

doi:10.19920/j.cnki.jmsc.2024.07.001

# 多卡车与多无人机协同配送路径优化问题研究<sup>①</sup>

镇璐, 高佳静, 谭哲一  
(上海大学管理学院, 上海 200444)

**摘要:** 随着智能物流业的飞速发展, 卡车和无人机协同运输系统在业界的探索性应用越来越引起学界研究的重视. 本文研究了多卡车多无人机协同配送问题, 以最小化系统的总成本为优化目标, 建立一个混合整数规划模型. 为了求解该模型, 本研究还设计了一种基于列生成的求解算法, 以及基于变邻域搜索算法的加速算法改进策略, 进一步缩短求解时间. 本研究通过大量数值实验验证了所提模型的有效性和算法的有效性, 另外还通过一些敏感性分析实验提出了若干对实践有指导意义的管理启示.

**关键词:** 协同配送; 路径优化; 无人机; 混合整数规划; 列生成

**中图分类号:** F252; U116; TP18 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2024)07-0001-18

## 0 引言

近年来随着智能物流、电子商务、快递行业的快速发展, 基于无人机的“最后一公里”配送系统设计与应用受到了广泛关注. 尤其在2019年突发公共卫生事件的背景下, 无人化配送等无接触商业模式将越来越被重视. 与传统卡车配送相比, 物流无人机有如下优势: 1) 突破了道路限制, 无人机的飞行线路多为直线, 比传统卡车的行驶路线短; 2) 使用无人机可以降低运营成本; 3) 使用无人机可以缓解道路拥堵, 提高配送效率. 然而, 无人机配送在应用中也存在如下弊端: 1) 电池续航时间短, 因此无法进行更长距离的配送; 2) 有效荷载较低, 因此无人机配送对货物的重量有较大限制; 3) 容易受天气影响.

2014年AMP公司和辛辛那提大学联合团队开发了一种卡车和无人机协同送货系统, 可以有效弥补无人机配送中存在的上述缺陷<sup>[1]</sup>. 当一辆送货卡车在运送货物给客户时, 卡车上的无人机从卡车上取一个包裹, 运送给另一个客户, 无人机送货过程中, 卡车继续前进配送货物给下一个客户. 无人机送货后, 在客户点返回到卡车上, 不断重复此过程, 实

现卡车和无人机协同配送, 服务完所有客户. 图1展示了一个基于三种配送方式(单独使用卡车配送、单独使用无人机配送、卡车与无人机协同配送)服务13个客户点的路线图以及亚马逊公司推出的卡车机组. 通过三种配送方式的路线图比较, 多卡车多无人机协同配送系统提供了一种降低成本和提高物流配送的效率的新方式新思路.

基于以上背景, 本研究考虑了一辆卡车上只搭载一架相对应的无人机的情况, 即构成一个卡车机组, 对多卡车多无人机协同配送路径问题(vehicle routing problem of trucks and drones cooperative delivery, VRPTD)进行了研究. 针对该问题, 本研究建立了一种混合整数规划(mixed integer programming, MIP)模型对卡车和无人机配送路径进行优化, 设计并实现了基于列生成的求解算法. 为了加快算法的求解速度, 设计了变邻域搜索算法(variable neighborhood search, VNS)来解决子问题(pricing problem, PP). 最后, 本研究通过数值实验验证了所提模型的正确性和算法的有效性, 另外通过一些敏感性分析实验提出了若干对实践有指导意义的管理启示.

<sup>①</sup> 收稿日期: 2020-06-27; 修订日期: 2021-09-24.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(72025103; 72361137001; 72394362; 72394360).

作者简介: 镇璐(1981—), 男, 湖北宜都人, 教授, 博士生导师. Email: lzhen@shu.edu.cn

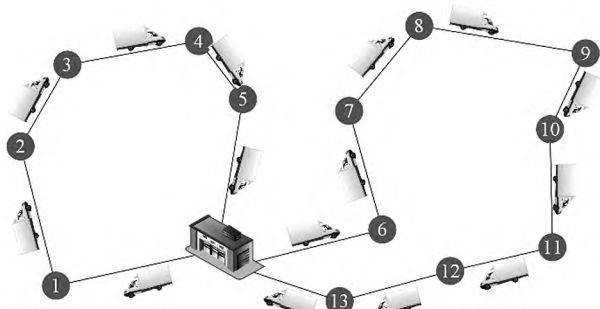


图 1.1 只有卡车的配送路线

Fig 1.1 Delivery routes by only trucks



图 1.2 只有无人机的配送路线

Fig 1.2 Delivery routes by only drones

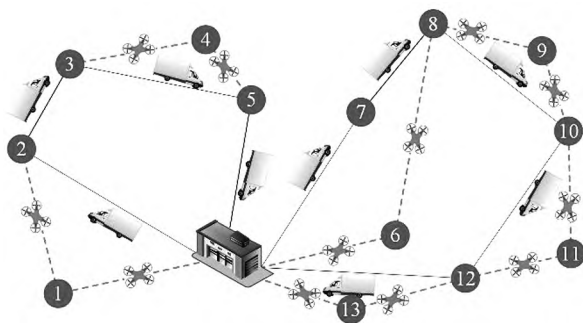


图 1.3 卡车和无人机协同的配送路线

Fig 1.3 Cooperative delivery routes by trucks and drones



图 1.4 卡车机组

Fig 1.4 Truck groups



图 1 多卡车多无人机协同配送示意图

Fig. 1 Schematic diagram of multiple trucks and drones cooperative delivery

# 1 文献综述

本研究所涉及的核心科学问题本质上是车辆路径问题 (vehicle routing problem, VRP), 它是由 Dantzig 和 Ramser 于 1959 年首次提出的<sup>[2]</sup>. VRP 是一个复杂的组合优化问题, 本文所研究的 VRPTD 是 VRP 的一个新变体. 根据卡车数量的不同, 卡车无人机合作配送的研究可分为两大类: 一类是使用单辆卡车的无人机旅行商问题 (traveling salesman problem with drones, TSP-D), 另一类是使用多辆卡车的无人机车辆路径问题 (vehicle routing problem with drones, VRP-D), 本研究的 VRPTD 属于 VRP-D 的一种特定情况.

## 1.1 单卡车单无人机配送

以时间为优化目标: Murray 和 Chu<sup>[3]</sup>最早对无人机与传统的送货卡车协作来分配包裹进行研究, 以最小化车辆返回到仓库的时间为目标, 建立了 MIP 模型, 并设计了启发式算法求解此问题.

Carlsson 和 Song<sup>[1]</sup>以卡车和无人机完成路线并返回仓库的时间最小化为目标, 并将欧几里得平面理论分析与道路网络的实时数值模拟相结合. Poikonen 等<sup>[4]</sup>采用分支定界法求解 TSP-D 问题. 基于 Murray 和 Chu<sup>[3]</sup>提出的问题, de Freitas 和 Penna<sup>[5]</sup>提出了一种基于变邻域搜索的混合广义变邻域搜索启发式算法解决 TSP-D 问题, 并通过数值实验验证了卡车和无人机协同配送模式对于最后一英里包裹递送是有效的. Boccia 等<sup>[6]</sup>以配送时间最小化为目标, 建立了模型并设计了一个列和行生成算法进行求解. Roberti 和 Ruthmair<sup>[7]</sup>以总时间最小化为目标, 建立了混合整数线性规划模型并设计了一个精确的分支定价算法进行求解.

以成本为优化目标: 在物流活动中成本也是管理者关心的优化目标, 除了以配送完成的时间最小化为目标外, 一些研究从成本角度进行了优化研究. Agatz 等<sup>[8]</sup>基于局部搜索和动态规划, 开发了几种求解 TSP-D 的启发式算法. 实验结果表

明,与卡车运输相比,卡车与无人机的协同运输可以节省大量的费用。Ha等<sup>[9]</sup>为解决TSP-D问题,以运营成本最小化为目标,建立了MIP模型并提出了两种启发式方法。Vásquez等<sup>[10]</sup>针对TSP-D问题,建立了一种新的两阶段MIP模型,并设计了基于bender-type分解算法的精确求解方法。

以时间和成本为优化目标:一些研究同时考虑运营成本和完成时间的优化目标,对单卡车和单无人机合作配送进行了多目标建模研究,以此来得到一个折中的解决方案。Omagari和Higashino<sup>[11]</sup>将无人机配送问题定义为一个约束多目标优化问题。针对该问题提出了“基于临时理想点的方法”。Wang等<sup>[12]</sup>考虑TSP-D的多目标性,讨论了同时考虑时间和成本的双目标TSP-D问题,提出了一种改进的非支配排序遗传算法。根据Murray和Chu<sup>[3]</sup>、Ha等<sup>[9]</sup>与de Freitas和Penna<sup>[5]</sup>的实例集,Ha等<sup>[13]</sup>为解决TSP-D问题,在最小化运营成本和最小化时间目标下,提出了将遗传算法和局部搜索技术结合的混合遗传算法。

### 1.2 单卡车多无人机配送

在前面单卡车单无人机配送问题的基础上,一些学者开始开展单卡车多无人机问题研究。Murray和Raj<sup>[14]</sup>研究了一辆送货卡车和一组不同的无人机相互协调配送包裹,以最小化返回仓库的时间为目标,建立了MIP模型,并设计了三阶段启发式求解方法。Murray和Chu<sup>[3]</sup>将除了研究单卡车和单无人机问题,还同时研究了单卡车多无人机合作配送包裹问题,建立了以最小化卡车和无人机返回到仓库的时间为目标的MIP模型,并设计了启发式算法求解问题。Poikonen和Golden<sup>[15]</sup>放宽了之前文献中经常出现的一些约束,考虑了一辆卡车上搭载多架无人机的情况,以最小化时间为目标并设计了一种启发式算法进行求解。Gomez-Lagos等<sup>[16]</sup>对一辆卡车上搭载多架无人机进行了研究,建立了混合整数线性规划模型并设计了元启发式算法进行求解。

### 1.3 多卡车多无人机配送

随着客户点的增加,客户需求总和可能超过

一辆卡车的载重量,因此需要增加卡车的数量,多辆卡车同时运行,从而减少总服务时间。Wang等<sup>[17]</sup>考虑 $m$ 辆卡车携带的 $m$ 架无人机与 $n$ 辆独立的无人机一起将包裹配送给客户的情况,提出了一种混合卡车无人机交付算法。Sacramento等<sup>[18]</sup>研究了每辆卡车上运载一架无人机的VRPD问题,以最小化行驶成本为目标,建立了MIP模型,并提出了一种自适应大邻域搜索元启发式算法。Wang和Sheu<sup>[19]</sup>提出了MIP模型,并设计了一个分支定价算法。朱晓宁等<sup>[20]</sup>针对多卡车搭载无人机车辆路径问题,考虑了区域限制,建立了区域限制下的混合整数规划模型,设计了一种结合最短路算法和紧急搜索算法的混合算法。

### 1.4 文献综述小结

基于Murray和Chu<sup>[3]</sup>、Sacramento等<sup>[18]</sup>与Wang和Sheu<sup>[19]</sup>等的研究,本研究对VRP-D问题进行了更加深入地研究。本研究扩展了Murray和Chu<sup>[3]</sup>的FSTSP问题,同时放宽了Sacramento等<sup>[18]</sup>的一些假设和约束,提出了以系统总成本(行驶成本、等待成本和固定成本)为优化目标的MIP模型,并设计了一种既能最大程度上保证精度又能保证求解速度的基于列生成的求解算法,通过数值实验验证了所提MIP模型的有效性和列生成算法的有效性,另外还通过一些敏感性分析实验提出了若干对实践有指导意义的管理启示。

## 2 问题描述

本研究对多辆卡车与多架无人机协同完成包裹配送任务进行研究。当一辆送货卡车在不同的客户地点间运送货物时,卡车上的无人机从卡车上取一个包裹,运送给另一个客户,在无人机送货的过程中,卡车继续前进配送货物给下一个客户。无人机送货后,在客户点返回到卡车上,不断重复此过程,实现多辆卡车和无人机协同配送,服务完所有客户的配送任务。无人机的发射和回收对技术和空间的要求更高,以目前的技术和空间水平,



假设一辆卡车配备最多一架无人机. 卡车与无人机协同配送系统适用于乡村送货和城市宽阔道路的送货.

本研究的 VRPTD 问题可描述为: 给定有送货需求的客户集合  $N_c$ , 客户  $i$  所需的货物的重量为  $q_i$ . 仓库里有  $|K|$  个卡车机组, 每辆卡车都有一架无人机协同工作, 无人机  $k$  必须在卡车  $k$  上起飞和回收. 卡车容量始终不超过  $m^k$ , 无人机容量不超过  $m^D$ . 卡车在节点  $i$  和  $j$  之间的行驶时间是  $t_{ij}^k$ , 无人机在节点  $i$  和  $j$  之间的飞行时间是  $t_{ij}^D$ . 无人机的飞行耐力以时间为单位进行度量, 用参数  $e^D$  表示. 无人机飞行路线可以用三元组  $(i, j, h)$  来表示,  $F$  代表所有可能的元组的集合.  $F = \{(i, j, h) \mid i \in N_0, j \in \{N_c: j \neq i\}, h \in \{N_+: h \neq j, h \neq i, t_{ij}^D + t_{jh}^D \leq e^D\}\}$ .  $N_0$  和  $N_+$  分别是路网中车辆可以离开和进入的所有节点的集合. 另外,  $s^k$  和  $s^D$  分别是单位时间内一辆卡车和一架无人机的运输成本,  $s^w$  是单位时间内的等待成本,  $s^G$  是每个卡车机组的固定成本.

本研究以系统总成本最小化为目标, 建立了一个求解 VRPTD 的 MIP 模型, 此模型对启动的卡车机组的数量和卡车机组的路线进行了优化, 由于不是所有的卡车机组都需要启动, 因此在变量中加入了卡车机组  $k$  的维度.

本研究的一些基本假设如下:

- 1) 一辆卡车上搭载一架无人机, 无人机的速度大于卡车的速度, 而且每辆卡车和每架无人机都是同质的;
- 2) 无人机只能在卡车停在客户节点或仓库时离开并返回卡车. 不考虑无人机发射和返回卡车在同一客户点;
- 3) 无人机采用更换电池的充电模式, 卡车上的电池足够无人机使用. 无人机更换电池的时间可以忽略不计;
- 4) 与运输时间相比, 卡车司机准备发射无人机并接收无人机返回卡车的时间非常短, 可以忽略不计;
- 5) 假设每个客户点处有适合无人机降落和起飞的空间, 由于无人机在空中悬停的耗电量远

大于无人机启动的耗电量, 所以假设无人机在客户点等待卡车的时间内, 无人机处于关闭状态, 无等待成本.

### 3 模型建立

本节详细介绍了针对 VRPTD 问题用于优化卡车和无人机的路线的 MIP 模型及其定义的参数和变量. 定义的决策变量与卡车机组  $k$  关联, 因此建立的 MIP 模型不仅适用于卡车机组同质的情况, 也适用于卡车机组存在差异化的情况.

#### 3.1 符号说明

##### 3.1.1 索引和集合

- $K$  卡车和无人机集合, 下标为  $k$
- $N$  所有节点集合,  $N = \{0, 1, 2, \dots, n, n+1\}$ ,  $0$  和  $n+1$  表示同一个仓库, 下标为  $i, j, h$
- $N_c$  所有客户点集合,  $N_c = N / \{0, n+1\} = \{1, 2, \dots, n\}$
- $N_0$  路网中车辆可以离开的所有节点的集合,  $N_0 = N / \{n+1\} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$
- $N_+$  路网中车辆可以进入的所有节点的集合,  $N_+ = N / \{0\} = \{1, 2, \dots, n, n+1\}$
- $F$  无人机的所有可能路径集合,  $(i, j, h) \in F, i \in N_0, j \in \{N_c: j \neq i\}, h \in \{N_+: h \neq j, h \neq i, t_{ij}^D + t_{jh}^D \leq e^D\}$

##### 3.1.2 参数

- $e^D$  无人机的最长飞行时间
- $t_{ij}^k$  卡车从节点  $i$  到节点  $j$  的行驶时间
- $t_{ij}^D$  无人机从节点  $i$  到节点  $j$  的飞行时间
- $q_i$  客户  $i$  所需配送的货物的重量
- $m^k$  卡车的最大载重量
- $m^D$  无人机的最大载重量
- $s^k$  单位时间内一辆卡车的运输成本
- $s^D$  单位时间内一架无人机的运输成本
- $s^w$  单位时间内卡车的等待成本
- $s^G$  每个卡车机组的固定成本
- $M$  一个足够大的正数

##### 3.1.3 决策变量

- $\alpha_{ijk}$  如果卡车  $k$  从节点  $i$  出发后紧接着到达节点

- $j$ , 则为 1, 否则为 0
- $\beta_{ijk}$  如果卡车  $k$  上的无人机从节点  $i$  发射, 紧接着服务客户  $j$ , 紧接着在客户点  $h$  与卡车会合则为 1; 否则为 0
- $\mu_{ik}$  节点  $i$  在卡车  $k$  路径上的位置
- $\gamma_{ijk}$  如果卡车  $k$  在访问客户  $j$  之前访问客户  $i$ , 则为 1; 否则为 0
- $\tau_{ik}^K$  卡车  $k$  到达节点  $i$  的时间
- $\tau_{ik}^D$  卡车  $k$  上的无人机到达节点  $i$  的时间
- $\rho_{ik}$  卡车  $k$  和卡车  $k$  上的无人机到达节点  $i$  的最大时间
- $\varepsilon_k$  如果卡车  $k$  和卡车  $k$  上的无人机被使用, 则为 1, 否则为 0

### 3.2 VRPTD 数学模型

基于上述参数与变量定义, 建立 MIP 模型

$$\text{Min} \left\{ \sum_{k \in K} s^K \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_+} t_{ij}^K \alpha_{ijk} + \sum_{k \in K} s^D \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_c} \sum_{h \in N_+} (t_{ij}^D + t_{jh}^D) \beta_{ijk} + \sum_{k \in K} s^W (\tau_{n+1,k}^K - \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_+} t_{ij}^K \alpha_{ijk}) + \sum_{k \in K} s^G \varepsilon_k \right\} \quad (1)$$

s. t.

$$\sum_{j \in N_+} \alpha_{0jk} = 1 \quad \forall k \in K \quad (2)$$

$$\sum_{i \in N_0} \alpha_{i,n+1,k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{i \in N_0} \alpha_{ijk} = \sum_{\substack{h \in N_+ \\ h \neq j}} \alpha_{jhk} \leq 1 \quad \forall j \in N_c, k \in K \quad (4)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in N_0} \sum_{\substack{h \in N_+ \\ i \neq j}} \beta_{ijk} \leq 1 \quad \forall j \in N_c \quad (5)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in N_c} \sum_{\substack{h \in N_+ \\ i \neq j}} \beta_{ijk} \leq 1 \quad \forall i \in N_0 \quad (6)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in N_0} \sum_{\substack{j \in N_c \\ i \neq h}} \beta_{ijk} \leq 1 \quad \forall h \in N_+ \quad (7)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in N_0} \alpha_{ijk} + \sum_{k \in K} \sum_{i \in N_0} \sum_{\substack{h \in N_+ \\ i \neq j}} \beta_{ijk} = 1 \quad \forall j \in N_c \quad (8)$$

$$2\beta_{ijk} \leq \sum_{\substack{j_1 \in N_0 \\ j_1 \neq i}} \alpha_{j_1 ik} + \sum_{\substack{i_1 \in N_c \\ i_1 \neq h}} \alpha_{i_1 hk} \quad \forall i \in N_c, k \in K, j \in \{N_c : i \neq j\}, h \in \{N_+ : (i, j, h) \in F\} \quad (9)$$

$$\beta_{0jkh} \leq \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq h}} \alpha_{ihk} \quad \forall j \in N_c, k \in K, h \in \{N_+ : (0, j, h) \in F\} \quad (10)$$

$$\tau_{ik}^D \geq \rho_{ik} - M \left( 1 - \sum_{\substack{j \in N_c \\ j \neq i}} \sum_{\substack{h \in N_+ \\ (i, j, h) \in F}} \beta_{ijk} \right) \quad \forall i \in N_0, k \in K \quad (11)$$

$$\tau_{ik}^K \geq \rho_{ik} - M \left( 1 - \sum_{\substack{j \in N_c \\ j \neq i}} \sum_{\substack{h \in N_+ \\ (i, j, h) \in F}} \beta_{ijk} \right) \quad \forall i \in N_0, k \in K \quad (12)$$

$$\tau_{hk}^K \geq \rho_{hk} - M \left( 1 - \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq h}} \sum_{j \in N_c} \beta_{ijk} \right) \quad \forall h \in N_+, k \in K \quad (13)$$

$$\tau_{hk}^D \geq \rho_{hk} - M \left( 1 - \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq h}} \sum_{\substack{j \in N_c \\ (i, j, h) \in F}} \beta_{ijk} \right) \quad \forall h \in N_+, k \in K \quad (14)$$

$$\mu_{hk} - \mu_{ik} \geq 1 - (n+2) \left( 1 - \sum_{j \in N_c} \beta_{ijk} \right) \quad \forall i \in N_c, k \in K, h \in \{N_+ : h \neq i\} \quad (15)$$

$$\mu_{ik} - \mu_{jk} + 1 \leq (n+2)(1 - \alpha_{ijk}) \quad \forall i \in N_0, k \in K, j \in \{N_+ : j \neq i\} \quad (16)$$

$$\mu_{ik} - \mu_{jk} \geq 1 - (n+2) \gamma_{ijk} \quad \forall i \in N_c, k \in K, j \in \{N_c : j \neq i\} \quad (17)$$

$$\mu_{ik} - \mu_{jk} \leq -1 + (n+2)(1 - \gamma_{ijk}) \quad \forall i \in N_c, k \in K, j \in \{N_c : j \neq i\} \quad (18)$$

$$\gamma_{ijk} + \gamma_{jik} = 1 \quad \forall i \in N_c, k \in K, j \in \{N_c : j \neq i\} \quad (19)$$

$$\tau_{i_2 k}^D \geq \tau_{h_1 k}^D - M \left( 3 - \sum_{\substack{j_1 \in N_c \\ j_1 \neq i_2}} \sum_{\substack{(i_1, j_1, h_1) \in F}} \beta_{i_1 j_1 h_1 k} - \sum_{\substack{j_2 \in N_c \\ j_2 \neq i_1}} \sum_{\substack{h_2 \in N_+ \\ (i_2, j_2, h_2) \in F}} \beta_{i_2 j_2 h_2 k} - \gamma_{i_1 i_2 k} \right) \quad \forall i_1 \in N_0, h_1 \in \{N_+ : h_1 \neq i_1\}, i_2 \in \{N_c : i_2 \neq i_1\}, i_2 \neq h_1, k \in K \quad (20)$$

$$\tau_{jk}^K \geq \tau_{ik}^K + t_{ij}^K - M(1 - \alpha_{ijk}) \quad \forall i \in N_0, k \in K, j \in \{N_+ : j \neq i\} \quad (21)$$

$$\tau_{jk}^D \geq \tau_{ik}^D + t_{ij}^D - M \left( 1 - \sum_{\substack{h \in N_+ \\ (i, j, h) \in F}} \beta_{ijk} \right) \quad \forall j \in N_c, k \in K, i \in \{N_0 : i \neq j\} \quad (22)$$

$$\tau_{hk}^D \geq \tau_{jk}^D + t_{jh}^D - M \left( 1 - \sum_{\substack{i \in N_0 \\ (i, j, h) \in F}} \beta_{ijk} \right) \quad \forall j \in N_c, k \in K, h \in \{N_+ : h \neq j\} \quad (23)$$

$$\tau_{hk}^D - \tau_{jk}^D + t_{ij}^D \leq e^D + M(1 - \beta_{ijk}) \quad \forall h \in N_+,$$

$$k \in K, j \in \{N_c: j \neq h\}, i \in \{N_0: (i, j, h) \in F\} \quad (24)$$

$$\tau_{hk}^D - \tau_{ik}^D \leq e^D + M(1 - \beta_{jkh}) \quad \forall h \in N_+, k \in K, \\ j \in \{N_c: j \neq h\}, i \in \{N_0: (i, j, h) \in F\} \quad (25)$$

$$\sum_{i \in N_c} \sum_{j \in N_0} \sum_{\substack{h \in N_+ \\ (j, i, h) \in F}} q_i \beta_{jkh} + \sum_{i \in N_c} \sum_{j \in N_0} q_i \alpha_{jik} \leq m^K \\ \forall k \in K \quad (26)$$

$$q_i \sum_{j \in N_0} \sum_{\substack{h \in N_+ \\ (j, i, h) \in F}} \beta_{jkh} \leq m^D \quad \forall i \in N_c, k \in K \quad (27)$$

$$\varepsilon_k \geq \alpha_{jik} \quad \forall i \in N_0, k \in K, j \in \{N_c: j \neq i\} \quad (28)$$

$$\varepsilon_k \geq \beta_{jkh} \quad \forall h \in N_+, k \in K, j \in \{N_c: j \neq h\}, \\ i \in \{N_0: (i, j, h) \in F\} \quad (29)$$

$$\tau_{0k}^K = 0 \quad \forall k \in K \quad (30)$$

$$\tau_{0k}^D = 0 \quad \forall k \in K \quad (31)$$

$$\gamma_{0jk} = 1 \quad \forall j \in N_c, k \in K \quad (32)$$

$$\rho_{ik} \geq \tau_{ik}^D \quad \forall i \in N_0, k \in K \quad (33)$$

$$\rho_{ik} \geq \tau_{ik}^K \quad \forall i \in N_0, k \in K \quad (34)$$

$$\rho_{hk} \geq \tau_{hk}^D \quad \forall h \in N_+, k \in K \quad (35)$$

$$\rho_{hk} \geq \tau_{hk}^K \quad \forall h \in N_+, k \in K \quad (36)$$

$$1 \leq \mu_{ik} \leq n + 2 \quad \forall i \in N_+, k \in K \quad (37)$$

$$\tau_{ik}^K \geq 0 \quad \forall i \in N, k \in K \quad (38)$$

$$\tau_{ik}^D \geq 0 \quad \forall i \in N, k \in K \quad (39)$$

$$\alpha_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N_0, j \in N_+, k \in K \quad (40)$$

$$\beta_{jkh} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N_0, j \in N_c, k \in K, \\ h \in \{N_+: (i, j, h) \in F\} \quad (41)$$

$$\varepsilon_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K \quad (42)$$

$$\gamma_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N_c, k \in K, \\ j \in \{N_c: i \neq j\} \quad (43)$$

$$\rho_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in N, k \in K \quad (44)$$

目标函数(1)是总成本最小化,总成本包括了卡车机组的固定成本、卡车的运输成本、无人机的运输成本和等待成本.约束(2)和约束(3)保证了每辆卡车从仓库出发,最终返回仓库.约束(4)确保了每个客户最多由一辆卡车服务一次.约束(5)要求每个客户最多由一架无人机服务.约束(6)表明在某一特定节点*i*最多有一架无人机从该点发射一次.约束(7)表示在某一

特定节点*j*,最多有一架无人机在该点和卡车会合.约束(8)确保每个客户都需要得到服务.约束(9)说明如果无人机*k*从节点*i*发射,并在节点*h*与卡车*k*会合,则必须将节点*i*和*h*分配给卡车*k*.约束(10)指出如果无人机*k*从仓库发射,并在节点*h*与卡车*k*会合,则必须将节点*h*分配给卡车*k*.约束(11)和约束(12)要求无人机发射时间需要与卡车到达发射点的时间相协调.约束(13)和约束(14)要求无人机收回时间需要与卡车到达收回点的时间相协调.在约束(15)中,如果无人机*k*从节点*i*发射并在节点*h*与卡车*k*会合,则卡车*k*必须在节点*h*之前访问*i*.约束(16)防止卡车路径存在回路.约束(17)至约束(19)确定了 $\gamma_{ijk}$ 的值.约束(20)要求无人机*k*下一次从点*i*<sub>2</sub>发射的时间要晚于上一次收回点*i*<sub>1</sub>的时间.约束(21)保证了卡车*k*到达节点*i*的时间,约束(22)至约束(23)约束了无人机*k*到达节点*j*和节点*h*的时间,约束(24)和约束(25)保证了无人机的最大飞行时间.在约束(26)中,卡车*k*和无人机*k*组成一条路线,每条路线上的客户所需配送的货物的总重量不大于服务该路线的卡车*k*的最大承载量.约束(27)规定了无人机服务的每个客户所需的货物重量不能超过无人机的最大承载量.约束(28)和约束(29)声明是否使用了卡车*k*和无人机*k*.约束(30)和约束(31)表明,卡车*k*和无人机*k*从仓库出发的时间为零.约束(32)规定了卡车*k*必须从仓库出发.约束(33)和约束(34)保证无人机离开发射节点*i*时间应是卡车*k*到达节点*i*的时间和无人机*k*到达节点*i*的时间的最大值.约束(35)和约束(36)确保无人机离开回收节点*h*的时间应是卡车*k*到达节点*h*的时间和无人机*k*到达节点*h*的时间的最大值.约束(37)至约束(44)定义了决策变量.

## 4 基于列生成的求解算法

当VRPTD问题规模较大时,CPLEX可能无法直接求解模型,由此本研究设计了适合的算法进行求解.在针对大规模整数规划模型求解算法

研究领域中,列生成算法广泛应用于各类调度问题<sup>[21-23]</sup>.本研究基于列生成算法的方法论和算法加速策略,设计了一种既能最大程度上保证精度又能保证求解速度的求解算法.

### 4.1 集合划分模型

在本节中,通过 Dantzig-Wolfe 分解<sup>[21]</sup>将 VRPTD 构造一个集合划分模型,即集合划分主问题(set-partitioning master model, MP).由于本研究中所有无人机组均相同,因此,  $\mathbf{R}$  定义为卡车机组所有可能路径的集合.对于每一个可行的路线  $r \in \mathbf{R}$ , 设置以下参数:

$x_{ijr}$  如果在路线  $r$  中卡车从节点  $i \in N_0$  出发后紧接着到达节点  $j$  则为 1, 否则为 0

$y_{ijhr}$  如果在路线  $r$  中无人机从节点  $i$  发射,紧接着服务客户  $j$ ,紧接着在客户点  $h$  与卡车会合则为 1, 否则为 0

$\tau_{n+1,r}^K$  浮点型参数,在路线  $r$  中卡车到达节点  $i$  的时间

$\lambda_r$  如果在路线  $r$  中卡车机组被启用并服务客户点则为 1, 否则为 0

对于每个路线  $r$ ,  $c_r$  被定义为路线  $r$  的成本,定义  $\xi_r$  是 0-1 决策变量,如果路线  $r$  选择则为 1, 否则为 0. 基于以上分析,建立了 VRPTD 的集合划分模型如下.

$$[\mathbf{MP}] \quad \text{Min} \sum_{r \in \mathbf{R}} c_r \xi_r \quad (45)$$

s. t.

$$\sum_{r \in \mathbf{R}} \sum_{i \in N_0} \sum_{\substack{h \in N_+ \\ i \neq j, (i, j, h) \in F}} y_{ijhr} \xi_r + \sum_{r \in \mathbf{R}} \sum_{i \in N_0} x_{ijr} \xi_r = 1 \quad \forall j \in N_c \quad (46)$$

$$\sum_{r \in \mathbf{R}} \xi_r = |\mathbf{K}| \quad (47)$$

$$c_r = s^K \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_+} t_{ij}^K x_{ijr} + s^D \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_c} \sum_{h \in N_+} (t_{ij}^D + t_{jh}^D) y_{ijhr} + s^G \lambda_r + s^W \left( \tau_{n+1,r}^K - \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_+} t_{ij}^K x_{ijr} \right) \quad \forall r \in \mathbf{R} \quad (48)$$

$$\xi_r \in \{0,1\} \quad \forall r \in \mathbf{R} \quad (49)$$

目标函数(45)最小化方案中使用的路线的总成本.约束(46)确保所有客户都需要得到服务.约束(47)规定方案中选择  $|\mathbf{K}|$  条路线,每个卡车机组只能选择一条路线.约束(48)是成本的计算公式.约束(49)定义了决策变量.

### 4.2 限制性主问题

由于所有路径都包含在 MP 中,所以 MP 的求解时间会随着问题规模的增大而指数增长,因此 MP 的整数解很难直接求解.为了找到最优解,有必要将 MP 问题松弛为限制性主问题(restricted master problem, RMP).

首先,对 MP 的决策变量  $\xi_r$  进行线性松弛,构造线性主问题(linear master problem, LMP).其次,LMP 中包含很多路径方案,当规模很大时,求解时间也很长.因此,在求解 LMP 时仅考虑部分路径方案  $\mathbf{R}' \subseteq \mathbf{R}$ , 构造更加易于求解的 RMP. RMP 可表示如下.

$$[\mathbf{RMP}] \quad \text{Min} \sum_{r \in \mathbf{R}'} c_r \xi_r \quad (50)$$

s. t.

$$\sum_{r \in \mathbf{R}'} \sum_{i \in N_0} \sum_{\substack{h \in N_+ \\ i \neq j, (i, j, h) \in F}} y_{ijhr} \xi_r + \sum_{r \in \mathbf{R}'} \sum_{i \in N_0} x_{ijr} \xi_r = 1 \quad \forall j \in N_c \quad (51)$$

$$\sum_{r \in \mathbf{R}'} \xi_r = |\mathbf{K}| \quad (52)$$

$$c_r = s^K \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_+} t_{ij}^K x_{ijr} + s^D \times \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_c} \sum_{h \in N_+} (t_{ij}^D + t_{jh}^D) y_{ijhr} + s^G \lambda_r + s^W \left( \tau_{n+1,r}^K - \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_+} t_{ij}^K x_{ijr} \right) \quad \forall r \in \mathbf{R}' \quad (53)$$

$$\xi_r \geq 0 \quad \forall r \in \mathbf{R}' \quad (54)$$

目标函数(50)最小化方案中使用的路线的总成本.约束(51)确保所有客户都需要得到服务.约束(52)规定方案中选择  $|\mathbf{K}|$  条路线,每个卡车机组只能选择一条路线.约束(53)是成本的计算公式.约束(54)定义了决策变量.

在每次迭代过程中,RMP 的对偶变量被当作输入参数加入到子问题中去,用于生成新的可行路径.这些对偶变量定义如下:

$\pi_j$  与约束(51)对应的对偶变量,  $\forall j \in N_c$

$\pi_0$  与约束(52)对应的对偶变量

### 4.3 子问题

子问题(pricing problem, PP)的目的是获得检验数为负的可行路线方案.在列生成的每次迭代中,需要解决  $|\mathbf{K}|$  个子问题,一个问题对应一个卡车机组,并生成一个可行的路线规划.将 3.1 的

变量去掉  $k$  维度,得到子问题需要的决策变量:

$\alpha_{ij}$ 、 $\beta_{ijh}$ 、 $\varepsilon$ 、 $\mu_i$ 、 $\gamma_{ij}$ 、 $\tau_i^K$ 、 $\tau_i^D$  和  $\rho_i$ , 变量说明同

### 3.1 变量去掉 $k$ 维度后的说明.

每个卡车机组的 PP 数学模型如下.

$$[\text{PP}] \quad \text{Min } \sigma_k = c_r - \sum_{j \in N_c} \left( \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq j}} \alpha_{ij} + \sum_{i \in N_0} \sum_{\substack{h \in N_+ \\ i \neq j, (i, j, h) \in F}} \beta_{ijh} \right) \pi_j - \pi_0 \quad (55)$$

s. t.

$$\sum_{j \in N_+} \alpha_{0j} = 1 \quad (56)$$

$$\sum_{i \in N_0} \alpha_{i, n+1} = 1 \quad (57)$$

$$\sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq j}} \alpha_{ij} = \sum_{\substack{h \in N_+ \\ h \neq j}} \alpha_{jh} \leq 1 \quad \forall j \in N_c \quad (58)$$

$$\sum_{i \in N_0} \sum_{\substack{h \in N_+ \\ i \neq j, (i, j, h) \in F}} \beta_{ijh} \leq 1 \quad \forall j \in N_c \quad (59)$$

$$\sum_{\substack{j \in N_c \\ i \neq j, (i, j, h) \in F}} \sum_{h \in N_+} \beta_{ijh} \leq 1 \quad \forall i \in N_0 \quad (60)$$

$$\sum_{i \in N_0} \sum_{\substack{j \in N_c \\ i \neq h, (i, j, h) \in F}} \beta_{ijh} \leq 1 \quad \forall h \in N_+ \quad (61)$$

$$\sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq j}} \alpha_{ij} + \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq j}} \sum_{\substack{h \in N_+ \\ (i, j, h) \in F}} \beta_{ijh} \leq 1 \quad \forall j \in N_c \quad (62)$$

$$2\beta_{ijh} \leq \sum_{\substack{j_1 \in N_0 \\ j_1 \neq i}} \alpha_{j_1 i} + \sum_{\substack{i_1 \in N_c \\ i_1 \neq h}} \alpha_{i_1 h} \quad \forall i \in N_c, \\ j \in \{N_c: i \neq j\}, h \in \{N_+: (i, j, h) \in F\} \quad (63)$$

$$\beta_{0jh} \leq \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq h}} \alpha_{ih} \quad \forall j \in N_c, h \in \{N_+: (0, j, h) \in F\} \quad (64)$$

$$\tau_i^D \geq \rho_i - M(1 - \sum_{\substack{j \in N_c \\ j \neq i, (i, j, h) \in F}} \sum_{h \in N_+} \beta_{ijh}) \quad \forall i \in N_0 \quad (65)$$

$$\tau_i^K \geq \rho_i - M(1 - \sum_{\substack{j \in N_c \\ j \neq i, (i, j, h) \in F}} \sum_{h \in N_+} \beta_{ijh}) \quad \forall i \in N_0 \quad (66)$$

$$\tau_h^K \geq \rho_h - M(1 - \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq h, (i, j, h) \in F}} \sum_{j \in N_c} \beta_{ijh}) \quad \forall h \in N_+ \quad (67)$$

$$\tau_h^D \geq \rho_h - M(1 - \sum_{\substack{i \in N_0 \\ i \neq h, (i, j, h) \in F}} \sum_{j \in N_c} \beta_{ijh}) \quad \forall h \in N_+ \quad (68)$$

$$\mu_h - \mu_i \geq 1 - (n+2) \left( 1 - \sum_{\substack{j \in N_c \\ (i, j, h) \in F}} \beta_{ijh} \right)$$

$$\forall i \in N_c, h \in \{N_+: h \neq i\} \quad (69)$$

$$\mu_i - \mu_j + 1 \leq (n+2)(1 - \alpha_{ij})$$

$$\forall i \in N_0, j \in \{N_+: j \neq i\} \quad (70)$$

$$\mu_i - \mu_j \geq 1 - (n+2) \gamma_{ij} \quad \forall i \in N_c, \\ j \in \{N_c: j \neq i\} \quad (71)$$

$$\mu_i - \mu_j \leq -1 + (n+2)(1 - \gamma_{ij})$$

$$\forall i \in N_c, j \in \{N_c: j \neq i\} \quad (72)$$

$$\gamma_{ij} + \gamma_{ji} = 1 \quad \forall i \in N_c, j \in \{N_c: j \neq i\} \quad (73)$$

$$\tau_{i_2}^D \geq \tau_{h_1}^D - M \left( 3 - \sum_{\substack{j_1 \in N_c \\ j_1 \neq i_2 \\ (i_1, j_1, h_1) \in F}} \beta_{i_1 j_1 h_1} - \sum_{\substack{j_2 \in N_c \\ j_2 \neq i_1, (i_2, j_2, h_2) \in F}} \sum_{\substack{h_2 \in N_+ \\ j_2 \neq h_1, h_2 \neq i_1 \\ j_2 \neq i_2, h_2 \neq h_1}} \beta_{i_2 j_2 h_2} \right) \quad \forall i_1 \in N_0, h_1 \in \{N_+: h_1 \neq i_1\}, \\ i_2 \in \{N_c: i_2 \neq i_1, i_2 \neq h_1\} \quad (74)$$

$$\tau_j^K \geq \tau_i^K + t_{ij}^K - M(1 - \alpha_{ij}) \quad \forall i \in N_0, \\ j \in \{N_+: j \neq i\} \quad (75)$$

$$\tau_j^D \geq \tau_i^D + t_{ij}^D - M \left( 1 - \sum_{\substack{h \in N_+ \\ (i, j, h) \in F}} \beta_{ijh} \right) \quad (76)$$

$$\forall j \in N_c, i \in \{N_0: i \neq j\} \quad (76)$$

$$\tau_h^D \geq \tau_j^D + t_{jh}^D - M \left( 1 - \sum_{\substack{i \in N_0 \\ (i, j, h) \in F}} \beta_{ijh} \right) \quad (77)$$

$$\forall j \in N_c, h \in \{N_+: h \neq j\} \quad (77)$$

$$\tau_h^D - \tau_j^D + t_{jh}^D \leq e^D + M(1 - \beta_{ijh}) \quad \forall h \in N_+, \\ j \in \{N_c: j \neq h\}, i \in \{N_0: (i, j, h) \in F\} \quad (78)$$

$$\tau_h^D - \tau_i^D \leq e^D + M(1 - \beta_{ijh}) \quad \forall h \in N_+, \\ j \in \{N_c: j \neq h\}, i \in \{N_0: (i, j, h) \in F\} \quad (79)$$

$$\sum_{i \in N_c} \sum_{j \in N_0} q_i \alpha_{ji} + \sum_{i \in N_c} \sum_{j \in N_0} \sum_{\substack{h \in N_+ \\ (j, i, h) \in F}} q_j \beta_{ijh} \leq m^K \quad (80)$$

$$q_i \sum_{j \in N_0} \sum_{\substack{h \in N_+ \\ (j, i, h) \in F}} \beta_{ijh} \leq m^D \quad \forall i \in N_c \quad (81)$$

$$\varepsilon \geq \alpha_{ij} \quad \forall i \in N_0, j \in \{N_c: j \neq i\} \quad (82)$$

$$\varepsilon \geq \beta_{ijh} \quad \forall h \in N_+, j \in \{N_c: j \neq h\}, \\ i \in \{N_0: (i, j, h) \in F\} \quad (83)$$

$$\tau_0^K = 0 \quad (84)$$

$$\tau_0^D = 0 \quad (85)$$

$$\gamma_{0j} = 1 \quad \forall j \in N_c \quad (86)$$

$$\rho_i \geq \tau_i^D \quad \forall i \in N_0 \quad (87)$$

$$\rho_i \geq \tau_i^K \quad \forall i \in N_0 \quad (88)$$

$$\rho_h \geq \tau_h^D \quad \forall h \in N_+ \quad (89)$$

$$\rho_h \geq \tau_h^K \quad \forall h \in N_+ \quad (90)$$



$$1 \leq \mu_i \leq n + 2 \quad \forall i \in N_+ \quad (91)$$

$$\tau_i^K \geq 0 \quad \forall i \in N \quad (92)$$

$$\tau_i^D \geq 0 \quad \forall i \in N \quad (93)$$

$$\alpha_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in N_0, j \in N_+ \quad (94)$$

$$\beta_{ijh} \in \{0,1\} \quad \forall i \in N_0, j \in N_c, \quad (95)$$

$$h \in \{N_+ : (i, j, h) \in F\}$$

$$\varepsilon \in \{0,1\} \quad (96)$$

$$\gamma_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in N_c, j \in \{N_c : i \neq j\} \quad (97)$$

$$\rho_i \geq 0 \quad \forall i \in N \quad (98)$$

$$c_r = s^K \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_+} t_{ij}^K \alpha_{ij} + s^D \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_c} \sum_{h \in N_+} (t_{ij}^D + t_{jh}^D) \beta_{ijh} + s^G \varepsilon + s^W \left( \tau_{n+1}^K - \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_+} t_{ij}^K \alpha_{ij} \right) \quad (99)$$

目标函数(55)是最小化检验数. 约束(56)至约束(61)与约束(2)至约束(7)相似, 约束(63)至约束(98)与约束(9)至约束(44)相似<sup>②</sup>, 约束(62)确保在此路线中最多所有客户被服务. 约束(99)是成本计算公式.

#### 4.4 生成初始解

列生成的 RMP 的启动, 需要生成一组 RMP 的初始可行路径计划, 本研究设计了一种启发式算法用于初始解的生成.

**步骤 1** 将所有变量设为 0, 将客户按照客户的需求从大到小的顺序进行排序.

**步骤 2** 根据排序后客户顺序, 将客户加入卡车路线. 直到根据卡车的承载能力, 路线中的节点不能再增加为止, 此时得到每辆卡车的路线, 对变量  $\alpha_{ijk}$ 、 $\gamma_{ijk}$ 、 $\mu_{ik}$  进行赋值.

**步骤 3** 随机交换路线中任意两个客户点, 找到一条总成本最小的路线. 该路线中无无人机节点, 对变量  $\alpha_{ijk}$ 、 $\tau_{ik}^K$ 、 $\rho_{ik}$  进行赋值.

**步骤 4** 在现有卡车路线上查找符合无人机条件的客户点, 将其设置为无人机服务点, 对变量  $\alpha_{ijk}$ 、 $\beta_{ijhk}$ 、 $\tau_{ik}^K$ 、 $\tau_{ik}^D$ 、 $\rho_{ik}$ 、 $\gamma_{ijk}$ 、 $\mu_{ik}$  进行赋值. 从而得到卡车机组的可行的路线.

#### 4.5 子问题求解

为了提高求解算法的运行效率, 本研究采用变邻域搜索算法 (variable neighborhood search, VNS) 对 PP 进行求解, VNS 算法适用于解决大规模的组合优化问题<sup>[24, 25]</sup>.

##### 4.5.1 初始解生成

本研究依照以下规则生成初始解.

**步骤 1** 将所有变量设为 0, 按照对偶变量  $\pi_j$  的大小, 由大到小对客户点进行排序.

**步骤 2** 根据排序后的客户点顺序、约束(62)和约束(80), 将客户点添加到卡车路线中, 形成卡车路径.

**步骤 3** 随机交换卡车路线中任意两个客户点位置, 找到一条总成本最小的路线. 对变量  $\alpha_{ij}$ 、 $\gamma_{ij}$  和  $\mu_i$  进行赋值, 此时满足约束(56)至约束(58)、约束(70)至约束(73), 同时对决策变量  $\tau_i^K$  和  $\rho_i$  进行赋值, 满足约束(75)和约束(84)至约束(93).

**步骤 4** 根据约束(59)至约束(69)和约束(74)至约束(81), 确定无人机服务的客户点, 并将此客户点从卡车路线中去掉, 加入到无人机路线中, 将该卡车和无人机路线设置为初始解. 根据子问题约束条件, 对变量  $\alpha_{ijk}$ 、 $\beta_{ijhk}$ 、 $\tau_{ik}^K$ 、 $\tau_{ik}^D$ 、 $\rho_{ik}$ 、 $\gamma_{ijk}$ 、 $\mu_{ik}$  重新进行赋值.

##### 4.5.2 邻域结构

由于本研究的决策中包含卡车路径以及无人机路径, 与 VRP 相比, 子问题的构成相对复杂, 为简化求解过程, 本研究通过将原先的卡车与无人机路线按到达时间进行排序, 并根据该路线设置路线集合  $R_k$ . 例如: 若货车  $k$  的卡车路线为 0-2-3-8-7-9, 其中, 无人机路线为: 0-4-2、8-6-9, 并且  $\tau_{8k}^K = 0.8$ ,  $\tau_{7k}^K = 0.92$ ,  $\tau_{6k}^D = 0.83$ , 则此时  $R_k = \{0, 4, 2, 3, 8, 6, 7, 9\}$ . 定义 4.5.1 节生成的初始解检验数值为  $F$ , 本研究设计了包括无人机的起飞点向前、无人机的降落点向后、交换、插入、删除和升级的多种邻域结构, 将这些邻域结构进行串联, 同时在邻域变换后得到更新的解决方案时, 加入扰动的过程, 防止算法陷入局部最优.

1) 无人机的起飞点向前: 包括单独向前和整体向前

单独向前: 选择路线集合  $R_k$  中无人机服务的节点  $i$ , 固定节点  $i$  的降落点, 按照路线集合  $R_k$  中节点的排列顺序, 将节点  $i$  的起飞点依次向前移动一个节点, 判断是否满足约束(74)、约束(78)和约束(79), 若满足约束, 则对决策变量  $\beta_{ijh}$  进行

② 为简洁起见, 此处省略约束说明.

赋值,计算该条路线的目标函数值  $F_1$ . 若  $F_1 < F$ , 则更新相应的计划,  $F = F_1$ ; 否则不更新, 循环该项操作直至无人机服务的节点遍历完.

整体向前: 选择路线集合  $R_k$  中无人机服务的节点  $i$ , 固定服务节点  $i$  的无人机起飞和降落过程中, 卡车服务的客户点个数, 定义无人机服务节点  $i$  的初始起飞点为  $i_1$ , 初始降落点为  $i_2$ . 按照路线集合  $R_k$  中点的排列顺序, 起飞点  $i_1$  和降落点  $i_2$  依次向前移动一个节点, 判断是否满足约束(74)、约束(78)和约束(79). 后续步骤同“单独向前”.

2) 无人机的降落点向后: 包括单独向后和整体向后

单独向后: 选择路线集合  $R_k$  中无人机服务的节点  $i$ , 固定节点  $i$  的起飞点, 按照路线集合  $R_k$  中点的排列顺序, 将节点  $i$  的降落点依次向后移动一个节点, 判断是否满足约束(74)、约束(78)和约束(79). 后续步骤同“单独向前”.

整体向后: 选择路线集合  $R_k$  中无人机服务的节点  $i$ , 固定服务节点  $i$  的无人机起飞和降落过程中, 卡车服务的客户点个数, 定义无人机服务节点  $i$  的初始起飞点为  $i_1$ , 初始降落点为  $i_2$ . 按照路线集合  $R_k$  中点的排列顺序, 起飞点  $i_1$  和降落点  $i_2$  依次向后移动一个节点, 判断是否满足约束(74)、约束(78)和约束(79). 后续步骤同“单独向前”.

3) 交换: 包括系统内交换和系统外交换

系统内交换: 选择路线集合  $R_k$  中的两点  $i, j$ , 将两点的位置进行交换, 此时, 先根据集合  $R_k$  生成卡车路线, 在该路线中无无人机节点, 即对决策变量  $\alpha_{ij}, \beta_{ijh}$  进行赋值, 此时满足约束(56)至约束(63)、约束(80)至约束(83), 根据约束(69)至约束(73)对  $\gamma_{ij}, \mu_i$  进行赋值, 再根据约束(65)至约束(68)、约束(74)至约束(79)、约束(84)至约束(90)对决策变量  $\tau_i^K, \tau_i^D, \rho_i$  进行赋值, 计算该条路线的目标函数值  $F_1$ . 若  $F_1 < F$ , 则更新相应的计划,  $F = F_1$ ; 否则不更新. 在现有的卡车路线上查找满足约束(79)及约束(81)的节点, 并将其设置为无人机服务的节点, 计算此时的目标函数值  $F_2$ , 若  $F_2 < F$ , 则更新相应的计划,  $F = F_2$ ; 否则不更新, 并循环该项操作直至无法添加无人机点为止.

系统外交换: 随机选择路线集合  $R_k$  中的节点  $i$ , 从不被选择的节点的集合中随机选择节点

$j$ , 在节点  $i$  的位置处, 将节点  $i$  换成节点  $j$ , 此时, 先根据集合  $R_k$  生成卡车路线, 在该路线中无无人机节点, 即对决策变量  $\alpha_{ij}, \beta_{ijh}$  进行赋值. 后续步骤同“系统内交换”.

4) 插入: 包括系统内插入和系统外插入

系统内插入: 随机选择路线集合  $R_k$  中的节点  $i$ , 将其从路线集合  $R_k$  中移除, 此点后面的节点依次往前移一位, 得到目前的路线集合  $R_k'$ . 之后将节点  $i$  加入到目前的路线集合  $R_k'$  中除去开始和结束节点的任意一个位置  $j$  处, 此点及其后面的节点依次往后移一位, 得到目前的路线集合  $R_k''$ . 此时, 先根据集合  $R_k''$  生成卡车路线, 在该路线中无无人机节点, 即对决策变量  $\alpha_{ij}, \beta_{ijh}$  进行赋值. 后续步骤同“系统内交换”.

系统外插入: 从不被选择的节点的集合中随机选择节点  $i$ , 将其加入到路线集合  $R_k$  中任意一个位置  $j$  处, 此点及其后面的节点依次往后移一位, 得到目前的路线集合  $R_k'$ . 此时, 先根据集合  $R_k'$  生成卡车路线, 在该路线中无无人机节点, 即对决策变量  $\alpha_{ij}, \beta_{ijh}$  进行赋值. 后续步骤同“系统内交换”.

5) 删除: 从当前路线集合  $R_k$  中随机选择节点  $i$ , 将其从集合  $R_k$  中移除, 此点后面的节点依次往前移一位, 得到目前的路线集合  $R_k'$ . 此时, 先根据集合  $R_k'$  生成卡车路线, 在该路线中无无人机节点, 即对决策变量  $\alpha_{ij}, \beta_{ijh}$  进行赋值. 后续步骤同“系统内交换”.

6) 升级: 从当前路线集合  $R_k$  中随机选择节点  $i$ , 若节点  $i$  是无人机节点, 则将其从被选择的无人机节点的集合中移除, 并将其加入到被选择的卡车节点的集合中, 对决策变量  $\alpha_{ij}, \beta_{ijh}$  进行赋值. 后续步骤同“系统内交换”.

#### 4.6 可行化策略

通过第4.1节至4.5节中所提出的列生成算法仅能求解线性松弛后的RMP, 并不能保证找到可行的整数解. 因此, 本研究提出两种策略对结果进行优化, 从而得出一个可行的较优解.

**策略1** 用CPLEX求决策变量为0-1变量的RMP, 得到的目标值即为整数解, 即为可行解.

**策略2** 根据CG得到的结果, 为每个卡车机组选出它服务的客户, 在满足卡车机组的容量限制的基础上, 将每辆车对应的客户按照节点顺

序组成卡车路线  $R_k$ . 先根据集合  $R_k$  生成卡车路线, 在该路线中无无人机节点, 此时满足约束(56)至约束(63)、约束(80)至约束(83), 根据约束(69)至约束(73)对  $\gamma_{ij}$ 、 $\mu_i$  进行赋值, 再根据约束(65)至约束(68)、约束(74)至约束(79)、约束(84)至约束(90)对决策变量  $\tau_i^k$ 、 $\tau_i^d$ 、 $\rho_i$  进行赋值, 计算该条路线的成本  $c$ . 在现有的卡车路线上查找满足约束(80)及约束(82)的节点, 并将其设置为无人机服务的节点, 计算此时的成本  $c_1$ , 若  $c_1 < c$ , 则更新路线, 并循环该项操作直至无法添加无人机服务的节点为止, 记录目前的成本为  $c$ . 选择目前路线集合  $R_k$  中的两个卡车节点  $i, j$ , 将两点的位置进行交换, 进行迭代, 计算此时的成本  $c_1$ , 若  $c_1 < c$ , 则更新路线. 从而得到在满足一个客户点只由一个卡车机组服务的基础上, 服务完所有的客户且总成本最小的方案.

## 5 数值实验

本研究进行了大量的数值实验来验证所提模型的有效性和算法的有效性. 所用实验平台的 CPU 为 Intel Xeon E5-2680 v4 @ 2.4GHz, 内存为 256GB, 采用 Windows10 64 位处理系统. 代码在 C# 中实现, C# 版本为 Visual Studio 2019. 使用版本号为 12.6.2 的 CPLEX 用于求解 RMP 与 PP. 所有算例的最大求解时间限制为 2 h (7 200 s).

### 5.1 数据说明

本研究在 15 km \* 20 km 区域内随机生成客户和仓库位置, 其中客户和仓库位置的坐标保留 2 位小数. 任意两个节点间卡车和无人机行驶距离分别等于曼哈顿距离和欧氏距离. 假设卡车速度为 40 km/h, 无人机速度为 65 km/h. 任意两个节点间卡车行驶时间是用曼哈顿距离来计算的, 而任意两个节点间无人机飞行时间是用欧氏距离来计算的. 卡车最大载重量  $m^k$  为 200 kg, 无人机的最大飞行时间  $e^d$  设置为 30 min. 客户需求在 0 kg ~ 30 kg 之间随机产生. 2020 年 3 月 9 日的汽油价为 6.31 元/升, 一辆卡车的平均耗油量为 0.10 L/km, 所以卡车每小时行驶成本  $s^k$  为 25.24 元, 无人机每小时飞行成本  $s^d$  为 12.35 元, 因为无人机的成本通常是每千米

0.19 元<sup>[7]</sup>. 由于卡车怠速一分钟的耗油量是卡车正常行驶一分钟的耗油量的三分之一, 所以卡车等待无人机时, 卡车等待成本是卡车行驶成本的三分之一. 卡车每小时等待成本  $s^w$  默认设置为 8.41 元, 每个卡车机组的固定成本  $s^G$  设置为 100 元.

在计算实验中, 本研究随机生成了 8 个不同客户点规模的测试实例. 表 1 列出了 8 个算例组 (Instance Group, ISGs) 的参数设置. 小规模算例为 ISG1、ISG2、ISG3, 大规模算例为 ISG4、ISG5、ISG6、ISG7、ISG8.

表 1 实验算例组的参数规模

Table 1 Scale of instance groups in experiments

算例组规模编号	客户点数量	卡车机组数量
ISG1	8	2
ISG2	10	2
ISG3	12	2
ISG4	15	3
ISG5	20	3
ISG6	30	4
ISG7	40	4
ISG8	50	4

### 5.2 算法效率测试

#### 5.2.1 基于两种选择策略的列生成算法与 CPLEX 求解效果的对比实验

本研究进行了数值实验, 以测试算法使用第 4.6 节中两种策略的效率和有效性. 本实验采用实例组 ISG1、ISG2 和 ISG3. 表 2 展示了 CPLEX 和所提出的算法在不同策略下的比较.

从表 2 中可以看出, CPLEX 只能解决小范围的问题, 实例组 ISG3 中的实例无法在 2 h 内通过 CPLEX 得到最优解. 然而, 在不同的策略下, 本研究所提算法可以有效地求解表中的实例. 策略的选择对算法的计算时间会产生影响, 策略 1 所用的时间明显短于策略 2 所用的时间; 同时, 策略的选择对算法得到的解的质量也有显著影响, 策略 2 所得解的目标值明显优于策略 1 所得解的目标值. 通过 Gap 的计算, 本研究最终选择策略 2 作为算法的可行化策略, 因为选择策略 1 的 Gap 平均为 2.04%, 选择策略 2 的 Gap 平均为 0.04%. 这表明, 在算法中使用策略 2 可以得到接近最优的解决方案.

表 2 小规模算例下基于两种策略的列生成算法与 CPLEX 结果对比

Table 2 Comparison between the column generation algorithm based on the two strategies and the CPLEX results in small-scale instances

算例		CPLEX		策略 1			策略 2		
规模	序号	$F_{Cplex}$	$t_{Cplex}$ (s)	$F_{st1}$	$t_{st1}$ (s)	$Gap_1$	$F_{st2}$	$t_{st2}$ (s)	$Gap_2$
ISG1	1	134.83	2.12	140.89	1.15	4.49%	134.83	1.25	0.00%
	2	140.13	3.67	142.40	0.69	1.62%	140.13	0.93	0.00%
	3	138.22	3.79	138.22	0.67	0.00%	138.22	1.07	0.00%
	4	142.35	6.30	142.91	0.54	0.39%	142.35	0.74	0.00%
	5	140.64	4.14	140.64	0.82	0.00%	140.64	0.90	0.00%
ISG2	6	138.45	1.23	138.45	46.81	0.00%	138.45	2.45	0.00%
	7	143.67	24.02	157.29	2.99	9.48%	143.67	4.28	0.00%
	8	140.63	282.24	144.85	1.54	3.00%	141.22	2.69	0.42%
	9	137.11	34.82	137.11	3.08	0.00%	137.11	3.57	0.00%
ISG3	10	141.48	375.00	143.41	1.67	1.36%	141.48	2.52	0.00%
	11	—	>7 200	278.30	7.47	—	270.67	9.47	—
	12	—	>7 200	265.32	11.71	—	240.64	13.93	—
	13	—	>7 200	247.46	11.75	—	247.46	11.75	—
	14	—	>7 200	243.92	11.94	—	243.92	14.00	—
15	—	>7 200	258.15	7.90	—	251.74	10.43	—	
平均值						2.04%			0.04%

注： $F_{Cplex}$ 、 $F_{st1}$ 、 $F_{st2}$  分别表示由 CPLEX、算法可行化策略 1、算法可行化策略 2 得到的解； $t_{Cplex}$ 、 $t_{st1}$ 、 $t_{st2}$  分别表示 CPLEX、算法可行化策略 1、算法可行化策略 2 计算的耗时； $Gap_1$  和  $Gap_2$  表示算法可行化策略 1 和策略 2 所得结果与 CPLEX 所得结果的相对误差， $Gap_1 = \frac{F_{st1} - F_{Cplex}}{F_{Cplex}}$ ， $Gap_2 = \frac{F_{st2} - F_{Cplex}}{F_{Cplex}}$ 。

5.2.2 算法加速策略的有效性测试

在本节进行了数值实验来测试算法的有效性和高效性是否随着算例规模的增大而发生改变。为了测试本研究提出的算法是否能够在合理的计算时间内求得最好的近似解，本研究使用 CPLEX 对 4.2 节中所提的模型进行求解。同时，本研究比

较了两种方法解决子问题的效率。第一种方法是使用 CPLEX 直接求解子问题。第二种方法是使用提出的 VNS 算法求解子问题。在该实验中使用小规模算例 ISG1、ISG2 和 ISG3，每组包含 5 个具有相同规模的算例。CPLEX、加速前的算法和加速后的算法的比较结果如表 3 所示。

表 3 小规模算例下 CPLEX、加速前的算法和加速后的算法对比

Table 3 Comparison of CPLEX, the algorithm before acceleration and after acceleration in small-scale instances

算例		CPLEX		CG 未加速		CG 加速		Gap	
规模	序号	$F_{Cplex}$	$t_{Cplex}$ (s)	$F_{CG}$	$t_{CG}$ (s)	$F_{CGA}$	$t_{CGA}$ (s)	$\Delta_{Cplex}$	$\Delta_t$
ISG1	1	134.83	2.12	134.83	23.57	134.83	1.25	0.00%	-94.70%
	2	140.13	3.67	140.13	16.04	140.13	0.93	0.00%	-94.20%
	3	138.22	3.79	138.22	11.90	138.22	1.07	0.00%	-91.01%
	4	142.35	6.30	142.35	18.41	142.35	0.74	0.00%	-95.98%
	5	140.64	4.14	140.64	10.53	140.64	0.90	0.00%	-91.45%
ISG2	6	138.45	1.23	138.45	114.89	138.45	2.45	0.00%	-97.87%
	7	143.67	24.02	143.67	216.76	143.67	4.28	0.00%	-98.03%
	8	140.63	282.24	140.63	875.81	141.22	2.69	0.42%	-99.69%
	9	137.11	34.82	137.11	182.06	137.11	3.57	0.00%	-98.04%
	10	141.48	375.00	141.48	1 699.98	141.48	2.52	0.00%	-99.85%



续表3

Table 3 Continues

算例		CPLEX		CG 未加速		CG 加速		Gap	
规模	序号	$F_{Cplex}$	$t_{Cplex}$ (s)	$F_{CG}$	$t_{CG}$ (s)	$F_{CGA}$	$t_{CGA}$ (s)	$\Delta_{Cplex}$	$\Delta_t$
ISG3	11	—	>7 200	—	>7 200	270.67	9.47	—	—
	12	—	>7 200	—	>7 200	240.64	13.93	—	—
	13	—	>7 200	—	>7 200	247.46	11.75	—	—
	14	—	>7 200	—	>7 200	243.92	14.00	—	—
	15	—	>7 200	—	>7 200	251.74	10.43	—	—
平均值								0.04%	-96.08%

注:  $F_{Cplex}$ 、 $F_{CG}$ 、 $F_{CGA}$  分别表示由 CPLEX、加速前的算法和加速后的算法得到的解;  $t_{Cplex}$ 、 $t_{CG}$ 、 $t_{CGA}$  分别表示 CPLEX、加速前的算法和加速后的算法计算的耗时;  $\Delta_{Cplex}$  表示加速后的算法所得结果与 CPLEX 所得结果的相对误差,  $\Delta_{Cplex} = \frac{F_{CGA} - F_{Cplex}}{F_{Cplex}}$ ;  $\Delta_t$  表示加速后算法求解耗时与加速前的算法求解耗时的相对误差,  $\Delta_t = \frac{t_{CGA} - t_{CG}}{t_{CG}}$ .

在小规模情况下,当算例规模增大至 12 个客户点、2 个卡车机组时,CPLEX 无法在两小时内求得最优解,这意味着 CPLEX 只能在小于 12 个客户点和 2 个卡车机组的算例规模下才能求得模型的最佳解决方案.由于加速前的算法的子问题求解同样使用的 CPLEX 进行求解,所以此算法在规模增大至 12 个客户点、2 个卡车机组时,也无法在两小时内求得结果.由表 3 可知,加速后的算法在算例规模为 ISG1 和 ISG2 的情况下与 CPLEX 的 Gap 保持在 0.42% 以下,平均 Gap 为 0.04%,并且求解速度快于 CPLEX,这说明本研究提出的算法在小规模情况下能高效地求解原模型,并得出一个较为接近全局最优解的局部最优解.

根据表 3 中的“ $\Delta_t$ ”,VNS 算法求解子问题与 CPLEX 求解子问题耗时的 Gap 平均保持在 -96.08%,这表明本研究提出的 VNS 算法很快就可以求解子问题,说明 VNS 算法在解决子问题上高效的.原因是通过 CPLEX 解决子问题需要调用 MIP 求解器中构建模型的过程,这很耗时.但是,使用 VNS 算法来解决子问题,不需要调用任何 MIP 求解器,从而效率较高.

### 5.3 模型有效性测试

在物流管理实际应用领域,一些调度决策主要还是依靠决策者的经验以及其得出的一些决策规则来制定计划,基于运筹学尤其是数学规划模型的物流决策在一些领域还不是很普及.为了验证了本研究提出的决策模型的有效性,将其与

一个实用但简单的决策规则通过一些大规模算例进行对比试验,从而分析验证所提模型的有效性.

本研究使用的决策规则是基于客户需求进行决策的,这也是现实中用于物流路径调度决策中常用的参考依据之一.该规则首先将客户按照客户的需求从大到小的顺序进行排序.然后,根据排序后的客户点顺序,将节点加入卡车路线.直到根据卡车的承载能力,路线中的节点不能再增加为止,此时得到每辆卡车的路线.最后,在现有的卡车路线上查找满足无人机条件的节点,并将其设置为无人机服务节点,对决策变量进行赋值,从而为卡车机组找到了路线.

由于数学模型的复杂性,大规模实验已经无法用 CPLEX 求解原模型解决,所以表 4 主要展示了模型通过列生成算法求出的解和决策规则得出的解进行对比.这里列生成算法也是分别采用了 4.6 节中设计的两种可行化策略,对比结果如表 4 所示.

通过表 4 可以看出,在不同的策略下,本研究提出的列生成算法都可以针对大规模实验算例有效地求解所提出的数学模型.通过表 4 中“ $\Delta_{rel}$ ”和“ $\Delta_{rel2}$ ”列的 Gap 数据可以看出数学模型所得出的解(即路径方案)明显优于基于决策规则得出的路径方案.而且,还可以看出策略 1 的 Gap 平均为 -18.46%,策略的 Gap 平均为 -20.43%,这表明,在算法中使用策略 2 可以得到更优的路径方案.

表 4 大规模算例下决策模型(基于不同可行化策略求解算法)与决策规则的对比

Table 4 Comparison of decision models (based on different feasible strategy solving algorithms) and decision rules for large-scale instances

算例		规则	CGA 策略 1			CGA 策略 2		
规模	序号	$F_{re}$	$F_{CGA1}$	$t_{CGA1}$ (s)	$\Delta_{re1}$	$F_{CGA2}$	$t_{CGA2}$ (s)	$\Delta_{re2}$
ISG4	1	301.21	264.82	43.67	-12.08%	246.52	56.00	-18.16%
	2	316.98	275.69	37.5	-13.03%	272.92	41.65	-13.90%
	3	321.74	270.47	33.95	-15.94%	254.98	39.9	-20.75%
	4	345.14	280.52	41.31	-18.72%	273.20	43.36	-20.84%
	5	321.16	280.01	35.32	-12.81%	272.94	43.93	-15.01%
ISG5	6	368.62	295.47	105.73	-19.84%	292.63	95.75	-20.61%
	7	331.15	280.85	131.96	-15.19%	264.15	140.79	-20.23%
	8	337.86	290.05	150.5	-14.15%	287.45	168.93	-14.92%
	9	345.47	272.32	124.85	-21.17%	264.17	117.35	-23.53%
	10	336.84	283.33	86.5	-15.89%	275.19	77.44	-18.30%
ISG6	11	505.36	423.59	489.65	-16.18%	418.32	513.29	-17.22%
	12	500.10	432.36	492.78	-13.55%	424.27	513.85	-15.16%
	13	393.95	318.26	702.61	-19.21%	303.39	746.02	-22.99%
	14	499.13	426.26	503.97	-14.60%	426.26	455.56	-14.60%
	15	426.50	311.43	588.11	-26.98%	296.43	669.28	-30.50%
ISG7	16	715.35	552.55	1 230.01	-22.76%	552.55	1 403.85	-22.76%
	17	709.71	592.90	1 369.96	-16.46%	566.86	1 483.46	-20.13%
	18	715.03	561.03	1 290.96	-21.54%	558.67	1 202.23	-21.87%
	19	582.25	445.97	2 100.41	-23.41%	445.05	1 894.15	-23.56%
	20	677.28	544.60	1 413.81	-19.59%	544.60	1 311.67	-19.59%
ISG8	21	789.27	600.80	4 690.87	-23.88%	579.43	4 378.22	-26.59%
	22	757.49	598.17	3 257.39	-21.03%	579.67	3 633.68	-23.47%
	23	738.32	587.01	3 897.35	-20.49%	575.52	4 465.53	-22.05%
	24	747.17	616.56	4 029.26	-17.48%	604.30	4 222.17	-19.12%
	25	809.66	591.86	3 764.22	-26.90%	591.54	4 288.55	-26.94%
平均值					-18.52%			-20.51%

注:  $F_{re}$ 、 $F_{CGA1}$ 、 $F_{CGA2}$  分别表示由规则、加速后的算法使用策略 1 和加速后的算法使用策略 2 得到的解;  $t_{CGA1}$ 、 $t_{CGA2}$  分别表示加速后的算法使用策略 1 和加速后的算法使用策略 2 计算的耗时;  $\Delta_{re1}$  表示策略 1 所得结果与规则所得结果的相对误差,  $\Delta_{re1} =$

$$\frac{F_{CGA1} - F_{re}}{F_{re}}; \Delta_{re2} \text{ 表示策略 2 所得结果与规则所得结果的相对误差, } \Delta_{re2} = \frac{F_{CGA2} - F_{re}}{F_{re}}.$$

通过以上实验,本研究验证了建立的数学决策模型的有效性,模型最终可以给决策者带来路径成果的优化达到 20.51%左右,同时本研究也验证了所设计的求解子问题的 VNS 算法效率,通过一些与 CPLEX 直接求解精确解的小规模数值实验可以看出本研究的算法与 CPLEX 求解结果的 Gap 平均约 0.04%且算法的计算时间明显缩短。

### 5.4 敏感度分析

#### 5.4.1 无人机续航时间的敏感度分析

本研究所研究的无人机最大续航时间是

30 min,无人机最大续航时间的不同对卡车机组系统的配送效率有着很大的影响.为了验证无人机续航时间对总成本的影响.本研究选择 ISG4- ISG6 的规模,对无人机续航时间为 20 min 至 110 min 的情况进行了实验.

实验结果由图 2 可知,在所有规模中,总成本随无人机最大续航时间的增加而产生变化.从图中曲线走向可知,随着无人机最大续航时间的增加,总成本是一个先平缓后下降再平缓再下降的过程.在无人机的最大续航时间达到 60 min 时,系

统的总成本明显下降,说明无人机的续航时间达到 60 min 时,会使系统的效益更高. 快递公司如

果想获得的更高效益,在无人机的其他条件不变的情况下,可以尝试延长无人机的最大续航时间.

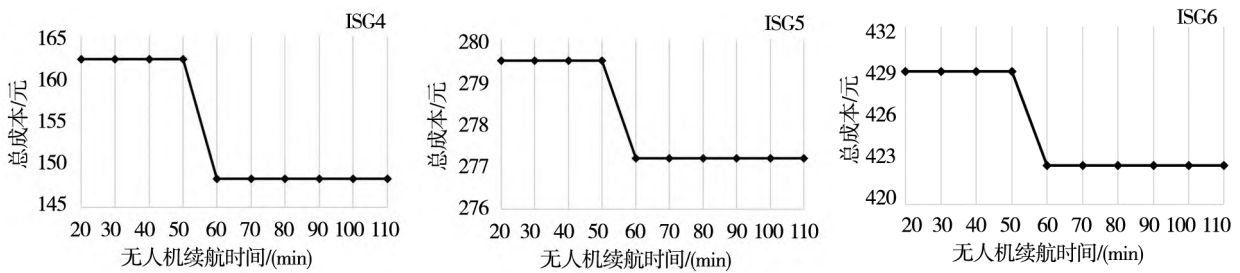


图 2 无人机最大续航时间与总成本的关系

Fig. 2 Relationship between maximum endurance of drones and total cost

### 5.4.2 客户点分布区域大小的敏感度分析

由于同一个区域的客户点都是随机生成的,对于同一个区域客户点的位置不同可能会导致总成本不同,因此,本研究首先对同一个区域多次随机生成同样数量的客户点算例,然后取平均值,绘制图表. 本研究通过多次实验发现,随着实验次数的增加,总成本的平均值会趋于一个数值不变,因此,本研究将此总成本平均值作为此区域的总成本值. 本研究选取 3 个规模对同一大小的区域随机生成算例,对于相同数量的客户点,每次实验的客户点的需求不变. 本研究对在 300 km<sup>2</sup> 的区域生成的 3 个规模各进行了 15 次实验,当实验次数达到 7 次的时候,平均成本曲线趋于平缓,成本值基本不变,因此,为了减少误差,本研究选取 10 次实验取平均值为同一区域内的此规模的总

成本值.

本研究随机生成一些分布在一定区域的客户点,其他条件不变,通过改变区域面积大小分析区域大小的变化对机组系统的总成本变化的影响. 本研究选择 ISG4- ISG6 的规模,对区域面积 100 km<sup>2</sup> ~ 500 km<sup>2</sup> 的情况分别进行了实验,其中区域面积按照等比例扩大从 100 km<sup>2</sup> 变化到 500 km<sup>2</sup>.

由图 3 可知,总成本随生成客户点的区域面积增加而产生变化. 从图中曲线走向可以发现,随着生成客户点的区域面积的增加,客户点密度变小,总成本也逐渐增加. 随着区域面积的增加,系统的总成本也增加,总成本增加幅度逐渐变缓,此趋势的产生与区域面积变化对系统的各个成本的影响程度有关.

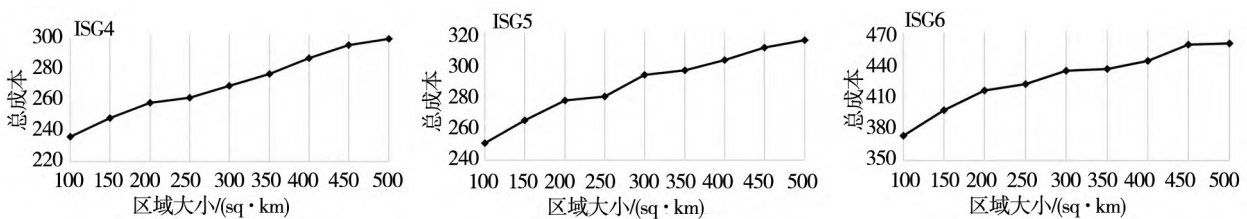


图 3 客户点分布区域变化与总成本的关系

Fig. 3 The relationship between regional variation of customer point distribution and total cost

在每项物流活动中,成本起着重要作用. 本研究的机组系统总成本包括运输成本、等待成本和固定成本. 固定成本与客户点的需求和数量有关,而与客户点密度无关. 运输成本与客户点密度密切相关,客户点密度直接影响客户点间的距离,客户点间的距离直接决定系统的运输成本. 当区域面积等比例扩大时,客户点之间的距离也等比例

扩大,则运输成本变化与区域面积变化成正比例关系. 通过图 3 可知,在同一个规模中,随着区域面积的增加,总成本增加幅度不是呈现正比例增加,随着区域面积的变大,总成本增加变缓,造成此趋势的主要原因是等待成本,说明等待成本是此机组系统中不得不考虑的成本. 因此,快递公司在对仓库位置选址和规划时,需要综合考虑多个

成本,不能只考虑单一成本,造成资源的浪费.通过区域面积和客户点数量可以计算客户点密度,客户点密度为客户点数量与区域面积的比值,从图3可以发现,当客户点密度为0.1时,即ISG4-ISG6规模下区域面积分别为150 km<sup>2</sup>,200 km<sup>2</sup>和300 km<sup>2</sup>时,将此时的区域面积扩大50 km<sup>2</sup>,总成本变动最小,说明此时等待成本最低,因此,此客户点密度范围下,能最大程度的减少资源的浪费.此外,快递公司如果想获得的更高效益,在其他条件不变的情况下,仓库的位置不宜距离客户点太远.

### 5.4.3 无人机飞行速度大小的敏感性分析

本研究所研究的无人机飞行速度为65 km/

h,无人机飞行速度的大小直接影响无人机的飞行时间,从而影响机组系统的总成本.对于同一架无人机来说,其他条件不变,无人机速度发生变化时,无人机的最大续航时间也会随着速度的变化而发生变化.由 $vt = v' t'$ 可知,最大续航时间 $t' = \frac{vt}{v'}$ ,无人机的每小时飞行成本也会随着无人机速度的变化而发生变化.在此情况下,本研究变化无人机的速度,确定相应的关联参数,其他条件不变,选取3个规模进行无人机飞行速度大小的敏感性实验,其中算例规模ISG4至ISG6对应的客户点数量分别为15个、20个和30个.

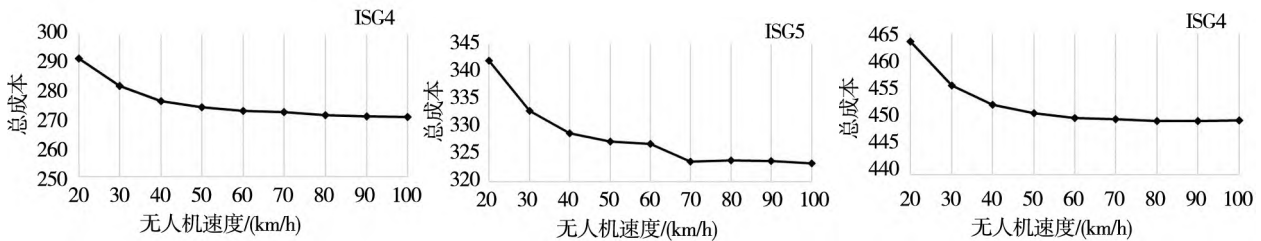


图4 无人机速度与总成本的关系

Fig.4 The relationship between speed of drones and total cost

由图4可知,总成本随无人机飞行速度的增加而产生变化.从图中曲线走向可以发现,随着无人机飞行速度的增加,总成本呈现下降趋势,因此,在无人机允许的飞行速度范围内,无人机速度越大,系统总成本越低.此外,从图4可发现,当速度提升至70 km/h以上时,总成本曲线变缓,成本变化不大,此时无人机的飞行速度再增加,对总成本影响不大,因此建议无人机的飞行速度控制在70 km/h左右.快递公司如果想获得的更高效益,在无人机的其他条件不变的情况下,可以尝试将无人机的飞行速度控制在70 km/h左右.无人机速度的提升有利于降低系统总成本,提高系统效益.

## 6 结束语

本研究针对卡车与无人机协同配送系统开展了系统研究,建立了混合整数规划模型,并且设计了基于列生成的求解算法,通过一系列实验验证了所提模型的有效性和所提算法的效率.本研究

的主要贡献主要有如下几点:

1)本研究针对多卡车多无人机协同配送系统这一新型物流配送系统开展了分析研究,建立的数学模型全面地考虑了较多实用的因素.本研究针对该问题建立了混合整数规划模型,并通过CPLEX也验证了该模型的正确性.

2)针对上述建立的复杂混合整数规划模型,本研究设计并实现了基于列生成的求解算法,通过一些与CPLEX直接求解精确解的小规模数值实验可以看出本研究的算法求解质量高且计算时间短.

3)本研究所设计的求解算法在通用的列生成算法流程基础上也有改进.为了提高基于列生成的求解算法的整体求解速度,本研究设计了基于变邻域搜索的子问题求解策略,通过实验验证,该加速策略可以加快整体求解速度约96%.另外,为了提高在传统列生成基础上最后获得优秀可行解的效率,本研究还设计了两种可行化策略,并进行了实验,对比了各自的求解效率.

4)本研究通过与决策规则所得到的卡车与无人机调度方案进行对比实验,验证了本研究所



研究的基于数学规划模型的决策方法的有效性。通过一些大规模数值试验可以看出模型最终可以给决策者带来路径成果的优化达到 20.51%。

5) 本研究开展了敏感性实验探究了无人机的最大续航时间对总成本的影响,基于本研究实验结果,快递公司如果想获得的更高效益,在无人机的其他条件不变的情况下,可以延长无人机的最大续航时间,或公司应该选择最大续航时间较

长的无人机。

本研究研究也存在一些局限性。比如,目前求解的问题规模(50个客户、4个机组)虽然对于卡车无人机配送这一新兴模式可能还有一定适用性,但是对于未来该模式可能的大规模应用,目前求解的问题规模还需要进一步扩大,因此,研究更加高效的精确算法将是一个重要的研究扩展方向。

## 参 考 文 献:

- [1] Carlsson J G, Song S Y. Coordinated logistics with a truck and a drone[J]. *Management Science*, 2018, 64(9): 4052 - 4069.
- [2] Laporte G. Fifty years of vehicle routing[J]. *Transportation Science*, 2009, 43(4): 408 - 416.
- [3] Murray C C, Chu A G. The flying sidekick traveling salesman problem: Optimization of drone-assisted parcel delivery[J]. *Transportation Research Part C-Emerging Technologies*, 2015, 54: 86 - 109.
- [4] Poikonen S, Golden B, Wasil E A. A branch-and-bound approach to the traveling salesman problem with a drone[J]. *INFORMS Journal on Computing*, 2019, 31(2): 335 - 346.
- [5] de Freitas J C, Penna P H V. A variable neighborhood search for flying sidekick traveling salesman problem[J]. *International Transactions in Operational Research*, 2020, 27(1): 267 - 290.
- [6] Boccia M, Masone A, Sforza A, et al. A column-and-row generation approach for the flying sidekick travelling salesman problem[J]. *Transportation Research Part C-Emerging Technologies*, 2021, 124: 102913.
- [7] Roberti R, Ruthmair M. Exact methods for the traveling salesman problem with drone[J]. *Transportation Science*, 2020, 55(2): 315 - 335.
- [8] Agatz N, Bouman P, Schmidt M. Optimization approaches for the traveling salesman problem with drone[J]. *Transportation Science*, 2018, 52(4): 965 - 981.
- [9] Ha Q M, Deville Y, Pham Q D, et al. On the min-cost traveling salesman problem with drone[J]. *Transportation Research Part C-Emerging Technologies*, 2018, 86: 597-621.
- [10] Vázquez S, Angulo G, Klapp M. An exact solution method for the TSP with Drone based on decomposition[J]. *Computers and Operations Research*, 2021, 127: 105127.
- [11] Omagari H, Higashino S I. Provisional-Ideal-Point-Based multi-objective optimization method for drone delivery problem [J]. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, 2018, 19(1): 262 - 277.
- [12] Wang K Z, Yuan B, Zhao M T, et al. Cooperative route planning for the drone and truck in delivery services: A bi-objective optimisation approach[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2019, 71(10): 1657 - 1674.
- [13] Ha Q M, Deville Y, Pham Q D, et al. A hybrid genetic algorithm for the traveling salesman problem with drone[J]. *Journal of Heuristics*, 2020, 26(2): 219 - 247.
- [14] Murray C C, Raj R. The multiple flying sidekicks traveling salesman problem: Parcel delivery with multiple drones[J]. *Transportation Research Part C-Emerging Technologies*, 2020, 110: 368 - 398.
- [15] Poikonen S, Golden B. Multi-visit drone routing problem[J]. *Computers and Operations Research*, 2020, 113: 104802.
- [16] Gomez-Lagos J, Candia-Vejar A, Encina F. A new truck-trone routing problem for parcel delivery services aided by parking lots[J]. *IEEE Access*, 2021, 9: 11091 - 11108.
- [17] Wang D, Hu P, Du J, et al. Routing and scheduling for hybrid truck-drone collaborative parcel delivery with independent and truck-carried drones[J]. *IEEE Internet of Things Journal*, 2019, 6(6): 10483 - 10495.

- [18] Sacramento D, Pisinger D, Ropke S. An adaptive large neighborhood search metaheuristic for the vehicle routing problem with drones[J]. *Transportation Research Part C-Emerging Technologies*, 2019, 102: 289 – 315.
- [19] Wang Z, Sheu J B. Vehicle routing problem with drones[J]. *Transportation Research Part B-Methodological*, 2019, 122: 350 – 364.
- [20] 朱晓宁, 陈立双, 田昊彤, 等. 考虑区域限制的卡车搭载无人机车辆路径问题研究[J]. *中国管理科学*, 2022, 30(5): 144 – 155.  
Zhu Xiaoning, Chen Lishuang, Tian Haotong, et al. Research on vehicle routing problem with truck and drone considering regional restriction[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2022, 30(5): 144 – 155. (in Chinese)
- [21] Zhen L, Wang K, Wang S, et al. Tug scheduling for hinterland barge transport: A branch-and-price approach[J]. *European Journal of Operational Research*, 2018, 265(1): 119 – 132.
- [22] 李得成, 陈彦如, 张宗成. 基于分支定价算法的电动车与燃油车混合车辆路径问题研究[J]. *系统工程理论与实践*, 2021, 41(4): 995 – 1009.  
Li Decheng, Chen Yanru, Zhang Zongcheng. A branch-and-price algorithm for electric vehicle problem with time windows and mixed fleet[J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2021, 41(4): 995 – 1009. (in Chinese)
- [23] 田倩南, 李昆鹏, 李文莉, 等. 基于改进列生成算法的受扰航班优化调度[J]. *系统工程理论与实践*, 2019, 39(11): 2815 – 2827.  
Tian Qiannan, Li Kunpeng, Li Wenli, et al. Optimization operation of disrupted flights by improving column generation algorithm[J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2019, 39(11): 2815 – 2827. (in Chinese)
- [24] 镇璐, 谭哲一, 萧理阳, 等. 面向双层自动分拣系统的包裹分拣优化模型与算法研究[J]. *中国管理科学*, 2021, 29(7): 171 – 180.  
Zhen Lu, Tan Zheyi, Xiao Liyang, et al. Research on parcel optimization model and algorithm for double-layer automatic systems[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2021, 29(7): 171 – 180. (in Chinese)
- [25] 谭哲一, 王正培, 张毅文. 面向复杂航道的引航员与船舶集成调度优化[J]. *系统工程理论与实践*, 2021, 41(2): 332 – 344.  
Tan Zheyi, Wang Zhengpei, Zhang Yiwen. Integrated optimization of pilots and ships scheduling for ports with complex channels[J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2021, 41(2): 332 – 344. (in Chinese)

## Routing problem of multiple trucks and drones cooperative delivery

ZHEN Lu, GAO Jia-jing, TAN Zhe-yi

School of Management, Shanghai University, Shanghai 200444, China

**Abstract:** The application of collaborative delivery systems based on trucks and drones have attracted more and more attention from the academia. This study investigates a routing problem of multiple trucks and drones cooperative delivery, and formulates a mixed-integer programming model with the objective of minimizing the total cost. A solution method based on column generation is proposed to solve the model. An accelerating technique based on variable neighborhood search is also embedded in the solution method to reduce the computation time. Numerical experiments are also conducted to validate the effectiveness of the proposed model and efficiency of the proposed solution method. Some potentially useful managerial implications are also outlined based on some sensitivity analysis.

**Key words:** collaborative delivery; route optimization; drones; mixed-integer programming; column generation