

doi: 10.19920/j.cnki.jmsc.2024.03.005

主观死亡评估下的退休后投资-消费-年金化时刻决策^①

伍慧玲, 廖 朴

(中央财经大学中国精算研究院, 北京 102206)

摘要: 考虑退休者的死亡风险和遗产效用, 研究了退休后期最优投资-消费-年金化时刻决策问题. 根据退休者在退休时刻对自身死亡概率的主观评估, 把退休者分为两大类: 第一类退休者自我评估以概率 1 活不到最大年金化时刻, 第二类退休者自我评估以一定概率活得过最大年金化时刻. 自退休时刻开始到死亡时刻或年金化时刻为止, 退休者要进行投资和消费决策. 假设最优的年金化时刻是使得年金化前后的累计消费效用均值以及遗产效用均值之和达到最大. 采取幂效用函数形式, 得到了最优投资-消费策略的解析解. 第一类退休者在生存期内都不购买年金的条件以及第二类退休者选择在最大年金化时刻购买年金的条件. 利用数值分析方法, 详细分析了性别、生存周期、遗产效用、折现函数、风险厌恶系数、金融投资环境以及年金产品价格对退休者年金行为的影响.

关键词: 退休后期; 最优投资-消费-年金化时刻决策; 死亡风险; 遗产效用; 动态规划

中图分类号: F830.59; F840.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2024)03-0071-20

0 引言

目前, 全球老龄化趋势日趋严峻. 以我国为例, 根据中国发展研究基金会的研究报告《中国发展报告 2020: 中国人口老龄化的发展趋势和政策》, 到 2025 年“十四五”规划完成时, 中国 65 周岁及以上的老年人将超过 2.1 亿, 占总人口数约 15%; 到 2035 年和 2050 年, 65 周岁及以上的老年人将分别达到 31 亿和接近 38 亿, 占总人口的比例分别为 22.3% 和 27.9%. 因此, 各国政府和专家学者们正积极地从不同方面采取各种措施解决老龄化带来的财政压力和各种社会问题, 以应对日益严峻的老龄化危机, 比如采取养老金补缴^[1]、改善人口结构^[2]和延迟退休^[3]等措施. 然而, 优化退休后的投资、消费和年金化决策以提高退休者福利, 也是有效的应对措施之一.

在退休时刻, 很多实证结果^[4-6]表明, 由于强烈的遗产动机、退休者的身体状况不佳以及年金产品回报率低等因素, 绝大多数退休者都不愿意在退休时刻将全部累积财富购买终身年金, 即使通过这种方式他们可以终身获得相对稳定的消费金额. 在这样的情况下, 世界上很多国家顺势而为推出相关政策, 允许退休者选择延迟购买年金, 比较知名的是所谓的收入抽取政策 (income drawdown option, IDO). 这个政策规定, 在退休时刻至年金化时刻或死亡时刻之间, 退休者可定期从养老基金账户里提取一定的金额用于日常消费支出, 剩余的财富进行投资, 个人可根据自己的偏好选择投资策略, 目的是尽可能提高年金化时刻的财富水平, 或者最大化决策周期内的累计消费效用与年金化效用 (或遗产效用) 之和. 在 IDO 政策下, 退休者有三种自由: 可以自行决定

① 收稿日期: 2019-05-13; 修订日期: 2023-01-10.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11671411); 中央高校基本科研业务费专项资金; 教育部人文社会科学重点研究基地重大项目 (22JJD790091); 保险风险分析与决策学科创新引智基地项目 (B17050).

作者简介: 伍慧玲 (1978—), 女, 广东清远人, 博士, 研究员, 博士生导师. Email: wuhuilin@cufe.edu.cn

如何进行金融产品或者年金产品的投资,可以自行决定每期从养老金账户里抽取多少金额进行消费,可以自行决定在何时购买终身年金。由于本文的核心工作是在死亡风险下研究了退休后的最优投资、消费和年金化时刻决策,下面紧扣死亡风险的处理方式,回顾现有的退休后优化决策研究现状。由于篇幅有限,本文只对近期发表的或者有代表性的相关研究进行归纳总结。

对死亡风险的第一种处理方式是直接忽视。比如 Gerrard 等^[7], Di Giacinto 等^[8], 伍慧玲和董洪斌^[9], Lin 等^[10], Dadashi^[11], Wu 等^[12] 事先给定年金时刻以及消费水平,均不考虑退休者的死亡风险和遗产动机,研究了退休后的最优金融产品投资决策。在类似的假设下,伍慧玲等^[13] 研究了最优的投资和年金化时刻决策。Forsyth 等^[14] 则考虑一个退休后最优的金融产品和年金产品投资问题,该文不考虑退休者的死亡风险和遗产动机,最大化投资期限内的累计年金给付水平均值同时最小化年金给付水平逐年下滑的风险。

对死亡风险的第二种处理方式是假设死亡时间服从指数分布,且死力函数(hazard function)是常数或者是确定的时间函数。这是目前普遍采用的处理方式。比如,Emms^[15], Dadashi^[16] 与 Zhang^[17] 假设死力是时间的函数,为退休者求出了最优的金融资产投资与消费决策。Liang 和 Young^[18] 假设死力是一个常数且不考虑遗产效用,研究了一个生存期内的最优年金产品与金融资产的投资和消费决策问题。Baltas 等^[19] 考虑了通胀风险,模型不确定性和退休者的死亡风险,假设死力函数为时间的函数,研究了一个退休后的人寿保险购买、股票指数和债券投资问题。Gerrard 等^[20], Stabile^[21], Milevsky 和 Young^[22] 与 Liang 等^[23] 研究了退休后的投资-消费-年金化决策问题。这四篇论文的共同点是,都假设退休者的随机死亡时间服从指数分布且不考虑退休者的遗产效用,其中 Gerrard 等^[20], Stabile^[21] 和 Liang 等^[23] 假设死力是常数, Milevsky 和 Young^[22] 假设死力是时间的函数。另外,为了得到模型的解,这四篇论文均假设年金化时刻在区间 $[0, +\infty)$ 选取。由于本文也是研究退休后最优投资-消费-年金化时刻决策,为了说明本文所得结果

和现有研究的差别,在此本文先详细归纳这四篇论文得到的结论。通过数值分析, Gerrard 等^[20] 得到了自 60 岁开始,在各年龄购买年金的人数比例,且发现终身不购买年金的人数比例超过 25%,平均购买年金的年龄为 66 岁。然而,该文并没有详细给出不同情况下最佳的年金化时刻,仅给出了购买年金的条件以及从平均角度研究购买年金的年龄。Stabile^[21] 从理论上求出了退休者在有限时间内购买年金和终身不购买年金的条件。通过数值分析, Stabile^[21] 发现个人寿命越长,退休者就越早购买终身年金。然而,不管是理论分析还是数值分析,该文都没有求出在不同情况下对应的具体年金化时刻。Milevsky 和 Young^[22] 从理论上证明了年金化时刻和财富水平无关,且假设退休者以一定概率活到 115 岁,分别在风险厌恶系数为 1, 2, 5 情形下为男女退休者计算出不同年龄下的最佳年金化时刻。Liang 等^[23] 的主要贡献是从理论上完美地求解投资-消费的表达式以及年金化时刻满足的条件,认为当财富水平首次落入某个区间时,退休者就应该立即用一定的财富购买年金产品。在数值分析方面,该文分析了金融资产收益波动率和个人风险厌恶对该财富区间的影响。然而, Liang 等^[23] 也没有具体分析在不同情况下的最佳年金化时刻。Hainaut 和 Deelstra^[24], Angelis 和 Stabile^[25] 假设死力是时间的函数,仅考虑年金化时刻决策,在保险公司规定的最大年金化时刻之前,选择最优的年金化时刻,以最大化年金化前后的现金流贴现均值之和。从数值分析结果来看,这两篇论文的核心工作是研究年金化的触发机制,并验证了当财富水平足够高或足够低时,退休者会购买终身年金。

对死亡风险的第三种处理方式是假设死亡时间服从指数分布,且死力函数是一个随机过程。比如 DeLong 和 Chen^[26] 假设死力函数是一个一般的随机扩散过程,分析退休者的时间一致投资-消费策略。Han 和 Hung^[27] 假设退休者对其死力函数的评估具有模糊性,体现在退休者的死力不是确定的,在一个概率空间内取值。在这样的假设下,该文研究了退休者如何进行最优的消费和年金产品投资决策。

退休者普遍年龄较大,因此直接忽略其死亡

风险显然是不合理的。然而,即使是考虑了退休者死亡风险的文献,从上述文献梳理可以:1) 他们均假设退休者的死亡时刻服从指数分布。然而,指数分布的性质决定了退休者可以以一定概率活到无穷大,这样的假设是脱离实际且无法满足每类退休者的需求。现有的论文从没研究过退休者可以对自己的最大剩余寿命和死亡概率进行主观评估的情况。在退休时退休者的健康状况因人而异,其年金化决策受个人剩余寿命影响甚大。因此,有必要允许退休者根据自身健康状况对最大剩余寿命和死亡概率进行主观评估,并根据该评估为其设计出最佳的决策,这对于具有短寿风险的退休者尤为重要。带有主观死亡概率评估的研究近期也得到了学者们的关注,比如 Chen 等^[28] 在主观死亡信念下研究了两类退休产品的最佳购买情况。2) 为了从理论上得到最优解, Gerrard 等^[20], Stabile^[21], Milevsky 和 Young^[22] 和 Liang 等^[23] 均在 $[0, +\infty)$ 范围内寻找最优的年金化时刻。然而,在实际情况下,为了控制投资风险和避免道德风险,很多国家会有最大年金化时刻的规定。以中国的年金市场为例,一般超过 70 岁就无法再购买年金产品。因此,在一个无穷区间求解最优年金化时刻仅为了简化理论求解过程,跟现实情况是不太吻合的。目前只有 Hainaut 和 Deelstra^[24], Angelis 和 Stabile^[25] 两篇论文在此假设下求解最优的年金化时刻。然而,这两篇文章都假设退休者的随机死亡时间服从指数分布,且他们仅考虑了年金化时刻决策。3) 目前研究退休后最优投资-消费-年金化时刻的论文,都不考虑退休者的遗产动机,只考虑年金化前后的消费效用。对于年轻人来说,死亡和遗产处理或者离他们很遥远,不是他们考虑的主要因素,但对于退休者这样的群体来说,正如实证研究^[4] 所述,遗产动机是影响他们决策的重要因素,故遗产动机不应该被忽略。

综上所述,本文允许退休者根据个人实际情况对最大剩余寿命和死亡概率进行主观评估,同时考虑具有最大年金化时刻和遗产动机的情形。在这样更贴近实际情况的假设下,需要比较个人最大剩余寿命与最大化年金化时刻的大小,根据剩余寿命情况对退休者进行分大类研究;需要对比不同年金化时刻对应的整体效用值大小;另

外,遗产动机的加入也增加了本文模型的复杂度,给效用值求解增加了难度。本文的研究内容在以往的研究中并无出现过,且解决难度更大,能从理论上对现有的研究内容起到很好的补充作用,也可以对未来的相关研究提供一定的解决参考,这是本研究的理论价值。另外,从实际应用角度来看,一方面,由于本文是基于更加贴近实际情况的假设展开理论研究,其研究结果能对实际操作更有指导价值。除了模型设置较新颖外,本文的数值分析根据国内的金融环境以及年金制度,除了分析生存周期、风险厌恶系数以及性别对年金化时刻的影响外,还详细分析了遗产效用系数、折现函数、金融投资环境以及年金产品价格对不同退休者年金行为的影响。特别地,分析了自我评估预期寿命较短的退休者的年金化行为,并对比了是否有强制年金化制度下退休者的年金化行为差异。本文数值分析部分在内容设计方面也较新颖,在以往的研究中也没出现过,得到了更丰富的甚至不同的研究结果。

1 模型介绍和值函数

由于本研究带有个人主观死亡概率评估的退休后优化决策问题,因此,在全文出现的“死亡时刻”以及“死亡概率”等字样,均指退休者根据自身条件做出的主观评估。换句话说,“死亡时刻”以及“死亡概率”的全称分别是“主观评估下的死亡时刻”和“主观评估下的死亡概率”,但为了简单起见,有时会采取这两个简称。个人当前的主观寿命或者死亡概率评估对退休者的决策有很大的影响。另外,也可以根据主观评估对退休者进行分类,研究带有不同剩余寿命和不同死亡概率评估的退休者如何进行最优的投资-消费-年金化时刻决策。下面介绍本文的模型。假设时刻 0 是退休时刻,时刻 T_s 是最大的年金化时刻。退休者在时刻 0 可以根据个人情况,选择立刻年金化或者延迟年金化。若选择延迟年金化,退休者在 T_s 和主观评估的死亡时刻之前选择一个年金时刻 T 购买终身年金,获得一个终身消费保障。在时刻 0 到 T 之间,退休者要决定从年金账户里抽取的消费金额以及如何将剩余的财富进行最优

的投资组合选择. 假设市场上有一个无风险资产和一个风险资产, 在第 n 个阶段 (即时间区间 $[n, n+1)$), 它们的回报分别为 r_n 和 R_n , 其中 r_n 是一个确定的正数, R_n 是一个非负随机变量. 令 c_n 是在时刻 n 抽取出来的消费金额, 随后把剩余财富按比例 α_n 投资在风险资产上, 记 $(\alpha, c) = \{(\alpha_0, c_0), (\alpha_1, c_1), \dots, (\alpha_{T-1}, c_{T-1})\}$, 其财富运动过程满足下面的动态方程

$$X_{n+1}^{\alpha, c} = (X_n^{\alpha, c} - c_n)(\alpha_n R_n^e + r_n) \quad (1)$$

其中 $R_n^e = R_n - r_n$ 是风险资产的超额收益, 其均值记为 r_n^e . 令 x_n 是时刻 n 的财富水平, 限定 $0 \leq c_n \leq x_n$, 投资比例满足 $0 \leq \alpha_n \leq 1$. 为了记号的方便, 在下文中默认投资比例和消费金额受到上述约束, 不再详述. 退休者在时刻 0 要做一个决策, 决定在其随机生存期内, 是否购买终身年金; 若决定购买终身年金, 那么要找到最优的年金化时刻以及最优投资-消费策略. 那么退休者的目标是

$$\max_{T \in \{0, 1, \dots, T_s\}} \{ \max_{\alpha, c} PF(T; \alpha, c) \} \quad (2)$$

其中

$$PF(T; \alpha, c) := E_{0, x_0} \left[\sum_{k=0}^{(T-1) \wedge (\tau-1)} \frac{\lambda_1 (c_k)^\gamma}{\gamma (1+\rho)^k} + \sum_{k=T}^{\tau-1} \frac{\lambda_2 (\kappa_T X_T^{\alpha, c})^\gamma}{\gamma (1+\rho)^k} + \frac{\lambda_3 (X_\tau^{\alpha, c})^\gamma}{\gamma (1+\rho)^\tau} 1_{0 < \tau < T} \right]$$

在式中若 $m < n$, 定义求和算子 $\sum_{k=n}^m := 0$. 式 (2) 中各参数的含义解释如下. 假设在时刻 0, 退休者是活着的, 随机变量 τ 表示退休者的死亡时刻, 这个死亡时刻在本文中表主观死亡时刻. 退休者可以根据自身的健康状态以及体检资料等信息, 对自身的死亡时刻做一个估计, 这对于在退休时刻身体状况特别不佳的退休者尤其重要. 对自身健康状况无法判别的退休者, 他可以依赖于公布的生命表进行计算和评估. λ_1, λ_2 和 λ_3 分别表示年金化之前的消费效用系数, 年金化之后的消费效用系数以及遗产效用系数; ρ 表示折现率; T 表示购买年金的时刻, 退休者希望在可选的年金时刻 $0, 1, \dots, T_s$ 中找到最优的年金时刻; $\gamma < 1$ 且 $\gamma \neq 0$, 退休者的相对风险厌恶系数是 $1-\gamma$; κ_T 是在年金化时刻 T 的年金化因子, 即在

时刻 T , 单位货币购买终身年金后得到的单期消费金额. 从式 (2) 可以看出, 退休者通过两个步骤决定最优的投资-消费-年金化时刻策略. 首先, 退休者相对固定年金化时刻 T , 在存在死亡风险的前提下, 最大化从时刻 0 到时刻 T 之间的消费效用, 年金化效用以及遗产效用之和. 在主观评估的死亡时刻和年金化时刻之前, 退休者获得日常消费效用; 若在年金化时刻 T 之前死亡, 退休者获得遗产效用; 若在年金化时刻之后死亡, 退休者可以获得自年金化时刻开始至死亡时刻为止的累计年金化效用. 接着, 所得的总效用之和与年金时刻 T 有关, 那么最优的年金化时刻是使得这个总效用之和达到最大的时刻. 另外, 从式 (2) 中还可以看到, 若退休者的死亡时刻 τ 在政府规定的最大化年金时刻 T_s 之后 (即 $\tau \geq T_s$), 此时必有 $\tau \geq T$. 在这样的情况下, 退休者可以在时刻 $0, 1, \dots, T_s$ 之间选择一个最优的年金时刻. 若退休者死亡时刻在最大年金化时刻 T_s 之前 (即 $\tau < T_s$), 那么退休者在生存期内不一定购买终身年金, 此时可以按照年金时刻 T 和 τ 的关系确定退休者在生存期内是否考虑购买年金. 给定一个年金时刻 T , 如果 $\tau < T$, 问题式 (2) 退化为生存期内的投资-消费模型, 即退休者在整个生存期都不购买年金; 若 $\tau \geq T$, 那么退休者会在时刻 0 到死亡时刻之间, 选择最佳的年金时刻.

根据上面的分析, 本文分两种情况对模型进行研究. 在此之前, 先把式 (2) 中的内层优化问题进行简化. 令 p_m 表示退休者在时刻 0 活着的前提下, 在时刻 m 的主观评估死亡概率, T_M 是退休者在时刻 0 自我评估后得到的最大生存期. 于是, 先固定 T , 将式 (2) 内层优化问题进行简化, 得到定理 1.

定理 1

$$PF(T; \alpha, c) = E_{0, x_0} \left[\sum_{k=0}^{T-1} \frac{\lambda_1 \sum_{m=k+1}^{T_M} p_m}{\gamma (1+\rho)^k} (c_k)^\gamma + \sum_{k=1}^{T-1} p_k \frac{\lambda_3 (X_k^{\alpha, c})^\gamma}{\gamma (1+\rho)^k} + \sum_{k=T}^{T_M-1} \frac{\lambda_2 (\kappa_T X_T^{\alpha, c})^\gamma \sum_{m=k+1}^{T_M} p_m}{\gamma (1+\rho)^k} \right]$$

本文所有定理的证明过程, 请与作者索要.

令式 (2) 的内层优化问题记为

$$V_0(x_0) = \max_{\alpha, \epsilon} PF(T; \alpha, \epsilon) \quad (3)$$

为解决式 (3), 对于 $n = 0, 1, \dots, T$, 定义

$$PF(n, T; \{(\alpha_n, \epsilon_n), \dots, (\alpha_{T-1}, \epsilon_{T-1})\}) = E_{n, x_n} \left[\sum_{k=n}^{T-1} \frac{\lambda_1 \sum_{m=k+1}^{T_M} P_m}{\gamma(1+\rho)^{k-n}} (c_k)^\gamma + \sum_{k=n+1}^{T-1} \times \right. \\ \left. P_k \frac{\lambda_3 (X_k^{\alpha, \epsilon})^\gamma}{\gamma(1+\rho)^{k-n}} + \sum_{k=T}^{T_M-1} \frac{\lambda_2 (\kappa_T X_T^{\alpha, \epsilon})^\gamma \sum_{m=k+1}^{T_M} P_m}{\gamma(1+\rho)^{k-n}} \right], \\ V_n(x_n) = \max_{(\alpha_{T-1}, \epsilon_{T-1})} PF(n, T; \{(\alpha_n, \epsilon_n), \dots, (\alpha_{T-1}, \epsilon_{T-1})\}) \quad (4)$$

于是得到 $V_n(x_n)$ 的递归方程

$$V_n(x_n) = \max_{\alpha_n, \epsilon_n} E_{n, x_n} \left[\frac{\lambda_1 \sum_{m=n+1}^{T_M} P_m}{\gamma} (c_n)^\gamma + \frac{\lambda_3 P_{n+1}}{\gamma(1+\rho)} (X_{n+1}^{\alpha_n, \epsilon_n})^\gamma \frac{1}{1+\rho} V_{n+1}(X_{n+1}^{\alpha_n, \epsilon_n}) \right], \\ n = 0, 1, \dots, T-2 \quad (5)$$

$$V_{T-1}(x_{T-1}) = \max_{\alpha_{T-1}, \epsilon_{T-1}} E_{T-1, x_{T-1}} \left[\frac{\lambda_1 \sum_{m=T}^{T_M} P_m}{\gamma} (c_{T-1})^\gamma + \frac{\lambda_2 (\kappa_T)^\gamma}{\gamma(1+\rho)} \sum_{k=T}^{T_M-1} \frac{P_m}{(1+\rho)^{k-T}} (X_T^{\alpha_{T-1}, \epsilon_{T-1}})^\gamma \right] \quad (6)$$

$$V_T(x_T) = \frac{\lambda_2 (\kappa_T)^\gamma}{\gamma} (x_T)^\gamma \sum_{k=T}^{T_M-1} \frac{P_m}{(1+\rho)^{k-T}} \quad (7)$$

从式 (6) 和式 (7) 可知, 在年金化前一刻 $T-1$, 由于下一个时刻 T 就是终身年金化的时刻, 如果在下一个时刻 T 死亡, 那么退休者是得不到遗产效用的. 因此, V_{T-1} 只含当前时刻的消费效用和年金化后的消费效用. 如果当前时刻为年金化时刻 T , 那么退休者就只能获得年金化效用. 另外, 特别地, 由式 (6) 和式 (7) 可知, 如果退休者在死亡前一瞬间购买终身年金, 即 $T = T_M$, 那么他无法享受终身年金带来的福利, 因此在死亡

前一瞬间购买年金是非常不明智的. 为得到问题的最优解, 先给出引理 1.

引理 1 (a) 存在一个唯一的 $\alpha_n^* \in [0, 1]$, 使得

$$\alpha_n^* = \begin{cases} \arg \max_{\alpha_n \in [0, 1]} E[\alpha_n R_n + (1-\alpha_n) r_n]^\gamma, & 0 < \gamma < 1, \\ \arg \max_{\alpha_n \in [0, 1]} E[\alpha_n R_n + (1-\alpha_n) r_n]^\gamma, & \gamma < 0. \end{cases}$$

(b) 任给 $x > 0$ 和一个函数 $f > 0$, 当 $0 < \gamma < 1$ 时, 那么

$$\max_{0 \leq c \leq x} \left\{ \frac{c^\gamma}{\gamma} + \frac{(x-c)^\gamma}{\gamma} f(\alpha) \right\} \\ = \frac{1}{\gamma} \max_{0 \leq c \leq x} \{ c^\gamma + (x-c)^\gamma \max_{\alpha} f(\alpha) \} \\ = \frac{1}{\gamma} \left(1 + (\max_{\alpha} f(\alpha))^{\frac{1}{1-\gamma}} \right)^{1-\gamma} x^\gamma$$

最优值点 c^* 的表达式为 $c^* = \frac{x}{1 + (\max_{\alpha} f(\alpha))^{\frac{1}{1-\gamma}}}$;

当 $\gamma < 0$ 时 那么

$$\max_{0 \leq c \leq x} \left\{ \frac{c^\gamma}{\gamma} + \frac{(x-c)^\gamma}{\gamma} f(\alpha) \right\} \\ = \frac{1}{\gamma} \min_{0 \leq c \leq x} \{ c^\gamma + (x-c)^\gamma \min_{\alpha} f(\alpha) \} \\ = \frac{1}{\gamma} \left(1 + (\min_{\alpha} f(\alpha))^{\frac{1}{1-\gamma}} \right)^{1-\gamma} x^\gamma$$

最优值点 c^* 的表达式为 $c^* = \frac{x}{1 + (\min_{\alpha} f(\alpha))^{\frac{1}{1-\gamma}}}$.

证明 引理 1 的证明过程参考文献 [29].

证毕.

根据式 (5) ~ 式 (7) 可知, 递归方程的解依赖于 $\sum_{m=T}^{T_M} P_m$ 的值. 由于年金时刻 T 的取值还没确定, 同时也不清楚退休者的健康状况如何, 故无法得知这个数到底为 0 还是正数. 因此, 本文分两种情况对模型进行讨论.

1.1 当 $0 \leq T \leq T_M$ 时 即在死亡前(含)购买年金

当 $0 \leq T \leq T_M$ 成立时, 对于 $n = 0, \dots, T-1$,

有 $\sum_{m=n+1}^{T_M} P_m \geq \sum_{m=T}^{T_M} P_m \geq p_{T_M} > 0$. 利用式 (5) ~ 式 (7), 为了区别在死亡前是否购买年金, 用 $V_n^{B, T}$, $n = 0, 1, \dots, T$ 表示在时刻 T 买年金后各时刻的值函数, 其表达式归纳在下面的定理.

定理 2 若 $0 \leq T \leq T_M$ 有

$$V_T^{(B,T)}(x_T) = \frac{\lambda_2(\kappa_T)^\gamma (x_T)^\gamma \sum_{m=k+1}^{T_M} P_m}{\gamma \sum_{k=T}^{T_M} (1+\rho)^{k-T}} \quad (8)$$

$$V_n^{(B,T)}(x_n) = \frac{\lambda_1 \sum_{m=n+1}^{T_M} P_m}{\gamma} \left(1 + (\xi_n^{(B,T)})^{\frac{1}{1-\gamma}}\right)^{1-\gamma} \times (x_n)^\gamma, n = 0, 1, \dots, T-1 \quad (9)$$

最优投资比例为引理 1 中的 α_n^* 表达式, 最优消费金额为

$$c_n^* = \frac{x_n}{1 + (\xi_n^{(B,T)})^{\frac{1}{1-\gamma}}}, n = 0, 1, \dots, T-1 \quad (10)$$

其中

$$\xi_{T-1}^{(B,T)} = \frac{\lambda_2(\kappa_T)^\gamma Y_{T-1} \sum_{m=k+1}^{T_M} P_m}{\lambda_1(1+\rho) \sum_{m=T}^{T_M} P_m} \quad (11)$$

$$\xi_n^{(B,T)} = \frac{\lambda_3 p_{n+1} + \lambda_1 \left(1 + (\xi_{n+1}^{(B,T)})^{\frac{1}{1-\gamma}}\right)^{1-\gamma} \sum_{m=n+2}^{T_M} P_m}{\lambda_1(1+\rho) \sum_{m=n+1}^{T_M} P_m}$$

$$Y_n, n = 0, 1, \dots, T-2 \quad (12)$$

$$Y_n = E[(\alpha_n^* R_n^e + r_n)^\gamma], n = 0, 1, \dots, T-1 \quad (13)$$

根据式(11)和式(12), 易知 $\xi_n^{(B,T)}$ 随着年金化效用系数 λ_2 和遗产效用系数 λ_3 的增加而增加, 随着消费效用系数 λ_1 和折现率 ρ 的增加而减少. 根据 c_n^* 和 $\xi_n^{(B,T)}$ 的关系可知, 若退休者等待未来价值的耐心程度越小(即 ρ 越大), 年金化之前的消费比例就越大; 若退休者更注重遗产效用或年金化的消费效用, 那么年金化之前的消费比例就越小. 除了个人行为因素外, 如果衡量金融市场投资收益的指标 Y_n 越大, 那么 $\xi_n^{(B,T)}$ 就越大, 导致时刻 n 的消费比例就越低. 另外, 由式(11)可知, 如果 $T = T_M$, 即在死亡时刻购买年金, 那么 $\xi_{T_M-1}^{(B,T)} = 0$, 导致在时刻 $T_M - 1$ 的消费金额为该时刻的全部财富. 由后面的研究可知, T_M 是一个非常不明智的年金化时刻, 如果退休者选择了这个时刻购买年金, 一个类似股票市场的熔断机关启动, 使得退休者在该时刻之前将所有财富消费完毕, 再无多余资金用于购买一个没有任何效用的资产.

1.2 当 $T_M + 1 \leq T$ 时, 即生存期内不购买年金

$$\text{当 } T_M + 1 \leq T \text{ 时, } \sum_{m=T+1}^{T_M} P_m = 0 \text{ 和 } \sum_{m=T}^{T_M} P_m = 0$$

成立. 由于 $T_M \leq T - 1$, 根据式(5) ~ 式(7)可知, $V_n(x_n) = 0, n \geq T_M$. 再因为 $T_M - 1 \leq T - 2$, 当式(5)中的 $n = T_M - 1$ 时, 式(5)变为

$$V_{T_M-1}(x_{T_M-1}) = \max_{\alpha_{T_M-1} \in \mathcal{E}_{T_M-1}} E_{T_M-1, x_{T_M-1}} \times \left[\frac{\lambda_1 P_{T_M}}{\gamma} (c_{T_M-1})^\gamma + \frac{\lambda_3 P_{T_M}}{\gamma(1+\rho)} (X_{T_M}^{\alpha_{T_M-1} \in \mathcal{E}_{T_M-1}})^\gamma \right] \quad (14)$$

对于 $n = 0, 1, \dots, T_M - 2$, 根据式(5)有

$$V_n(x_n) = \max_{\alpha_n \in \mathcal{E}_n} E_{n, x_n} \left[\frac{\lambda_1 \sum_{m=n+1}^{T_M} P_m}{\gamma} (c_n)^\gamma + \frac{\lambda_3 P_{n+1}}{\gamma(1+\rho)} (X_{n+1}^{\alpha_n \in \mathcal{E}_n})^\gamma \frac{1}{1+\rho} V_{n+1}(X_{n+1}^{\alpha_n \in \mathcal{E}_n}) \right] \quad (15)$$

显然, 这是一个生存期内的投资 - 消费问题, 退休者在整个生存期内都不购买年金. 为了和购买年金的情形进行区分, 用 $V_n^{(N)}$ 表示在生存期内不购买年金情形下的值函数.

定理 3 若 $T_M + 1 \leq T$, 即在生存期内不购买年金, 那么式(14)和式(15)的值函数为

$$V_n^{(N)}(x_n) = \frac{\lambda_1 \sum_{m=n+1}^{T_M} P_m \left(1 + (\xi_n^{(N)})^{\frac{1}{1-\gamma}}\right)^{1-\gamma}}{\gamma} (x_n)^\gamma, n = 0, 1, \dots, T_M - 1 \quad (16)$$

对应的最优消费金额是

$$c_n^* = \frac{x_n}{1 + (\xi_n^{(N)})^{\frac{1}{1-\gamma}}}, n = 0, 1, \dots, T_M - 1 \quad (17)$$

其中

$$\xi_n^{(N)} = \frac{\lambda_3 p_{n+1} + \lambda_1 \left(1 + (\xi_{n+1}^{(N)})^{\frac{1}{1-\gamma}}\right)^{1-\gamma} \sum_{m=n+2}^{T_M} P_m}{\lambda_1(1+\rho) \sum_{m=n+1}^{T_M} P_m}, n = 0, 1, \dots, T_M - 2,$$

$$\xi_{T_M-1}^{(N)} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1(1+\rho)} Y_{T_M-1}.$$

根据 $\xi_n^{(N)}$ 的表达式可知, 它随着遗产效用系数 λ_3 的增加而增加, 随着消费效用系数 λ_1 和折现率 ρ 的增加而减少. 因此, c_n^* 会随着 λ_3 的增加而减少, 随着 λ_1 和 ρ 的增加而增加. 换句话说, 如果退休者的遗产动机越强, 他当前的消费金额就越低; 如果他越注重年金化前的消费以及越不看好未来的财富价值, 那么他当前的消费金额就越高. 另外, 如果退休者在生存期内不购买年金

且有遗产动机,那么在死亡前一个时刻他不会将所有财富用于消费. 这结论和 $0 \leq T \leq T_M$ 的情形是完全不一样的.

2 主观死亡概率评估下的最优年金化时刻决策

若退休者预计自己活不过最大年金化时刻 T_S , 那么他首先要决定在生存期内是否购买年金; 若决定进行年金化, 他要在时刻 0 到死亡时刻之间选择一个最佳的年金时刻. 若退休者自我评估其生存期大于 T_S , 因为 T_S 时刻是他能选择的最大年金化时刻, 在这个情况下, 如果他打算在生存期内购买终身年金, 他只需要在可选的年金时刻 $0, 1, \dots, T_S$ 选择一个对自己来说最佳的年金时刻. 由于上述两种情况的优化过程截然不同, 于是在此本文根据退休者在时刻 0 对自身寿命评估, 从两方面对退休后期的决策进行分析, 并详细分析年金化策略的性质.

2.1 退休者自我评估后得到 $T_M \leq T_S - 1$

若退休者自我评估后得到 $T_M \leq T_S - 1$, 此时必有 $P(\tau < T_S) = 1$, 即退休者自我评估以概率 1 活不过最大年金化时刻, 本文把带有这样心理特征的退休者称为第一类退休者. 第一类退休者显然包括在退休时刻就诊断为患有绝症的退休者, 他们知道肯定活不到最大年金化时刻且个人评估与客观现实吻合. 然而, 第一类退休者不仅仅包含这些极端个体, 只要是预估自己活不到最大年金化时刻的退休者, 即使个人评估和最终客观事实不一致, 他们都属于这一类. 比如, 长期患病以及患多种慢性病的退休者, 他们对其剩余生存周期持悲观评估, 也可以归为第一类退休者. 由于退休者属于高龄人士, 普遍患有慢性病, 因身体健康不佳对活到最大化年金时刻持有悲观评估者也颇多, 因此第一类退休者不会只包含极少部分人. 本文可以为这类人群提供决策参考. 此时, 退休者需要对比 $T_M + 2$ 个效用函数的大小

$V_0^{(B,0)}(x_0), V_0^{(B,1)}(x_0), \dots, V_0^{(B,T_M)}(x_0), V_0^{(N)}(x_0)$. 其中前 $T_M + 1$ 个为退休者在死亡前各时刻购买年金对应的效用函数, $V_0^{(N)}(x_0)$ 为退休者在整个生

存期内不购买年金, 求解生存期内的投资-消费问题得到的效用函数. 对此得到如下一些结论.

定理 4 若 $1 \leq T_M \leq T_S - 1$, 那么 $T = T_M$ 绝对不会是一个最佳的年金时刻.

财富年金化之后, 退休者开始领取年金直到死亡, 一旦退休者死亡, 哪怕从领取年金时刻到死亡时刻领取的消费总金额抵不过购买年金的财富, 退休者也无法将其剩余的消费额以遗产形式留给子孙后代. 换句话说, 在死亡时刻购买终身年金相当于将剩余财富“充公”, 定理 4 从数学的角度验证了本文的直观感受, 对于有遗产效用的退休者来说, 在死亡时刻进行年金化是不明智的, 他是绝对不会选择这种做法的.

定理 5 当 $1 \leq T_M \leq T_S - 1$ 时, 如果

$$\lambda_2(\kappa_T)^\gamma \sum_{k=T}^{T_M-1} \frac{P_m}{(1+\rho)^{k-T}} < \lambda_3 P_T + \lambda_1 \left(1 + (\xi_T^{(N)})^{\frac{1}{1-\gamma}}\right)^{1-\gamma} \sum_{m=T+1}^{T_M} P_m, \quad T=0, \dots, T_M-1 \quad (18)$$

那么退休者在整个生存期内都不购买年金.

由于 $\xi_n^{(N)}$ 是随着 λ_3 的增加而增加, 因此根据式 (18) 可知, 若退休者的遗产效用系数 λ_3 越大, 那么他就越不愿意在生存期内进行年金化. 另外, 如果年金化因子 κ_T 的值越小, 即年金产品价格越高, 那么退休者就越不愿意在生存期内购买年金产品.

从式 (18) 可知要比较 T_M 个式子的大小, 然而, 由于参数设置的不确定, 则无法从数学上严格证明式子的大小. 为此, 本文拟从数值分析角度, 分析当退休者对自身的剩余寿命评估不甚乐观时, 是否选择年金化, 以及各参数对年金化决策的影响. 对于投资和消费决策性质, 由于现有的很多投资-消费模型(非退休后)已经对其性质进行了详细研究^[29], 而本文模型里的投资-消费策略也遵循传统的性质, 比如随着时间的推移, 消费比例呈现递增趋势; 如果没有遗产效用且不打算购买终身年金, 在死亡前一刻会将所有财富消费完毕等. 因此, 为了节省篇幅, 不再深入挖掘投资-消费策略的性质, 而重点关注年金化决策, 这也是在现有的研究里没有详细分析过的. 在分析结果之前, 首先介绍选取的参数,

参数选取针对国内市场, 拟为国内相关情况服务.

研究对象 根据目前国内的退休制度, 假设男性在 60 岁退休, 女性在 55 岁退休.

年金产品价格 计算男女各年龄对应的年金产品价格. 由于年金产品价格属于半公开信息, 无法通过保险公司或者政府机构等公开渠道获取. 因此, 为了科学研究, 本文利用年金产品定价公式计算各年龄的年金产品价格, 其中生命表信息主要根据中国人寿保险业经验生命表(2010-2013)“养老金业务”中的男表(CL5)和女表(CL6)数据; 对于年金定价利率, 参考《完善人身保险业责任准备金评估利率形成机制及调整责任准备金评估利率有关事项的通知》(银保监办发[2019]182号), 将年金产品的定价利率设定为 3.5%. 另外, 国内年金产品价格的附加费率一般设为 15%. 利用上述数据和年金定价公式, 得到年金价格.

购买终身年金的最大年龄 国内购买年金产品的最大年龄大多为 70 岁, 比如国寿鑫福赢家年金保险的最大购买年龄为 69 岁, 华夏福临门年金保险(如意版)、中荷金福年年年金保险和人保寿险鑫泰年金保险(C款)的最大购买年龄是 70 岁. 鉴于此, 本文设 70 岁是最大的年金化年龄. 如果退休者打算购买终身年金, 他们选择退休时刻至 70 岁中的一个时刻作为年金化时刻.

金融资产收益 对于无风险资产收益, 根据中国债券信息网 2019 年—2021 年的国债收益率数据, 本文设无风险资产的收益为 $r_n = 1.0236$. 对于风险资产收益, 参照 Wind 数据库里 2002 年—2021 年的中国沪深 300 指数确定风险资产收益的均值和方差, 得到 $E(R_n) = 1.1633$, $Var(R_n) = 0.3049$.

死亡概率主观评估 当退休者预计活不过最大年金时刻 T_s , 由于在这种情况下, 根据本文的参数设置, 退休者最长的生存期不超过 15 年, 因此假设退休者对自身的死亡概率评估是, 在时刻 $1, 2, \dots, T_M$ 死亡的概率服从均匀分布, 即 $p_m = 1/T_M$, $m = 1, 2, \dots, T_M$.

其他参数 设初始财富 $x_0 = 10$, 消费效用系数 $\lambda_1 = 1$, 年金效用系数 $\lambda_2 = 1$, 遗产效用系数 $\lambda_3 = 1.015$, 退休者的主观贴现值为 0.96, 即

$$1(1 + \rho) = 0.96.$$

接下来当分析一个参数的影响时, 除非特殊说明, 其他参数都是固定不变且取上述数值.

如下研究对自己预期剩余寿命评估不乐观的退休者的年金化决策特点, 这部分内容前人并无研究过. 本文首先分析风险厌恶系数和预期生存期对年金时刻的影响, 为此, 参考文献[22], 将退休者分为低风险厌恶者(对应风险厌恶系数 $1 - \gamma = 0.9$), 中风险厌恶者(对应 $1 - \gamma = 2$) 和高风险厌恶者(对应 $1 - \gamma = 5$). 先以低风险厌恶男性退休者为例进行研究, 所得结果在表 1 呈现. 女性的年金化决策性质和男性的非常相似, 为节约篇幅在此也不再呈现. 从表格的每一行来看, 表 1 表明: 若退休者对自己的预期寿命估计不乐观(预计活不过最大年金化时刻 T_s), 不管退休者的预期寿命为何, 随着年金化时刻递增, 年金化得到的全局效用值整体呈现递增趋势. 也就是说, 在退休时刻对自己身体状况评估不好的退休者, 年金化时刻越晚, 得到的总效用就越高. 另外, 年金化得到的效用值均小于在生存期内不买年金得到的效用值. 也就是说, 当退休者对自己的预期寿命估计不乐观(预计活不过最大年金化时刻 T_s), 他的最优决策是在整个生存期内都不购买终身年金. 这个结果从量化分析的角度验证了 Finkelstein 和 Poterba^[30] 的实证结果: 身体健康状况不理想的退休者, 因其预期寿命不长, 往往不愿意在退休时刻就购买终身年金. 类似地 $1 - \gamma > 1$ 的情形做了分析, 得到跟表 1 完全相同的结论, 为节约篇幅, 在此不再呈现.

另外, 从表 1 可知, 如果退休者非要在生存期内购买终身年金, 那么在 $T = T_M - 1$, 即死亡前一个时刻购买终身年金得到的整体效用最大. 因此, 拟研究表 1 中男性退休者终身不买年金和死亡前一个时刻购买年金形成的效用差值, 即 $VD = V_0^{(N)} - V_0^{(B, T_M-1)}$. 这个效用差 VD 越大, 表示退休者在生存期不进行年金化的效用提高幅度就越大, 因此他越不愿意提前年金化, 在生存期内年金化意愿就越低. 风险厌恶系数对 VD 的影响结果在图 1 中呈现, 以风险厌恶系数 $1 - \gamma$ 是否大于 1 为分界, 分为了图 1(a) 和图 1(b). 从图 1 首先看到, 在男性退休者对自身预期寿命评估不太乐观的前提下, 如果用 VD 评估其生存期

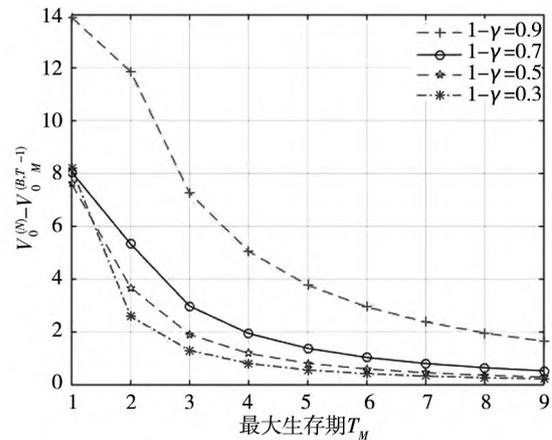
表 1 各情形下的全局最优值函数比较
Table 1 Comparison of the globally optimal value function under different situations

男性, 风险厌恶系数为 0.9 (低风险厌恶)										
T_M	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$	$T = 5$	$T = 6$	$T = 7$	$T = 8$	不买年金
1	9.362 7	-	-	-	-	-	-	-	-	23.269 2
2	13.856 7	16.180 0	-	-	-	-	-	-	-	28.039 7
3	18.230 8	20.127 2	25.327 1	-	-	-	-	-	-	32.582 7
4	22.488 5	24.104 5	28.297 1	31.880 9	-	-	-	-	-	36.931 2
5	26.6333	28.0465	31.5741	34.6718	37.3342	-	-	-	-	41.1079
6	30.668 7	31.927 0	34.978 2	37.704 1	40.107 4	42.179 9	-	-	-	45.130 0
7	34.597 9	35.733 8	38.425 2	40.858 0	43.037 9	44.965 0	46.630 9	-	-	49.010 4
8	38.424 1	39.460 9	41.870 7	44.066 7	46.056 2	47.842 8	49.425 2	50.796 0	-	52.760 0
9	42.150 2	43.105 5	45.288 7	47.289 9	49.117 0	50.775 0	52.266 3	53.589 4	54.737 7	56.387 6

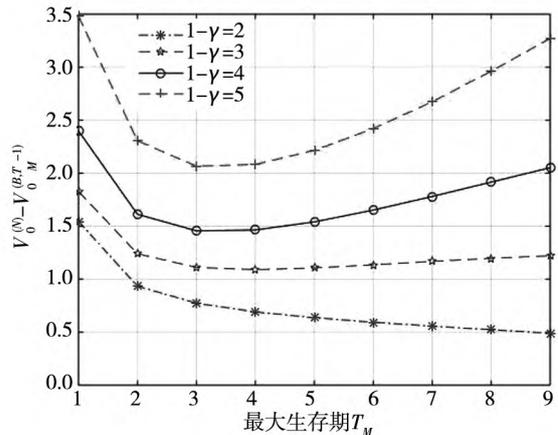
内的年金化意愿, 不管其风险厌恶系数是否比 1 大, 他们都不愿意购买年金产品. 另外, 当他们对自身的预期寿命评估极端悲观时, 他们购买年金的意愿都是最低的. 其次, 不管是低风险厌恶还是中高风险厌恶退休者, 如果风险厌恶程度越高, 他就越不愿意购买年金产品. 这或许是因为短寿的退休者把投资年金产品视为高风险投资行为, 一旦购买, 或许会因为自身原因导致血本无归. 这样的决策行为跟后面将要研究到的第二类退休者的决策行为截然不同. 类似地, 也分析了女性退休者的效用之差 VD 随最大生存期 T_M 和风险厌恶系数 $1 - \gamma$ 的变化, 得到了跟图 1 类似的结果, 由于篇幅有限, 在此不再呈现. 通过上面分析可知, 风险厌恶系数的改变无法使第一类退休者在主观评估的生存周期内购买终身年金.

下面分析遗产效用系数 λ_3 对购买年金意愿的影响. 为此, 令风险厌恶系数 $1 - \gamma = 0.9, 2, 5$, 令遗产效用系数 λ_3 从 1.5 减少为 0, 得到了图 2. 该图表明, 不管风险厌恶系数是什么, 当退休者对自己的剩余寿命评估不乐观时, 即使没有遗产动机, 他都会选择不购买终身年金. 另外, 对比图 2 (a) ~ 图 2 (c) 后发现, 高风险厌恶退休者的遗产动机对在生存期内是否购买终身年金形成的效用差距影响较小. 比如当 $1 - \gamma = 5$ 时, 图 2 (c) 表明遗产动机几乎不会影响这个效用差距. 这是因为, 年金产品的回报率跟生存周期成正比, 当退休者剩余寿命评估不乐观且风险厌恶系

数很高时, 他们会将年金产品视为一个高风险资产. 不管遗产效用如何, 他们对投资年金产品都不感兴趣.



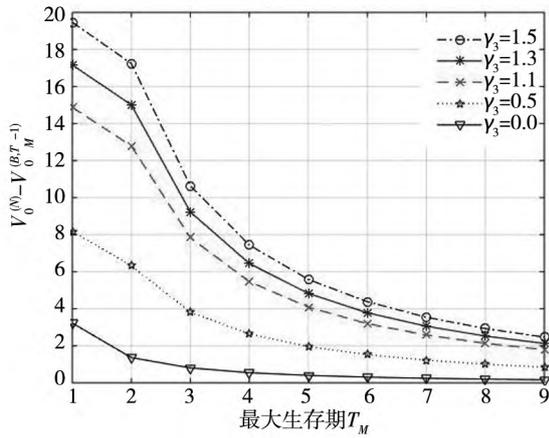
(a) 低风险厌恶系数



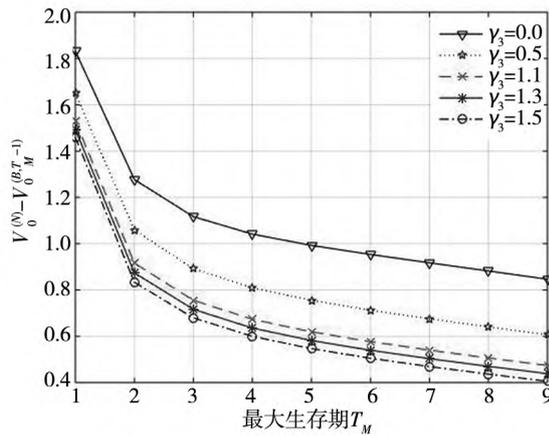
(b) 风险厌恶系数大于 1

图 1 风险厌恶系数的影响

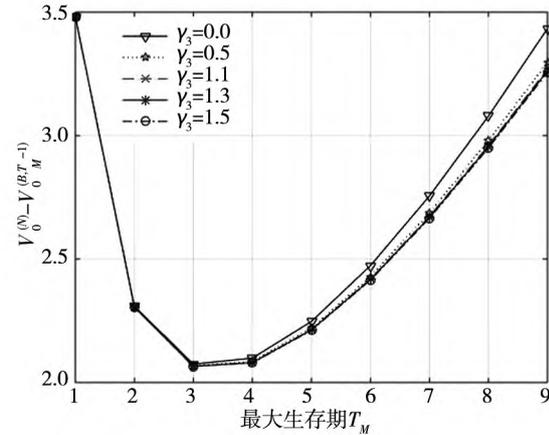
Fig. 1 Effects of the risk aversion



(a) $1 - \gamma = 0.9$



(b) $1 - \gamma = 2$



(c) $1 - \gamma = 5$

图2 遗产动机的影响

Fig. 2 Effects of the bequest motivation

遗产效用系数 λ_3 能否本质改变第一类退休者的年金化决策? 以男性退休者为例, 按风险厌恶系数高低对退休者进行分类. 图2(a)说明, 当风险厌恶系数低于1时, $\lambda_3 = 0$ 都无法改变退休者的年金化决策, 他们依然选择在生存周期内不

购买终身年金. 当 λ_3 更高时, 低风险厌恶的退休者更加不会购买终身年金. 当风险厌恶系数大于1时, 根据图2(b), 可知遗产效用系数 λ_3 越高, 是否购买终身年金形成的效用差距缩小. 为此, 将 λ_3 提高, 看看结果是否有所改变. 最终实验结果表明, 当 $1 - \gamma = 2, 3, 4, 5$ 时, 哪怕遗产效用系数 λ_3 在 $[0, 5]$ 范围内取值, 退休者也不会购买年金. 因此, 可以认为在正常情况下, 对于第一类男性退休者, 遗产动机无法本质改变其年金化决策, 能让他们在生存周期内购买终身年金. 类似地, 也研究了女性退休者的遗产系数对年金化决策的影响, 得到了类似的结果, 在此不再详述.

最后, 对于第一类退休者, 分析折现函数对年金化决策的影响, 同时折现函数能否本质改变其年金化决策? 折现函数代表着退休者对未来价值的现值评估, 如果折现函数越大, 说明未来的价值在退休者眼中越有价值, 他们等待未来回报的耐性程度就越高. 图3说明, 折现函数的值越低, 即退休者对未来价值的现值评估越没信心, 其年金化意愿越高. 由于当风险厌恶系数为 $1 - \gamma = 5$ 时, 得到的结果与图3(b)类似, 在此不再呈现. 另外, 图3也表明, 当风险厌恶系数较大时, 折现函数对是否购买年金形成的效用差距影响较少. 接着, 分析折现函数能否本质改变第一类退休者的年金化决策.

● 低风险厌恶者

根据图2(a)和图3(a)可知, 对于低风险厌恶退休者, 当主观评估的剩余寿命越长, 遗产动机越低, 折现函数越小, 他们在预期生存周期内是否购买年金形成的效用差距就越小. 因此, 先分析低风险厌恶者的决策行为. 经数值分析后发现, 为得到 $V_0^{(B, T_M-1)} = V_0^{(N)}$, 哪怕是在没有遗产动机和 $T_M = T_S - 1$ 的前提下, 当风险厌恶系数为0.9时, 折现函数 $1/(1+\rho)$ 得低至0.5, 这么低的折现函数值在现实里一般是不可能的. 对于遗产效用更高和生存周期更短的退休者, 折现函数值就更低, 更不符合实际情形. 最后, 要说明的是, 本文也研究了女性退休者的行为, 得到类似结果, 在此不再呈现.

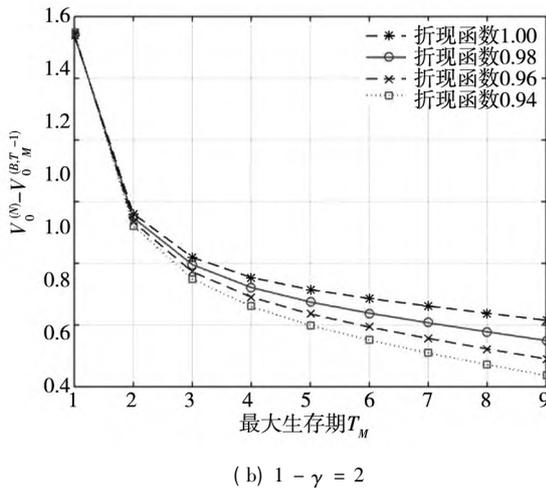
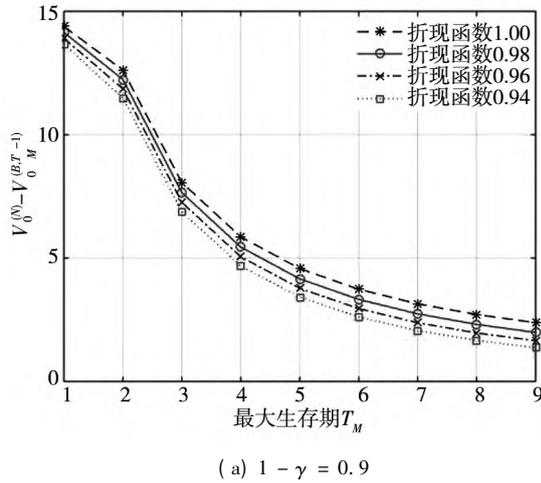


图 3 折现函数的影响

Fig. 3 Effects of the discount function

● 中高风险厌恶者

当风险厌恶系数不低于 2 时, 从图 2 (b) 可知, 高遗产动机且主观评估的剩余寿命较长时, 在预期生存周期内是否购买年金形成的效用差距就越小. 当 $1 - \gamma = 2$ 至 5 时, 哪怕遗产效用系数高达 5, 如果想让第一类退休者在生存周期内购买年金, 其折现函数取值需要低于 0.5, 远低于正常水平的折现函数值. 倘若遗产效用系数在合理范围内变化, 折现函数值需要

达到更低的水平才可以改变第一类退休者的年金化决策. 另外, 由图 1 (b) 可知, 如果风险厌恶系数继续提高, 是否购买终身年金形成的效用差距就越大, 因此就更加不可能改变其不购买年金的行为了.

综合低、中和高风险厌恶退休者的行为表现可知, 对于预估自己活不到最大化年金时刻的退

休者, 或者事后称为短寿的退休者, 只要其个人参数在合理范围内变化而非取极端值, 不购买终身年金是他们始终坚持的策略. 在这部分的结尾处, 本文还对第一类退休者做了极端情况下的压力测试实验. 实验结果表明, 哪怕年金产品附加费率是 0, 风险资产平均收益减少到 1.08, 波动性提高到 0.604 9, 最大生存周期取 9 年, 风险厌恶是 0.9, 不管遗产动机在 $[0, A]$ 和折现函数在 $(0, 1]$ 范围内如何取值, 该类退休者都不会选择在退休时刻就立马购买终身年金. 从后面的研究可知, 这与预期剩余寿命比较乐观的退休者的行为是截然不同的, 由此可见预期寿命对个人决策的影响之大.

2.2 退休者自我评估后得到 $T_M \geq T_S$

当 $T_M \geq T_S$ 时, 退休者以正概率活得过最大年金化时刻 T_S , 此时退休者的年金行为会依赖于 T_S 是否为强制年金化时刻. 如果 T_S 为强制时刻, 此时退休者在生存期内务必要购买终身年金; 如果 T_S 仅是最后可以购买年金的时刻而非强制的, 那么他直到 T_S 时刻也可以不购买年金产品. 在中国 70 岁不是强制年金化时刻, 因为国内没有 IDO 政策. 作为对比, 英国曾经规定 75 岁是强制年金化时刻. 也就是说, 如果退休者到了 75 岁还活着, 养老金账户里的余额必须进行年金化^[7]. 在此, 本文展示了 T_S 是否为强制情形下的研究结果. 首先, 定理 6 给出了当 T_S 是强制年金化时刻时, 退休者在 T_S 时刻购买终身年金的充分条件. 定理 5 中退休者在整个生存期不购买年金的条件对于 $T_M \geq T_S$ 的情形下依然成立.

定理 6 当 $T_M \geq T_S$ 时, 若 T_S 是强制年金化时刻且

$$\lambda_2 (\kappa_T)^\gamma \sum_{k=T}^{T_M-1} \frac{p_m}{(1+\rho)^{k-T}} \leq \lambda_3 p_T + \lambda_1 \left(1 + (\xi_T^{(B, T_S)})^{\frac{1}{1-\gamma}}\right)^{1-\gamma} \sum_{m=T+1}^{T_M} p_m, T = 0, \dots, T_S - 1$$

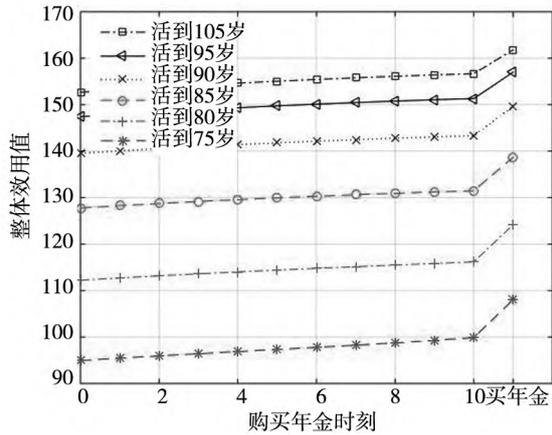
成立, 那么退休者会选择在强制时刻 T_S 购买终身年金.

根据式 (12), 可知 $\xi_T^{(B, T_S)}$ 随着遗产效用系数 λ_3 的增加而增加. 因此, 定理 6 的结果表明, 若遗产效用越高, 退休者就越倾向于在强制年金化

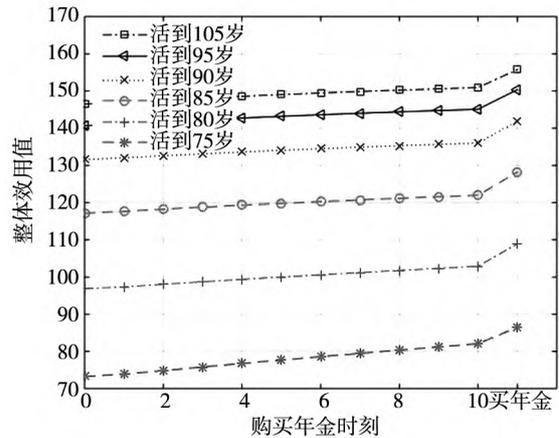
时刻 T_s 购买年金. 下面对第二类的退休者再进行细分, 分为类型 I 和类型 II. 属于类型 I 的退休者认为自己以概率 1 活得过最大年金化时刻 T_s , 即 $p_1 = p_2 = \dots = p_{T_s-1} = 0$; 属于类型 II 的退休者虽然认定自己的最大生存期 T_M 不低于 T_s , 但担心会以一定概率在 $[0, T_s)$ 死亡. 对于类型 I, 在条件 $p_1 = p_2 = \dots = p_{T_s-1} = 0$ 下, 利用中国人寿保险业务生命表(2010-2013)“养老业务”中的男表(CL5)和女表(CL6)数据, 计算出 p_{T_s} 到 p_{T_M} 的概率^②. 对于类型 II, 给定 $T_M \geq T_s$ 的前提下, 由上述生命表直接计算各时刻死亡的概率^③. 在下面的分析过程中, 固定 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 按照最大年金化时刻 T_s 是否为强制, 对比分析退休者整体效用值. 为节约篇幅, 本文分析主要针对男性退休者.

先分析预期寿命对男性退休者决策的影响. 为此, 令遗产效用系数为 $\lambda_3 = 1.015$, 折现函数为 0.96, 风险厌恶系数 $1 - \gamma = 0.9$, 得到了图 4. 该图分别分析了类型 I 和类型 II 退休者在不同时刻购买年金的整体效用, 其中 x 轴标注为“不买年金”, 表示退休者在生存周期内都不购买年金. 从图 4 可以看出: 1) 当风险厌恶系数较低时, 类型 I 和类型 II 退休者的整体效用值随年金化时刻和预期寿命的变化趋势相似, 随着预期寿命的增加和年金化时刻的推移, 整体效用值都呈现递增趋势. 另外, 类型 I 退休者的整体效用比类型 II 的要高, 这是因为类型 I 退休者对自己的预期生存概率有更乐观的评估. 因此, 预期寿命评估对整体效用有正面作用; 2) 在上述参数设置下, 哪怕自我评估可以活到 105 岁(本文生命表里的最大存活年龄)的退休者, 如果 T_s 不是强制年金化时刻, 那么在整个生存期内不进行年金化依然是最佳选择. 如果 T_s 是强制时刻, 那么在该时刻购买终身年金是最佳选择. 对于这种现象, 本文认为, 风险厌恶很低且身体状况良好的退休者, 当年金产品的回报率低而金融市场风险投资情况比较好时, 他们更愿意在金融市场上进行投资而不购买

年金产品. 同时也分析了女性退休者的情形, 得到了相同的结论.



(a) 类型 I 男性退休者



(b) 类型 II 男性退休者

图 4 第二类退休者(低风险厌恶)的整体效用

Fig. 4 The whole utilities for the second group of retirees (low risk aversion)

类似地分析了中高风险厌恶系数(以 $1 - \gamma = 2.5$ 为例)退休者的年金化决策. 研究表明, 与低风险厌恶者的情形不同, 预期寿命较长的中高风险厌恶者会在生存周期内购买终身年金. 表 2 总结了中高风险厌恶者, 在不同预期寿命下的年金化行为, 其中符号 $A(x)$ 表示“如果 70 岁是最大的年金化时刻, 当 70 岁是强制年金化时刻, 那么选择在 x 岁购买; 当 70 岁不是强制年金化时刻, 那么选择终身不购买年金”的年金行为.

② $p_n = P\{\tau = n\} / P\{T_s \leq \tau \leq T_M\}$ $n = T_s, T_s + 1, \dots, T_M$.

③ $p_n = P\{\tau = n\} / P\{\tau \leq T_M\}$ $n = 1, 2, \dots, T_M$.

从表 2 容易看到中高风险退休者的年金化决策和低风险者完全不同. 当风险厌恶系数提高到 2 时, 男性退休者如果对自己的剩余寿命评估相当乐观, 觉得自己能活到 94 岁以上, 那么他们会选择在 70 岁购买终身年金, 不管有没有强制年金化政策. 当风险厌恶系数继续提高到 5, 高寿的退休者更加倾向于购买终身年金而不进行风险投资. 比如, 不管有没有强制年金化政策, 当男性退休者预估自己能活到 89 岁以上时, 他们都会主动在 65 岁之前购买终身年金以规避长寿风险. 当男性退休者预估自己能活到 86 岁 ~ 88 岁之间, 如果存在强制年金化制度, 他们选择在 65 岁 ~ 68 岁之间购买年金. 这些表现和低风险厌恶者是截然不同的. 究其原因, 和短寿退休者更关注其寿命风险不同, 对自己预期寿命评估非常乐观的退休者, 会更关注金融风险, 因此, 当其风险厌恶系数很高且剩余寿命很长时, 他会选择价格波动性更低且能规避长寿风险的年金产品. 另外, 从表 2 还可看到一些有趣的规律: 1) 风险厌恶系数比较高(比如 5) 时, 如果预估寿命越长, 退休者就越早购买终身年金, 并且其主动性就越高. 比如, 风险厌恶系数为 5 的男性退休者, 当预估寿命能高达 89 岁以上时, 他会主动购买年金, 不需要强制策略. 特别地, 如果高风险厌恶者觉得自

己能活到极限寿命 105 岁, 他几乎在退休时刻就主动购买终身年金; 2) 与男性退休者相比, 当自我评估的最大剩余寿命一致的前提下, 女性退休者的年金化时刻更晚, 比如自 55 岁开始, 自我评估能存活到 85 岁的女性退休者, 都选择 A(70) 年金化策略. 作为对比, 自 60 岁开始, 自我评估能活到 90 岁的退休者, 如果风险厌恶系数是 5, 那么他会选择在 64 岁购买终身年金; 3) 经过对比低中高风险厌恶者的年金行为, 本文也注意到, 风险厌恶越高的退休者, 其最佳年金化年龄就越早, 主动性越高. 比如, 对于预估寿命高达 96 岁的男性退休者, 当风险厌恶系数是 5 时, 他会在 62 岁购买终身年金; 当风险厌恶系数降低到 2 时, 这个年龄变为 70 岁. 最后两个规律和 Milevsky 和 Young^[22] 的研究结果是一致的. 然而, Milevsky 和 Young^[22] 的研究内容和研究结果和本文有较大差别, 一方面, 他们仅关注风险厌恶系数以及性别对年金化时刻的影响, 同时采取的数据和本文完全不同. 另一方面, Milevsky 和 Young^[22] 的数值分析结果表明, 当风险厌恶系数是 2 时, 60 岁 ~ 75 岁的女性退休者最佳年金化年龄是 78.4 岁, 男性是 73 岁. 然而, 如果根据实际情况, 这样的结果对退休者是没有参考价值的.

表 2 寿命评估对年金行为的影响

Table 2 The effects of lifespan evaluation on the annuitization behavior

中高风险厌恶者(类型 II 男性退休者)			
风险厌恶系数为 2		风险厌恶系数为 5	
自我评估能活到 x 岁	最佳年金化决策	自我评估能活到 x 岁	最佳年金化决策
94 ~ 105	70 岁购买	96 ~ 105	62 岁购买
71 ~ 93	A(70)	92 ~ 95	63 岁购买
-	-	90 ~ 91	64 岁购买
-	-	89	65 岁购买
-	-	88	A(65)
-	-	87	A(67)
-	-	86	A(68)
-	-	71 ~ 85	A(70)
中高风险厌恶者(类型 II 女性退休者)			
风险厌恶系数为 2		风险厌恶系数为 5	
自我评估能活到 x 岁	最佳年金化决策	自我评估能活到 x 岁	最佳年金化决策
101 ~ 105	70 岁购买	93 ~ 105	70 岁购买
71 ~ 100	A(70)	71 ~ 92	A(70)

为了得到更丰富的结果,本文改变上述参数取值,拟继续分析折现函数、遗产动机、金融环境以及年金产品价格对第二类退休者的年金化决策的影响,这些数值分析内容在以往的文献中并没出现过.在遗产动机影响分析部分,假设退休者的预期寿命是活到85岁,风险厌恶系数为0.9且其他参数值固定不变,来分析遗产动机参数 λ_3 的影响.对于类型I退休者,由于他们在最大年金化时刻 T_s 前不会死亡,因此在 $[0, T_s]$ 区间内年金化后得到的整体效用 $V_0^{(B, T)}$ 不受 λ_3 的影响,终身不进行年金化得到的整体效用 $V_0^{(N)}$ 随着遗产动机参数 λ_3 的增加而增加.对于类型II退休者,得到图5.

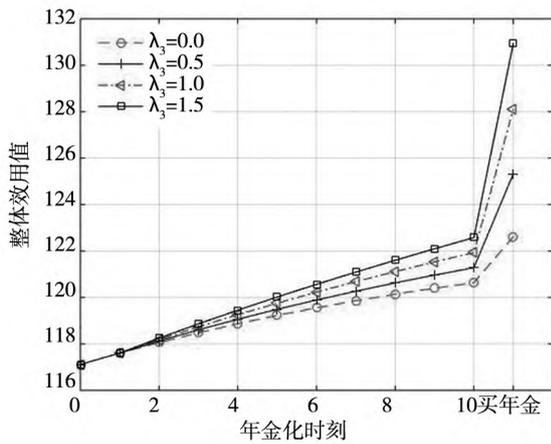


图5 类型II男性退休者(低风险厌恶): 遗产动机的影响
Fig. 5 Type II male retiree (low risk aversion): Effects of the bequest motivation

该图表明,随着遗产动机的增加,在时刻 $1, 2, \dots, T_s$ 年金化和终身不年金化得到的整体效用都提高了,且 $V_0^{(N)} - V_0^{(B, T_s)}$ 的差距更大. 综上所述可知,随着遗产动机的增加,类型I和类型II的退休者都更不愿意在生存期内购买年金,如果 T_s 是强制时刻,那么他们就越偏向于在 T_s 时刻进行年金化. 本文把预期寿命提高到105岁,依然得到上述结论. 因此,对于类型I和类型II的低风险厌恶退休者,在上述参数设置下,哪怕高寿和没有遗产动机,如果最大化年金时刻不是强制的,他们依然不会选择购买终身年金,更加不会在退休时刻就购买年金产品. 下面以类型II型男性退休者为例,分析中高风险厌恶者($1 - \gamma = 2.5$)的年金行为. 研究结果表明,当风险厌恶系

数分别为2和5时,遗产效用几乎对整体效用值影响非常小,即使 λ_3 在0到5之间变化,整体效用值几乎没发生改变. 因此可知,当金融产品参数保持之前设定,第二类退休者的遗产效用不会本质改变其年金化决策. 第二类退休者对遗产效用的惰性表现是合理的,因为他们对自身的预期寿命评价相当乐观,在金融市场环境相对较好的前提下,预估高寿的退休者会弱化其遗产动机的作用. 然而,从后面的表4可知,当金融投资环境变差以及年金产品价格变低时,风险厌恶系数较低且预期寿命较长的第二类退休者,遗产效用会明显改变退休者的年金行为.

对于折现函数的影响,考虑到类型I和类型II的退休者决策特征的相似性,本文仅呈现折现函数对类型I退休者的决策影响. 分析不同风险厌恶的退休者,折现函数能否改变其年金化决策.

● 低风险厌恶者

首先,以预期寿命为85岁, $1 - \gamma = 0.9$, $\lambda_3 = 1.1015$ 的类型I男性退休者为例研究整体效用与折现函数的变化关系. 图6表明折现函数对整体效用有正面影响,且折现函数越小,是否购买年金形成的效用差距越小,不同年金化决策下形成的整体效用曲线趋于平缓. 本文进一步研究还表明,如果金融产品回报和年金产品价格不改变的话,折现函数取值无法本质改变低风险厌恶退休者的年金决策. 换句话说,退休者的决策依然是,如果有强制年金化时刻,他们选择在强制年金化时刻购买终身年金; 如果没有强制年金化时刻,他们在生存期内都不购买年金产品. 下面适当改变客观金融环境参数,将风险资产的平均回报稍微下降到1.1133,方差稍微提高到0.3249,看看折现函数的影响是否发生本质改变. 对于年金产品,附加费率是15%使得年金产品回报率较低,比如男性用10万元在70岁购买年金,在死亡前每一年得到的固定金额仅为6848元,在不考虑折现的前提下,退休者必须活到85岁以上才可以回本. 因此,把年金产品回报率提高,将年金化因子(年金价格的倒数)的值提高10%. 在表3中,以风险厌恶系数为0.9和 $\lambda_3 = 0$ 的退休者为例,说明折现函数对年金行为的影响. 表3

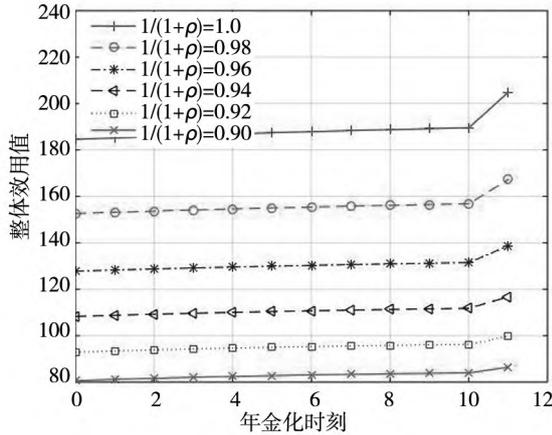


图 6 类型 I 男性退休者: 折现函数的影响

Fig. 6 Type I male retiree: Effects of the discount function

表 3 折现函数对年金行为的影响

Table 3 The effects of discount function on the annuitization behavior

类型 I 男性退休者, $1 - \gamma = 0.9, \lambda_3 = 0$		
最大生存周期/年	折现函数	最佳年金行为
45	1.00	在 70 岁购买终身年金
	0.99	在 69 岁购买终身年金
	0.96 ~ 0.98	在 68 岁购买终身年金
	0.91 ~ 0.95	在 70 岁购买终身年金
	0.85 ~ 0.90	A(70)
35	1.00	在 69 岁购买终身年金
	0.97 ~ 0.99	在 68 岁购买终身年金
	0.93 ~ 0.96	在 70 岁购买终身年金
	0.85 ~ 0.92	A(70)
25	0.85 ~ 1.00	A(70)

表明: 1) 和第一类短寿退休者的结果截然不同, 随着金融产品和年金产品相关参数的改变, 第二类退休者的折现函数能本质改变其年金行为. 比如当退休者预期能活到 95 岁时, 如果其折现函数在 0.93 ~ 1.00 之间时, 在最大年金化时刻之前购买年金是其最佳决策, 然而当折现函数值继续降低时, 他会改为 A(70) 年金行为; 2) 总的来说, 最大生存周期越短和对未来价值的现值评估越悲观的退休者越倾向于 A(70) 行为; 3) 对个人而言, 正常情况情况下, A(70) 是最佳的年金化方案. 也就是说, 若没有强制年金化政策, 退休者在生存周期内能得到更高的效用均值. 中国目前采取没有强制年金化时刻的制度, 倘若要推行类似的 IDO 制度, 如果金融投资环境较好, 也可以考虑不设定强制年金化时刻, 以最大化退休

者的个人利益. 为了和类型 I 退休者进行对比, 本文研究了类型 II 退休者的年金化决策, 归纳在表 4. 由于类型 II 退休者的年金化决策性质和类型 I 退休者的类似, 为节约篇幅, 仅给出了风险厌恶系数是 0.9 以及最大生存周期为 35 年情形下的结果.

表 4 个人因素对年金行为的影响

Table 4 Effects of the personal factors on the annuitization behavior

类型 II 男性退休者, $1 - \gamma = 0.9, T_M = 35$		
折现函数	遗产动机	最佳年金行为
1	0.2 ~ 1.0	A(70)
	0.0 ~ 0.1	在 70 岁购买终身年金
0.98	0.2 ~ 1.0	A(70)
	0.1	在 69 岁购买终身年金
	0.0	在 68 岁购买终身年金
0.96	0.2 ~ 1.0	A(70)
	0.0 ~ 0.1	在 70 岁购买终身年金
0.94	0.1 ~ 1.0	A(70)
	0.0	在 70 岁购买终身年金
≤ 0.92	所有折现函数	A(70)

表 4 表明: 1) 在相同的条件下, 类型 II 退休者的年金化时刻比类型 I 退休者的稍微有延后趋势, 因为类型 II 退休者对自己的生存概率评估要悲观一些. 比如, 当 $T_M = 35, \lambda_3 = 0$ 和折现函数是 1 时, 类型 II 退休者在 70 岁购买年金为最佳, 而类型 I 退休者在 69 岁购买年金为最佳; 2) 该表再次说明, 在一定条件下, 折现函数能本质改变类型 II 退休者的年金行为; 3) 当金融市场环境变差, 年金产品收益增加时, 遗产动机能本质改变类型 II 退休者的年金行为. 如果遗产动机越强烈, 类型 II 退休者的最佳年金化时间就越晚. 比如当折现函数固定为 0.96 时, 对于没有遗产动机的退休者, 他主动在 70 岁购买终身年金, 但对于遗产动机较高的退休者, 只有在强制年金化制度下, 他们才会选择在 70 岁购买年金, 否则终身不购买. 这些反应跟短寿的退休者截然不同.

● 中高风险厌恶者

对于中高风险厌恶者, 得到的结果归纳在表 5 和表 6 中. 对比表 5、表 6 和表 3, 发现: 1) 当风险厌恶系数分别提高到 2 和 5 时, 折现函数的确

可以本质改变退休者的年金化决策; 2) 从表 5 可知, 当金融市场投资环境变差时, 退休者会提前购买终身年金. 比如同样预期寿命是 95 岁, 折现函数是 0.97, 当金融环境较好(风险资产收益率为 16.33%, 方差为 0.303 9), 退休者会选择在 70 岁才购买终身年金. 然而, 当金融环境变差时(收益率较少且波动性增加), 退休者改为在 60 岁, 即退休时刻就立马购买终身年金; 3) 风险厌恶系数越高, 退休者对折现函数和金融市场的改变就越敏感. 对比表 5 和表 6 可知, 当退休者预期活到 95 岁时, 对于风险厌恶系数是 5 的退休者, 折现函数每改变 0.01, 最佳的购买年金的岁数都会发生改变. 作为对比, 风险厌恶为 2 的退休者反应并没那么灵敏. 另外, 当金融投资

表 5 折现函数对年金行为的影响

Table 5 Effects of the discount function on the annuitization behavior

类型 I 男性退休者, $1 - \gamma = 2, \lambda_3 = 0$		
风险资产的年化收益率均值为 16.33%, 方差为 0.303 9		
最大生存周期/年	折现函数	最佳年金行为
45	0.91 ~ 1.00	在 70 岁购买终身年金
	0.85 ~ 0.90	A(70)
35	0.96 ~ 1.00	在 70 岁购买终身年金
	0.85 ~ 0.95	A(70)
≤ 25	0.85 ~ 1.00	A(70)
风险资产的年化收益率均值为 11.33%, 方差为 0.323 9		
最大生存周期/年	折现函数	最佳年金行为
45	1.00	在 63 岁购买终身年金
	0.99	在 61 岁购买终身年金
	0.96 ~ 0.98	在 60 岁购买终身年金
	0.95	在 64 岁购买终身年金
	0.94	在 69 岁购买终身年金
	0.87 ~ 0.93	在 70 岁购买终身年金
	≤ 0.86	A(70)
35	1.00	在 62 岁购买终身年金
	0.97 ~ 0.99	在 60 岁购买终身年金
	0.96	在 62 岁购买终身年金
	0.95	在 67 岁购买终身年金
	0.90 ~ 0.94	在 70 岁购买终身年金
≤ 0.89	A(70)	
≤ 25	0.85 ~ 1.00	A(70)

环境由好变差时, 预期生存周期为 35 年且风险系数为 5 的退休者, 折现函数在 0.9 ~ 1.0 范围内都改为在 60 岁购买终身年金, 而风险厌恶系数为 2 的退休者, 只有当折现函数在 0.97 ~ 0.99 范围内, 才会选择在 60 岁购买终身年金. 最后, 结合表 4 ~ 表 6 可以发现, 金融市场大环境对退休者的年金化决策影响甚大, 特殊是对风险厌恶系数较高的退休者. 当金融投资环境变差时, 退休者的年金化主动性会提高, 年金化年龄会提前. 最后, 即使没有最大化年金时刻制度, 退休者愿意主动购买年金的年龄, 基本上在 70 岁(含) 之前, 这或许是国内设置 70 岁作为最大年金化时刻的一个原因.

最后, 保持原始的金融风险资产收益参数, 以分析年金产品价格改变对退休者年金化决策的影响. 国内年金产品价格的附加费率一般设为 15%, 因此, 假设附加费率在 [0, 15%] 范围内变化, 附加费率越低, 年金产品的价格就越低. 以类型 I 女性退休者为例进行研究. 根据之前的研究结果, 考虑到遗产效用在刚才的金融环境下对

表 6 折现函数对年金行为的影响

Table 6 Effects of the discount function on the annuitization behavior

类型 I 男性退休者, $1 - \gamma = 5, \lambda_3 = 0$		
风险资产的年化收益率均值为 16.33%, 方差为 0.303 9		
最大生存周期/年	折现函数	最佳年金行为
35	1.00	在 62 岁购买终身年金
	0.97, 0.99	在 61 岁购买终身年金
	0.98	在 60 岁购买终身年金
	0.96	在 62 岁购买终身年金
	0.95	在 64 岁购买终身年金
	0.94	在 66 岁购买终身年金
	0.93	在 68 岁购买终身年金
	0.82 ~ 0.92	在 70 岁购买终身年金
≤ 0.81	A(70)	
风险资产的年化收益率均值为 11.33%, 方差为 0.323 9		
最大生存周期/年	折现函数	最佳年金行为
35	0.90 ~ 1.00	在 60 岁购买终身年金
	0.89	在 65 岁购买终身年金
	0.88	在 68 岁购买终身年金
	0.80 ~ 0.87	在 70 岁购买终身年金

中高风险厌恶者的整体效用影响不大,在此设 $\lambda_3 = 1.015$, 另外折现函数取值 0.96. 当类型 I 女性退休者的风险厌恶系数是 0.9 时, 不管预期寿命为何, 以及附加费率在 $[0, 15\%]$ 范围内如何取值, 类型 I 女性退休者依然选择 A(70) 策略. 当类型 I 女性退休者的风险厌恶系数分别为 2 和 5 时, 得到表 7.

表7 年金产品附加费率的影响

Table 7 Effects of the loading rate

类型 I 女性退休者, $1 - \gamma = 2$		
最大生存周期/年	年金产品附加费率	最佳年金行为
50	0 ~ 15%	在 70 岁购买终身年金
45	0 ~ 14%	在 70 岁购买终身年金
	15%	A(70)
40	0 ~ 6%	在 70 岁购买终身年金
	7% ~ 15%	A(70)
≤ 35	0% ~ 15%	A(70)
类型 I 女性退休者, $1 - \gamma = 5$		
45 ~ 50	0 ~ 10%	在 55 岁购买终身年金
	11%	在 60 岁购买终身年金
	12%	在 64 岁购买终身年金
	13%	在 66 岁购买终身年金
	14%	在 68 岁购买终身年金
	15%	在 70 岁购买终身年金
40	0 ~ 10%	在 55 岁购买终身年金
	11%	在 61 岁购买终身年金
	12%	在 65 岁购买终身年金
	13%	在 68 岁购买终身年金
	14% ~ 15%	在 70 岁购买终身年金
35	0 ~ 8%	在 55 岁购买终身年金
	9%	A(55)
	10%	A(58)
	11%	A(64)
	12%	A(68)
	13% ~ 15%	A(70)
30	0 ~ 9%	A(55)
	10% ~ 15%	A(70)
25	0 ~ 6%	A(55)
	7% ~ 15%	A(70)
≤ 25	0 ~ 15%	A(70)

表 7 表明: 1) 一般来说, 附加费率的改变对退休者的年金化决策影响较大, 附加费率越大, 退休者购买年金的年龄就越晚, 年金化积极性就越低. 因此, 合理制定附加费率对保险公司提高

年金产品的吸引力意义甚大; 2) 风险厌恶系数为 5 的退休者, 其年金行为对附加费率的改变非常敏感. 比如, 在 55 岁退休, 个人预估生存周期在 45 年 ~ 50 年的女性退休者, 附加费率每增加一个百分点, 其年金化年龄会推迟好几岁; 个人预估能活到 90 岁的女性退休者, 如果附加费率较低时, 她会选择退休时刻就立马购买终身年金. 然而, 当附加费率提高时, 她必须在强制年金化时刻制度的约束下, 才会考虑购买终身年金; 3) 生存周期越短的退休者, 对附加费率的改变越不敏感, 他们普遍会考虑 A(70) 年金策略.

前面得到了不同类型的退休者的年金化决策行为, 从而可以给保险公司或者相关政府部门提供一些决策参考. 如果保险公司想提高年金产品的销量, 它需要重点关注第二类退休者, 特别是风险厌恶高、遗产动机低、折现函数高、剩余生存周期长的退休者. 在可能的前提下, 适当降低年金产品的附加费率, 吸引更多的退休者购买终身年金. 特别地, 对于不同生存周期的退休者实行不同的附加费率更容易吸引到退休者购买年金产品. 另外, 金融环境不佳是提高销售额的一个好时机. 对于相关政府机构, 如果要制定类似于国外的 IDO 策略, 在整体金融投资环境较好的前提下, 可以设定非强制年金化时刻; 在金融投资环境较差的前提下, 可以设置 70 岁作为强制年金化时刻, 以保障退休者的权益.

3 结束语

本文考虑退休者的死亡风险以及遗产效用, 研究了退休后期的最优投资-消费-年金化时刻决策. 利用动态规划和数学分析手段得到了两类退休者的最优投资-消费策略, 第一类退休者在生存期内都不购买终身年金和第二类退休者在强制年金时刻购买终身年金的充分条件. 通过数值分析手段, 得到了退休者的最优年金时刻, 并详细分析了性别、生存周期、遗产效用、折现函数、风险厌恶系数、金融投资环境以及年金产品价格对不同退休者年金行为的影响. 本文把所得的数值分析结果归纳如下: 1) 对于预估自己活不到最大化年金时刻的第一类退休者, 或者事后称为短寿

的退休者,只要个人参数在合理范围内变化而非取极端值,哪怕金融投资环境较差,年金产品价格较低,不购买终身年金是他们始终坚持的策略; 2) 自我评估为短寿类型的退休者更关注其死亡风险,他们会把投资年金产品视为一项高风险投资行为,因此,若风险厌恶程度越高,第一类退休者就越不愿意购买终身年金. 这样的行为特征和第二类退休者是截然不同的; 3) 对于第二类退休者,如果风险厌恶系数较低,一般情况下,如果最大年金化时刻 T_s 是强制的,那么退休者选择在 T_s 时刻购买终身年金; 如果 T_s 是非强制的,那么退休者选择在整个生存周期都不购买年金. 然而,当投资环境不太好,遗产效用较低时,低风险厌恶的第二类退休者会选择在 70 岁购买终身年金. 因此,当整体投资环境变差时,相关政府机构可以出台强制年金化政策,保障退休者的利益. 另外,本研究结果也验证了 70 岁作为最大或者强制年金化时刻的合理性; 4) 中高风险厌恶的第二类退休者,如果其生存周期越长,折现函数值越大,就越倾向于在 70 岁之前购买终身

年金,甚至在退休时刻就购买终身年金; 5) 年金产品的附加费率对第二类退休者的年金行为影响甚大. 这类退休者的风险厌恶系数越大,预估的剩余寿命越长,附加费率的影响就越大. 因此,为了让更多的退休者积极主动地,更早地购买终身年金,保险公司要针对不同健康状态的退休者制定不同的年金价格,而不仅仅是根据其年龄来制定年金价格; 6) 金融产品收益对第二类退休者的年金决策影响甚大,特别是对风险厌恶系数较高的退休者. 当金融投资环境变差时,退休者的年金化主动性会提高,年金化年龄会提前.

虽然本文对带有主观死亡概率评估的退休后最优投资-消费-年金化时刻决策进行了详细的分析,但仍不可避免地存在一些研究局限. 比如假设在年金时刻就把所有的财富购买终身年金,并没有考虑如何选择年金化的财富数量. 购买的年金产品属于即期年金,对于延期年金产品的最优年金时刻性质如何,依然值得深入的探讨. 另外,由于篇幅有限,也无法呈现所有退休者的决策情况.

参考文献:

- [1]何林,冷嫣然. 基于 CPT 效用的养老金补缴内涵价值分析—以山东省 1978 年~2016 年经验数据为例[J]. 管理科学学报,2020,23(4): 65-79.
He Lin, Leng Yanran. An intrinsic value analysis of one-time endowment payment policy based on CPT utility: Taking Shandong Province's 1978~2016 empirical data as an example[J]. Journal of Management Sciences in China, 2020, 23(4): 65-79. (in Chinese)
- [2]赵耀辉,杨翠红,李善同,等. 人口结构变化与社会经济发展[J]. 管理科学学报,2021,24(8): 154-162.
Zhao Yaohui, Yang Cuihong, Li Shantong, et al. Demographic change and socio-economic development [J]. Journal of Management Sciences in China, 2021, 24(8): 154-162. (in Chinese)
- [3]邱牧远,王天宇,梁润. 延迟退休、人力资本投资与养老金财政平衡[J]. 经济研究,2020,(9): 122-137.
Qiu Muyuan, Wang Tianyu, Liang Run. Raising retirement age, human capital accumulation and fiscal balance of pension [J]. Economic Research Journal, 2020, (9): 122-137. (in Chinese)
- [4]Lockwood L M. Bequest motives and the annuity puzzle [J]. Review of Economic Dynamics, 2012, (15): 226-243.
- [5]Goedde-Menke M, Lehmsiek-Starke M, Nolte S. An empirical test of competing hypotheses for the annuity puzzle [J]. Journal of Economic Psychology, 2014, (43): 75-91.
- [6]d'Albis H, Kalk A. Why do we postpone annuity purchases? [J]. Journal of Mathematical Economics, 2021, (95): 102500.
- [7]Gerrard R, Haberman S, Vigna E. Optimal investment choices post-retirement in a defined contribution pension scheme [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2004, (35): 321-342.
- [8]Di Giacinto M, Federico S, Gozzi F, et al. Income drawdown option with minimum guarantee [J]. European Journal of Operational Research, 2014, (234): 610-624.

- [9]伍慧玲,董洪斌. 带有通胀风险的退休后期最优投资管理[J]. 系统工程理论与实践,2018,38(8):1930-1945.
Wu Huiling, Dong Hongbin. Optimal investment strategies post retirement with inflation risk[J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2018, 38(8): 1930-1945. (in Chinese)
- [10]Lin C W, Zeng L, Wu H L. Multi-period portfolio optimization in a defined contribution pension plan during the decumulation phase[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2019, 15(1): 401-427.
- [11]Dadashi H. Optimal investment strategy post retirement without ruin possibility: A numerical algorithm[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, (363): 325-336.
- [12]Wu H L, Wang X G, Liu Y Y, et al. Multi-period optimal investment choice post-retirement with inter-temporal restrictions in a defined contribution pension plan[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2020, 16(6): 2857-2890.
- [13]伍慧玲,王静,王秀国,等. 带有通胀风险的退休后最优投资 - 年金化时刻决策[J]. 运筹与管理, 2022, 31(7): 124-130.
Wu Huiling, Wang Jing, Wang Xiuguo, et al. Optimal investment and timing of annuitization post retirement with inflation risk[J]. Operations Research and Management Science, 2022, 31(7): 124-130. (in Chinese)
- [14]Forsyth P A, Vetzal K R, Westmacott G. Optimal asset allocation for DC pension decumulation with a variable spending rule[J]. Astin Bulletin, 2020, 50(2): 419-447.
- [15]Emms P. Relative choice models for income drawdown in a defined contribution pension scheme[J]. North American Actuarial Journal, 2010, 14(2): 176-197.
- [16]Dadashi H. Optimal investment-consumption problem: Post-retirement with minimum guarantee[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2020, (94): 160-181.
- [17]Zhang X Y. Optimal DC pension management under inflation risk with jump diffusion price index and cost of living process[J]. Methodology and Computing in Applied Probability, 2022, (24): 1253-1270.
- [18]Liang X Q, Young V R. Annuitization and asset allocation under exponential utility[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2018, (79): 167-183.
- [19]Baltas I, Dopierala L, Kolodziejczyk K, et al. Optimal management of defined contribution pension funds under the effect of inflation, mortality and uncertainty[J]. European Journal of Operational Research, 2022, (298): 1162-1174.
- [20]Gerrard R, Højgaard B, Vigna E. Choosing the optimal annuitization time post-retirement[J]. Quantitative Finance, 2012, 12(7): 1143-1159.
- [21]Stabile G. Optimal timing of the annuity purchase: Combined stochastic control and optimal stopping problem[J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2006, (9): 151-170.
- [22]Milevsky M A, Young V R. Annuitization and asset allocation[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2007, (31): 3138-3177.
- [23]Liang X Q, Peng X F, Guo J Y. Optimal investment, consumption and timing of annuity purchase under a preference change[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, (413): 905-938.
- [24]Hainaut D, Deelstra G. Optimal timing for annuitization, based on jump diffusion fund and stochastic mortality[J]. Journal of Economic Dynamics & Control, 2014, (44): 124-146.
- [25]Angelis T D, Stabile G. On the free boundary of an annuity purchase[J]. Finance Stochastic, 2019, (23): 97-137.
- [26]DeLong L, Chen A. Asset allocation, sustainable withdrawal, longevity risk and non-exponential discounting[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2016, (71): 342-352.
- [27]Han N W, Hung M W. The annuity puzzle and consumption hump under ambiguous life expectancy[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2021, (100): 76-88.
- [28]Chen A, Hieber P, Rach M. Optimal retirement products under subjective mortality beliefs[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2021, (101): 55-69.
- [29]Wu H L, Weng C G, Zeng Y. Equilibrium consumption and portfolio decisions with stochastic discount rate and time-var-

ing utility functions [J]. *OR Spectrum*, 2018, (40): 541–582.

[30] Finkelstein A, Poterba J. Selection effects in the United Kingdom individual annuities market [J]. *Economic Journal*, 2002, (112): 28–50.

Optimal investment, consumption and annuitization time for post-retirement decision with subjective mortality probabilities

WU Hui-ling, LIAO Pu

China Institute for Actuarial Science, Central University of Finance and Economics, Beijing 102206, China

Abstract: This paper studies the optimal post-retirement investment, consumption, and annuitization time for the retirees with mortality risk and bequest utility. According to the subjective mortality probability at retirement, the retirees are divided into two groups: the first group cannot live up to the maximum annuitization time with a probability of one, and the second group can live up to the maximum annuitization time with a certain probability less than one. Since retirement, the retirees need to determine the investment and consumption until the death time or the annuitization time. The optimal annuitization time is the time that maximizes the sum of the cumulated expected consumption utilities before and after purchasing an annuity and the expected bequest utility. By adopting a power utility function, this paper obtains the closed-form optimal investment-consumption strategy and the conditions under which the first group of the retirees do not buy the annuity throughout the lifetime and the second group buy the annuity at the maximum annuitization time. Finally, a numerical analysis is provided to analyze the effects of gender, the survival period, the bequest utility, the discount function, the risk aversion, the financial environment, and the annuity price on the annuitization behaviors of the retirees.

Key words: post-retirement; optimal investment, consumption and annuitization time; mortality risk; bequest utility; dynamic programming