX 期货	0.147 9	0.074 0	1.997 5	0.047 2

### 3 结束语

方差/波动率是重要的市场状态变量, 是投资者进行投资决策的重要指标; 同时, 方差/波动率资产和股票资产价格变动存在负相关关系, 股票组合中引入方差/波动率资产有助于分散组合风险. 本文在组合中除了包含传统的股票资产和无风险资产之外, 还包含了方差/波动率资产, 并给出了动态最优投资组合的显式解.

研究发现, 方差/波动率资产价格是影响投资组合权重的重要状态变量, 其价格的增加反映了市场波动程度的增加, 从而导致股票资产以及方

差/波动率资产权重的降低. 基于美国标普 500 全收益指数和 VIX 期货的实证结果表明, 组合中加入 VIX 期货有助于分散组合风险和提高投资组合样本外绩效. 组合中不包含 VIX 期货会导致投资者在市场风险较小时过于谨慎, 而在市场风险较高的时候承担了较高的市场不利变动风险, 从而导致投资者遭受较高的经济成本.

样本外实证结果表明, 在股票组合中加入 VIX 期货有助于提高组合收益和收益风险比. 然而, 当投资者具有较低的风险厌恶系数时, VIX 期货的加入提高了风险资产的权重和成交规模. 在存在模型不确定性的情况下, 高风险资产权重容易导致组合的波动率增加; 而当交易手续费较高时, 较高的成交规

模会侵蚀组合的收益. 在引入方差/波动率资产构建 组合时考虑交易成本的影响, 值得进一步深入研究.

### 参 考 文 献:

- [1] Poon S-H, Granger C W J. Forecasting volatility in financial markets: A review[J]. *Journal of Economic Literature*, 2003, (41): 478 – 539.
- [2] Bollerslev T, Tauchen G, Zhou H. Expected stock returns and variance risk premia[J]. *Review of Financial Studies*, 2009, 22(11): 4463 – 4492.
- [3] 叶五一, 曾海歌, 缪柏其. VIX 指数对股票市场间联动性影响的实证研究[J]. *统计研究*, 2018, 35(6): 68 – 76.  
Ye Wuyi, Zeng Haige, Miao Baiqi, An empirical study on the reciprocal impacts of VIX index on stock market[J]. *Statistical Research*, 2018, 35(6): 68 – 76. (in Chinese)
- [4] DeMiguel V, Garlappi L, Uppal R. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy[J]. *Review of Financial Studies*, 2009, 22(5): 1915 – 1953.
- [5] Li H, Wu C, Zhou C. Time varying risk aversion and dynamic portfolio allocation[J]. *Operations Research*, 2022, 70(1): 23 – 37.
- [6] Dash S, Moran M T. VIX as a companion for hedge fund portfolios[J]. *Journal of Alternative Investments*, 2005, 8(3): 75 – 80.
- [7] Szado E. VIX futures and options: A case study of portfolio diversification during the 2008 financial crisis[J]. *Journal of Alternative Investments*, 2009, 12(2): 68 – 85.
- [8] Szado E. The Portfolio Diversification Potential of Long VIX Futures and Options Strategies[R]. SSRN, Working Paper, 2019.
- [9] Yan X, Zhu Y, Cui Z, et al. Optimal Investment in Equity and VIX Derivatives[R]. SSRN, Working Paper, 2021.
- [10] Hilal S, Poon S-H, Tawn J. Hedging the black swan: Conditional heteroskedasticity and tail dependence in S&P500 and VIX[J]. *Journal of Banking & Finance*, 2011, 35(9): 2374 – 2387.
- [11] Chacko G, Viceira L M. Dynamic consumption and portfolio choice with stochastic volatility in incomplete markets[J]. *Review of Financial Studies*, 2005, 18(4): 1369 – 1402.
- [12] Li X, Zhou C. Dynamic asset allocation with asymmetric jump distribution[J]. *China Finance Review International*, 2018, 8(4): 387 – 398.
- [13] Ait-Sahalia Y, Kimmel R. Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models[J]. *Journal of Financial Economics*, 2007, 83(2): 413 – 452.
- [14] Kirby C, Ostdiek B. It's all in the timing: Simple active portfolio strategies that outperform naive diversification[J]. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 2012, 47(2): 437 – 467.
- [15] 刘海飞, 李心丹, 柏巍, 等. 基于波动持续性的最优组合构建与分散化研究[J]. *管理科学学报*, 2019, 22(1): 44 – 56.  
Liu Haifei, Li Xindan, Bai Wei, et al. Optimal portfolio and diversification based on persistent volatility[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2019, 22(1): 44 – 56. (in Chinese)

## Dynamic optimal portfolio allocation with variance/volatility assets

ZHOU Chun-yang, WU Chong-feng

Antai College of Economics and Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China

**Abstract:** This paper assumes that investors can invest in variance/volatility assets besides traditional stocks and risk-free assets. The paper gives an explicit solution to the dynamic optimal portfolio problem and finds that the price of the variance/volatility assets is an important state variable that can affect the portfolio weights.

Specifically, the optimal weights of stocks and variance/volatility assets will decrease with the price of the variance/volatility assets. Our empirical research based on the U. S. market shows that adding VIX futures to the stock portfolio helps to diversify the portfolio risk and improve the out-of-sample performance. Meanwhile, the exclusion of volatility assets in the portfolio will cause the investors to suffer economic costs.

**Key words:** dynamic portfolio allocation; variance/volatility assets; economic cost

附录 A

命题 1 的证明:

令  $J(W, Y, t) = \max E_t(u(W_T))$  代表式(5)的值函数,则满足以下 HJB 方程

$$0 = \sup_{\omega_t} \left\{ J_t + J_W W [r + \omega'_{Z,t} (\alpha_Z + \beta_Z Y_t^{-1} - r)] + \frac{1}{2} J_{WW} W^2 Y_t^{-1} \omega'_{Z,t} \Sigma_Z \omega_{Z,t} + J_Y \kappa_Y (\theta_Y - Y_t) + \frac{1}{2} J_{YY} \sigma_X^2 Y - J_{WY} W_t \omega'_{Z,t} \Sigma_{ZM} \right\} \tag{A1}$$

其中

$$\Sigma_Z = \begin{bmatrix} \sigma_S^2 & \rho \sigma_S \sigma_M \\ \rho \sigma_S \sigma_Z & \sigma_M^2 \end{bmatrix}, \Sigma_{ZM} = \begin{bmatrix} \rho \sigma_S \sigma_M \\ \sigma_M^2 \end{bmatrix} \tag{A2}$$

且  $J(W, Y, t)$  的终值条件为

$$J(W, Y, T) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{A3}$$

借鉴 Chacko 和 Viceira<sup>[11]</sup> 的做法,推测值函数可以写作

$$J(W, Y, t) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \exp(A_t Y + B_t \ln(Y) + C_t) \tag{A4}$$

其中  $A_t, B_t$  和  $C_t$  为时间  $t$  的函数,且满足终值条件  $A_T = B_T = C_T = 0$ . 将式(A4)代入式(A1)可以得到

$$0 = \sup_{\omega_t} \left\{ A_t Y + B_t \ln(Y) + C_t + (1-\gamma) [r + \omega'_{Z,t} (\alpha_Z + \beta_Z Y_t^{-1} - r)] - \frac{1}{2} \gamma (1-\gamma) Y_t^{-1} \omega'_{Z,t} \Sigma_Z \omega_{Z,t} + \left( A_t + \frac{B_t}{Y} \right) \kappa_Y (\theta_Y - Y_t) + \frac{1}{2} \left[ \left( A_t + \frac{B_t}{Y} \right)^2 - \frac{B_t}{Y^2} \right] \sigma_X^2 Y - (1-\gamma) \left( A_t + \frac{B_t}{Y} \right) \omega'_{Z,t} \Sigma_{ZM} \right\} \tag{A5}$$

上式的一阶条件为

$$(\alpha_Z + \beta_Z Y_t^{-1} - r) - \gamma Y_t^{-1} \Sigma_Z \omega_{Z,t} - \left( A_t + \frac{B_t}{Y} \right) \Sigma_{ZM} = 0$$

因而最优动态投资组合为

$$\omega_{Z,t}^* = \frac{1}{\gamma} \Sigma_Z^{-1} [(\alpha_Z - r) Y_t + \beta_Z - (A_t Y_t + B_t) \Sigma_{ZM}]$$

由于  $\Sigma_Z^{-1} \Sigma_{ZM} = [0, 1]'$ , 故

$$\omega_{Z,t}^* = \frac{1}{\gamma} \Sigma_Z^{-1} [(\alpha_Z - r) Y_t + \beta_Z] - \frac{1}{\gamma} [0, A_t Y_t + B_t]' \tag{A6}$$

将  $\omega_{Z,t}^*$  代入式(A5), 并且由对数线性化

$$-\ln(Y_t) \approx \ln \theta_X + \frac{1}{\theta_X} (X - \theta_X) = \ln \kappa_Y - \ln(\kappa_Y \theta_Y - \sigma_X^2) - 1 + \frac{\kappa_Y \theta_Y - \sigma_X^2}{\kappa_Y} Y_t^{-1}$$

其中

$$\theta_X = -\frac{\alpha_X}{\beta_X} = \frac{\kappa_Y}{\kappa_Y \theta_Y - \sigma_X^2}$$

代表方差资产价格的长期均衡值. 可以将式(A5)写作

$$(A_t + v A_t^2 - \kappa_A A_t - \delta_A) Y_t + (\varphi_B B_t + v B_t^2 - \kappa_B B_t - \delta_B) Y_t^{-1} + C_t - f(A_t, B_t) = 0 \tag{A7}$$

其中

$$v = \frac{1}{2\gamma} \sigma_M^2, \kappa_A = \kappa_Y - \frac{\gamma-1}{\gamma} (\alpha_M - r), \delta_A = \frac{\gamma-1}{2\gamma} (\alpha_Z - r)' \Sigma_Z^{-1} (\alpha_Z - r), \varphi_B = \frac{\sigma_X^2 - \kappa_Y \theta_Y}{\kappa_Y}, \kappa_B = \frac{1}{2} \sigma_X^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \beta_M - \kappa_Y \theta_Y, \delta_B = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \beta_Z' \Sigma_Z^{-1} \beta_Z$$

以及

$$f(A_t, B_t) = \kappa_Y B_t - [\ln(\kappa_Y \theta_Y - \sigma_X^2) + 1 - \ln \kappa_Y] B_t' - (1 - \gamma)r - \frac{1 - \gamma}{\gamma} (\alpha_Z - r - A_t \Sigma_{ZM})^T \Sigma_Z^{-1} (\beta_Z - B \Sigma_{ZM}) - A_t \kappa_Y \theta_Y - A_t B_t \sigma_X^2$$

为了保证式 (A7) 对任意的  $Y_t$  都成立,  $A_t$  应满足以下常微分方程

$$A_t' + v A_t^2 - \kappa_A A_t - \delta_A = 0$$

并且由终端条件  $A_T = 0$ , 可以得到  $A_t$  的显示解为

$$A_t = - \frac{2[\exp(\xi_A \tau) - 1]}{(\kappa_A + \xi_A)[\exp(\xi_A \tau) - 1] + 2\xi_A} \delta_A \tag{A8}$$

其中  $\xi_A = \sqrt{\kappa_A^2 + 2v\delta_A}$ ,  $\tau = T - t$ .

类似的, 有  $B_t$  满足以下常微分方程

$$\phi_B B_t' + v B_t^2 - \kappa_B B_t - \delta_B = 0$$

并且由终端条件  $B_T = 0$ , 可得方程的解为

$$B_t = - \frac{2[\exp(\xi_B \tau / \varphi_B) - 1]}{(\kappa_B + \xi_B)[\exp(\xi_B \tau / \varphi_B) - 1] + 2\xi_B} \delta_B \tag{A9}$$

其中  $\xi_B = \sqrt{\kappa_B^2 + 2v\delta_B}$ .

最后, 由  $C_t' = f(A_t, B_t)$  以及终值条件  $C_T = 0$ ,  $C_t$  可以写作

$$C_t = - \int_t^T C_s' ds = - \int_t^T f(A_s, B_s) ds.$$

在实证分析中, 采用梯形数值积分方法求解上式.

证毕.

**附录 B**

**命题 2 的证明:**

类似于命题 1 的证明, 值函数  $J(W, Y, t) = \max E_t(u(W_T))$  可以写作

$$J(W, Y, t) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \exp(A_{S,t} Y + B_{S,t} \ln(Y) + C_{S,t})$$

且满足以下 HJB 方程

$$0 = \sup_{\omega_t} \left\{ A_{S,t}' Y + B_{S,t}' \ln(Y) + C_{S,t}' + (1 - \gamma)[r + \omega_t(\alpha_S + \beta_S Y^{-1} - r)] - \frac{1}{2} \gamma(1 - \gamma) \omega_t^2 Y_t^{-1} + \left( A_{S,t} + \frac{B_{S,t}}{Y} \right) \kappa_Y (\theta_Y - Y_t) + \frac{1}{2} \left[ \left( A_{S,t} + \frac{B_{S,t}}{Y} \right)^2 - \frac{B_{S,t}^2}{Y^2} \right] \sigma_X^2 Y - (1 - \gamma) \left( A_{S,t} + \frac{B_{S,t}}{Y} \right) \omega_t \sigma_X \rho \right\} \tag{A10}$$

由一阶条件可得最优解为

$$\omega_{S,t}^* = \frac{(\alpha_S - r) Y_t + \beta_S}{\gamma \sigma_S^2} - \frac{(A_{S,t} Y_t + B_{S,t}) \sigma_M \rho}{\gamma \sigma_S}$$

将其代入式 (A10), 可求得

$$A_{S,t} = - \frac{2[\exp(\xi_A \tau) - 1]}{(\kappa_A + \xi_A)[\exp(\xi_A \tau) - 1] + 2\xi_A} \delta_A \tag{A11}$$

$$B_{S,t} = - \frac{2[\exp(\xi_B \tau / \varphi_B) - 1]}{(\kappa_B + \xi_B)[\exp(\xi_B \tau / \varphi_B) - 1] + 2\xi_B} \delta_B \tag{A12}$$

$$C_t = - \int_t^T f(A_s, B_s) ds \tag{A13}$$

其中

$$v = \left( \frac{1 - \gamma}{\gamma} \sigma_X^2 \rho^2 + \sigma_X^2 \right), \kappa_A = \kappa_Y - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \sigma_X \rho (\alpha_S - r), \delta_A = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (\alpha_S - r)^2, \xi_A = \sqrt{\kappa_A^2 + 2v\delta_A}, \varphi_B = \frac{\sigma_X^2 - \kappa_Y \theta_Y}{\kappa_Y}, \kappa_B = \frac{1}{2} \sigma_X^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \sigma_X \rho \beta_S - \kappa_Y \theta_Y, \delta_B = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \beta_S^2, \xi_B = \sqrt{\kappa_B^2 + 2v\delta_B}, \tau = T - t,$$

且

$$f(A_{S,t}, B_{S,t}) = \kappa_Y B_{S,t} - [\ln(\kappa_Y \theta_Y - \sigma_X^2) + 1 - \ln \kappa_Y] B_{S,t}' - (1 - \gamma)r - \frac{1 - \gamma}{\gamma} (\alpha_S - r - \sigma_X \rho A) (\beta_S - \sigma_X \rho B) - A_{S,t} \kappa_Y \theta_Y - A_{S,t} B_{S,t} \sigma_X^2. \tag{证毕.}$$