

31-42

# 管理科学:面对复杂性<sup>①</sup>

## ——混沌时序经济动力系统重构技术

盛昭瀚<sup>②</sup> 马军海  
(东南大学经济管理学院)

F014.9

F402

**【摘要】**研究基于时间序列的非线性混沌经济系统动力学行为的识别方法,其中包括相位随机化、时序关联维数与 Lyapunov 指数的计算方法及嵌入空间矩阵的本征值分解等,并在此基础上讨论了系统的相空间重构技术。

**关键词:**经济系统,混沌,系统重构

管理科学

### 0 引言

当管理科学日益显示其巨大力量之时,管理科学日益面对复杂性。例如,由于非线性作用,经济增长、企业竞争、股票、汇率及贵金属价格等经济问题表现出包括混沌在内的各种复杂现象与行为,因此如果管理科学的研究还只停留在从复杂的现实世界中抽象出简单事件来探索其规律性就远远不够了。管理科学必须认真地吸取当今丰富的研究复杂性的各种方法,来增强对社会经济系统复杂行为的揭示与分析能力。对这类经济系统一般难以直接建立其解析形式的完备的数学模型,而只能通过某种“观测器”样集列描述该系统某一状态的时间序列

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_N \quad x_i \in R$$

通常,如果这一时序是随机序列,则采用统计学的方法建模,但如果这一时序是低自由度的确定性混沌,则不论多么高阶次的线性模型都不能对其行为作出恰当的解释;另外,对于一个确定性系统产生的混沌时序,由于测量过程中不可避免地受到噪声的影响,因此,自然要提出这样的问题:如何判定时序是确定性的还是随机性的;如果时序中既含有噪声又含有确定性因素,那么它们到底是以确定性为主还是以随机性为主,文献[3]给出了判别时序不同特性问题的基本方法,即相位随机化方法。文献[4]给出判值的计算方法,而如何将这些方法实用化,则是本文的研究重点,在此基础上,本文还讨论了用“不充分”的时间序列信息来推断该系统某些整体信息的所谓系统重构技术,这对提高管理科学面对复杂性的能力具有十分重要的意义。

### 1 实测数据混沌特性判定的相位随机化方法

令从某经济系统所得到的时间序列为  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ ,  $x_i$  为第  $T_i$  时间采样所得,其中  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_N$ , 分别为

$$0, \Delta T, 2\Delta T, \dots, (N-1)\Delta T$$

$\Delta T$  为采样时间间隔,应用离散的付里叶变换,变换算子为  $F$ ,得到

① 高校博士点基金资助项目(97028604)。

② 盛昭瀚,教授,博士生导师,通讯地址:南京东南大学经济管理学院,邮编:210096。

$$\begin{aligned} X(f) &= F\{x(t)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) e^{2\pi i f n \Delta} \\ &= A(f) e^{i\Phi(f)} \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $A(f)$  为幅值,  $\Phi(f)$  为相位,  $f$  分别取

$-N\Delta f/2, \dots, -\Delta f, 0, \Delta f, \dots, N\Delta f/2$ ;  $\Delta f = (1/N)\Delta T$ . 现将  $\Phi(f)$  随机地旋转一相位角  $\Psi(f)$ ,  $\Psi(f)$  是用计算机在  $[0, 2\pi]$  内生成的服从某种分布的随机数, 可以得到

$$\hat{X}(f) = A(f) e^{i[\Phi(f) + \Psi(f)]} = X(f) e^{i\Psi(f)} \quad (2)$$

对式(2)进行付里叶逆变换可以得到

$$\hat{x}(t) = F^{-1}\{\hat{X}(f)\} = F^{-1}\{X(f) e^{i\Psi(f)}\} \quad (3)$$

这样便得到  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_N$ , 称为原始数据的替代数据. 这里要求得到的替代数据的虚部为零, 若其虚部不为零, 则会使得到的替代数据不真, 并最终导致混沌特性的判值失效, 这是替代数据生成的一个重要问题. 这一步的实现被称为相位的充分随机化, 本文就这方面问题进行了研究并给出了相应的实施方法.

$$\text{令 } \vec{V}_i = [x_i, x_{i+T}, x_{i+2T}, \dots, x_{i+(m-1)T}] \quad (4)$$

其中  $V_i \in \mathcal{E}^m$

为减少由于实际问题中所产生的数据间的自相关性, 文献[6]已证明  $C(r, N, W)$  应采用如下式子

$$C(r, N, W) = \frac{2}{N^2} \sum_{u=W}^N \sum_{r=1}^{N-u} H[r - |\vec{V}_{i-u} - \vec{V}_i|] \quad (5)$$

$$\text{H 为 Heaviside 函数即 } H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

这里要求  $W$  应满足条件

$$W \geq \tau \left\lceil \frac{2}{N} \right\rceil^{\frac{2}{m}} \quad (6)$$

$\tau$  为时序之间的时间间隔,  $m$  为嵌入维数, 采用时序的关联维数为

$$d = \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{d[\log_2 C(r, N, W)]/dr}{d[\log_2(r)]/dr} \quad (7)$$

$m$  在  $d$  与  $2d + 1$  之间取值. 对原始数据取  $\langle S_{orig} \rangle = d$  对替代数据取  $\langle S_{sub} \rangle = d_{sub}$ .

$\langle S \rangle$  为  $S$  的统计平均.

$$\text{定义 } Z = |\langle S_{sub} \rangle - \langle S_{orig} \rangle| / \sigma_{sub} \quad (8)$$

$\sigma_{sub}$  为替代数据的均方差,  $Z$  就是所建立的判据.

如果序列为随机的或以随机为主的, 相位随机化后值  $|\langle S_{sub} \rangle - \langle S_{orig} \rangle|$  较小, 判据  $Z$  就较小; 如果序列为确定性的或以确定性为主的, 相位随机化  $\langle S_{orig} \rangle$  和  $\langle S_{sub} \rangle$  的值相差较大, 自然判值  $Z$  就大. 根据概率论中的中心极限定理文献[1]指出: 若取显著性水平为  $\alpha = 0.05$ , 则  $Z \geq 1.96$  表明原始数据与替代数据有明显差别. 原实测数据时序以 95% 的置信水平为非线性混沌因素为主的时序, 反之若  $Z \leq 1.96$  则实测数据时序以 95% 的置信水平为随机因素为主的时序.

## 2 动力系统实测数据的分形现象与混沌特性

奇怪吸引子的结构具有分形现象, 常用分维值来定量表示. 分维值指出了动力系统的有效自由度, 从而揭示了奇怪吸引子的复杂程度. 分维的定义有很多种, 而且不同的定义其最终值也稍有差别. 经过近几年的研究, 常用的较多的分维主要有: Hausdorff 维数  $D_H$ , 计盒维数  $D_0$ , 信息维数  $D_1$ , 关联维数  $D_2$ , 广义维数  $D_q$ .

目前, 广泛采用 G-P 算法计算关联维数. 由于动力系统实测数据间不可避免地存在着数据之间的自

相关性,为了减少或基本根除由于数据间的自相关性所造成的影响,式(5)可写为

$$C(r, N, W) = \frac{2}{(N - W + 1)(N - W)} \sum_{N=W}^N \sum_{i=1}^{N-n} H(r - |V_{i-n} - V_i|) \quad (9)$$

其分维数则用式(7)计算.

### 3 动力系统实测数据的 Lyapunov 指数的矩阵算法

Lyapunov 指数是定量描述混沌吸引子的重要指标,自从 1985 年 Wolf 提出 Lyapunov 指数的轨线算法以来,如何准确、快速地计算实验数据的 Lyapunov 指数便成为时序混沌特征判定的重要的问题.基于轨线算法又给出 Lyapunov 指数的矩阵算法,计算结果表明:不同的 Lyapunov exponent 对应着不同的非线性混沌动力系统,且 Lyapunov exponent 越大对应的混沌动力系统的几何结构就越复杂.

假定所得到的时间序列经过数据的预处理,初步剔除数据中各种各样的噪声后,得到的时序为  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, x$ . 为第  $T$  时间采样所得,然后将其嵌入到  $m$  维空间中,定义嵌入向量  $\vec{x}_i$  为

$$\vec{x}_i = (x_i, x_{i+T}, x_{i+2T}, \dots, x_{i+(m-1)T}) \quad (10)$$

其中,  $i = 1, 2, 3, \dots, N - m + 1$ .

定义  $\vec{X}_i$  和  $\vec{X}_j$  的距离为最大值范数(其等价于 2 范数, 3 范数,  $\dots, n$  范数), 即

$$\|\vec{X}_i - \vec{X}_j\| = \max_{0 \leq s \leq m-1} \{|x_{i+s} - x_{j+s}|\} \quad (11)$$

适当选择半径  $r$  则  $\vec{x}_i$  便在以  $\vec{x}_i$  为圆心, 以  $r$  为半径的  $d$ (时序的维数) 维球内. 即

$$\|\vec{X}_i - \vec{X}_i\| \leq r \quad (12)$$

将时间序列重新表述为

$$\begin{aligned} Y_i(m) &= (x_i, x_{i+T}, x_{i+2T}, \dots, x_{i+(m-1)T}) \\ &= (y_{i,1}, y_{i,2}, y_{i,3}, \dots, y_{i,m}) \end{aligned} \quad (13)$$

根据嵌入定理,  $Y_i(m)$  和  $Y_{i+T}(m)$  之间存在一映射  $g$ , 满足

$$Y_{i+T}(m) = g(Y_i(m)) \quad (14)$$

从式(10)和式(13)可得

$$\begin{cases} y_{i+T,1} = y_{i,1} \\ y_{i+T,2} = y_{i,2} \\ \vdots \\ y_{i+T,m-1} = y_{i,m} \\ y_{i+T,m} = \varphi(y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,m}) \end{cases} \quad (15)$$

对于式(10)即为

$$T_i(\vec{x}_j - \vec{x}_i) = (\vec{x}_{j+m} - \vec{x}_{i+m}) \quad (16)$$

嵌入坐标映射  $g$  的雅可比矩阵为

$$T_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{m-1} & a_m \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ , 满足

$$\sum_{i=1}^{N-m} [x_{i+mT} - (\sum_{j=1}^m a_j x_{i+(j-1)T})]^2 = \text{MINIMUM} = f(a_1, a_2, \dots, a_m) \quad (18)$$

Ref<sup>[4]</sup> 证明了时序的 Lyapunov 指数只与其最少的嵌入维数(不妨设为  $q$ ) 有关, 此时式(17) 的  $T_i$ , 将其写作  $T_0, T_1, T_2, \dots, T_N$

$$T_i T_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-q-1}^0 & a_{m-q+2}^0 & \dots & a_m^0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{m-q+1}^0 & b_{m-q+2}^0 & \dots & b_m^0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

这里

$$b_{m-q+1}^0 = a_{m-q-1}^0 a_m^0, b_{m-q+2}^0 = a_{m-q+1}^0 + a_{m-q+2}^0 a_m^0, \dots, b_m^0 = a_{m-1}^0 + a_m^0 a_m^0$$

$$B = T_N T_{N-1} \dots T_1 T_0 = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & D(q) \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{1,m-q+1} & C_{1,m-q+2} & \dots & C_{1,m} \\ C_{2,m-q+1} & C_{2,m-q+2} & \dots & C_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{m-q,m-q+1} & C_{m-q,m-q+2} & \dots & C_{m-q,m} \end{bmatrix}$$

$$D(q) = \begin{bmatrix} C_{m-q+1,m-q+1} & C_{m-q+1,m-q+2} & \dots & C_{m-q+1,m} \\ C_{m-q+2,m-q+1} & C_{m-q+2,m-q+2} & \dots & C_{m-q+2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{m,m-q+1} & C_{m,m-q+2} & \dots & C_{m,m} \end{bmatrix}$$

矩阵  $B$  的特征值为  $\lambda$ , 即  $|\lambda I - B| = 0$

$$\lambda^{m-q} \det[\lambda I - D(q)] = 0 \quad (21)$$

矩阵  $B$  的特征值可分为两部分,  $m - q$  个等于 0, 剩余  $q$  个即为矩阵  $D(q)$  之特征值, 不妨令  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_q| > |\lambda_{q+1}| = \dots = |\lambda_m| = 0$ , 其对应的  $m$  个特征向量为  $e_1, e_2, \dots, e_m$ , 则向量  $Y_0$  可写为

$$Y_0 = a_1 e_1 + \dots + a_q e_q + \dots + a_m e_m \quad (22)$$

而  $BY_0 = a_1 \lambda_1 e_1 + \dots + a_q \lambda_q e_q + \dots + a_m \lambda_m e_m \quad (23)$

则最大的 Lyapunov 指数为

$$L_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \log |BY_0| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \log [a_1^2 \lambda_1^2 + \dots + a_q^2 \lambda_q^2]^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

其中  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_q$  由式(18) 算出,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_q$  由式(21) 算出,  $\tau$  为时间间隔

在实际计算中, 根据文献[4] 中的方法可直接算出时序的维数  $d$ , 取

$$q = [d] + 1 \quad (25)$$

则  $q$  为某一时序的最少嵌入维数.

### 4 动力系统实测数据的本征值分解技术

假设经济时序动力系统实测数据为由式(10) 所表示

定义  $x_1^d = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_d)$   
 $x_2^d = (x_2, x_3, x_4, \dots, x_{d+1})$   
 $\vdots$   
 $x_r^d = (x_r, x_{r-1}, x_{r+2}, \dots, x_{r-d-1})$  (26)

则时序(10)的嵌入空间矩阵可写为

$$X_d = \begin{bmatrix} x_1^d \\ x_2^d \\ \vdots \\ x_r^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_d \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{d+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_r & x_{r+1} & \cdots & x_{d+r-1} \end{bmatrix} \quad (27)$$

(27) 是一个  $r \times d$  的长方形 Toeplitz 矩阵.

文献[7]已证明  $X_d$  可分解为

$$X_d = V_{r,d} S_{d,d} U_{d,d}^T \quad (28)$$

$X_d \in r \times d$  (即  $X_d$  是秩为  $m, r \times d$  维的一个长方阵), 则存在正交矩阵

$$U \in d \times d \text{ 和 } V \in r \times d,$$

其中  $S = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$

且  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$

由于动力系统实测数据在测量和采集过程中都不可避免地有噪声进入, 再者被测试系统本身也可能引起噪声, 这样一来时序中除了含有反映被测系统固有的特性之外, 还因时序中含有由各种方式引起的多种噪声成份. 这些噪声成份所含有的全部信息就将完全地被带入到嵌入空间矩阵中, 所以由嵌入空间矩阵分解所得到的本征值中便将由两部分值所组成, 一部分值对应着时序中反映被测系统固有特性的部分. 而另一部分对应着时序中由各种各样噪声所表示的部分. 这些值大小不同且相互交错在一起. 如何将这些由系统的固有特性或是由噪声所演化而来的本征值区分开来, Broomhazad<sup>[8]</sup>, Mees, etc<sup>[9]</sup> 和 Fraser<sup>[10]</sup> 已经做了这方面的工作. 由于式(4)在实际计算过程中难以实现, 根据数学证明, 式(28)可分解为

$$X_{r,d}^T X_{r,d} = U_{d,d} S_{d,d} V_{r,d}^T V_{r,d} S_{d,d} U_{d,d}^T = U_{d,d} S_{d,d}^2 U_{d,d}^T \quad (29)$$

而对式(29)计算本征值时可少算一正交矩阵  $V$ , 使实际计算过程中难以实现的本征值求解工作可以实现.

## 5 动力系统实测数据的相空间重构

所谓系统相空间重构是指根据观测到的一维时间序列信息来推断原系统本质特征信息的工作, 从几何上讲就是“重构”系统状态空间. 重构状态空间的方法就是用一维时序信息构造一个多维(例如  $d$  维)时滞向量, 由此产生一个  $d$  维向量序列, 并将它看成  $R^d$  中一个动力系统的轨道. 显然, 这里的  $R^d$  即谓嵌入空间.

相空间重构技术对于确定时序模型的阶, 进而对于系统的建模、预测与控制具有十分重要的意义. 因而是将混沌时序从理论分析转化到工程实际应用的桥梁, 重构工作主要包括找到反映时序本质特征的动力系统嵌入空间的最小嵌入维数, 即要求出嵌入空间矩阵中的本征值与本征向量, 再建立最小嵌入空间的基底向量, 并实现时序向量关于基底的投影等.

由式(29)可求得

$$S_{d,d}^2 = U_{d,d}^T (X_{d,d}^T X_{d,d}) U_{d,d} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \sigma_d^2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$S_{d,d}$  为对角矩阵, 应用对称矩阵的雅可比方法可求得其特征值及特征向量. 正交矩阵  $U_{d,d}$  (下用  $U$  来表示) 可用一系列旋转矩阵的积来逼近

$$U = \Pi U_p \quad (31)$$

式中

$$U_{pq} = (u_{ij}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} (p \text{ 列}) & & (q \text{ 列}) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cos\theta & \cdots & \cdots & \cdots & \sin\theta & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & -\sin\theta & \cdots & \cdots & \cdots & \cos\theta & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (32)$$

取  $\theta = \frac{1}{2} \text{arc ctg} \frac{a_{pq} - a_{pp}}{2a_{pp}}$  (33)

式(33)中  $a_{ij}$  为  $A_{r,d}^T A_{r,d}$  中元素  
 ( $i, j = 1, 2, 3, \dots, d$ )

记  $A_{r,d}^T A_{r,d} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2d} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & a_{d3} & \cdots & a_{dd} \end{bmatrix}$  (34)

因为在各种旋转变换下,消去了矩阵中位于第  $p$  行第  $q$  列 ( $p \neq q$ ) 交点上的元素,而矩阵所有元素的平方和保持不变,并且对角线上的元素的平方和增大,因而非对角线元素的平方和随之减小.因此,当旋转次数足够大时,可使对角线元素的绝对值足够小,对于预先给定的精度  $\epsilon > 0$ ,如果  $|a_{ij}| < \epsilon$  ( $i \neq j$ ),则可认为  $a_{ij} \approx 0$ .于是得到求矩阵  $A_{r,d}^T A_{r,d}$  的本征值与本征向量的具体迭代方法:

(i) 按以下递推公式求本征值  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_d^2$

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta_k &= \text{ctg } 2\theta = \frac{a_{pp}^{(k)} - a_{qq}^{(k)}}{2a_{pq}^{(k)}} \\ t_k &= \text{tg } \theta = \begin{cases} (\zeta_k + \sqrt{1 + \zeta_k^2})^{-1} & (\zeta_k \geq 0) \\ -(|\zeta_k| + \sqrt{1 + \zeta_k^2})^{-1} & (\zeta_k \leq 0) \end{cases} \\ U_k = \text{tg } \frac{\theta}{2} &= \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + t_k^2} - 1}{t_k} & (t_k > 0) \\ \frac{1 - \sqrt{1 + t_k^2}}{|t_k|} & (t_k < 0) \end{cases} \\ S_k = \sin \theta &= \frac{t_k}{\sqrt{1 + t_k^2}} \end{aligned} \right. \quad (35)$$

$$\begin{cases} a_{pj}^{(k-1)} = a_{pj}^{(k)} - t_k a_{pj}^{(k)} \\ a_{qj}^{(k-1)} = a_{qj}^{(k)} + t_k a_{qj}^{(k)} \\ a_{pj}^{(k-1)} = a_{pj}^{(k)} - S_j(a_{pj}^{(k)} + v_j a_{qj}^{(k)}) (j \neq p) \\ a_{qj}^{(k-1)} = a_{qj}^{(k)} + S_j(a_{pj}^{(k)} - v_j a_{qj}^{(k)}) (j \neq q) \\ a_{ij}^{(k-1)} = a_{ij}^{(k)} (i \neq p, q, j \neq q) \\ a_{ij}^{(1)} = a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, d), (k = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (36)$$

假定当  $a_{ij}^{(m)} < \epsilon (i \neq j)$  时, 可以认为  $a_{ij}^{(m)} \approx 0$ , 则迭代到  $k = m - 1$  即可, 而取  $a_{ij}^{(m)}$  作为  $\sigma_i^2$  的近似值

$$\sigma_i^2 \approx a_{ij}^{(m)} \quad (i = 1, 2, \dots, d) \quad (37)$$

(ii) 求本征向量

由(1)的推导中可以得到

$$U_m^T U_{m-1}^T \dots U_1^T A_{r_1, d}^T A_{r_2, d}^T \dots A_{r_d, d}^T U_1 \dots U_{m-1} U_m = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_d^2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\text{记 } P_m = U_1 \dots U_{m-1} U_m \quad (39)$$

$$\text{则 } A_{r_1, d}^T A_{r_2, d}^T \dots A_{r_d, d}^T P_m = P_m \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_d^2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

由(40)可知,  $P_m$  为本征向量矩阵.

$P_m$  由式(41)求出

$$\begin{cases} u_p^{(k-1)} = u_p^{(k)} - S_k(u_p^{(k)} + v_p u_q^{(k)}) \\ u_q^{(k-1)} = u_q^{(k)} + S_k(u_p^{(k)} - v_k u_q^{(k)}) \\ u_j^{(k+1)} = u_j^{(k)}, (j \neq p, q) \\ u_j^{(1)} = u_{ij}, (i, j = 1, 2, \dots, d), (k = 1, 2, \dots, m-1) \end{cases} \quad (41)$$

最后得到  $P_m = (u_i^{(m)})$

$$\text{则 } u_i^{(m)} = (u_{1i}^{(m)}, u_{2i}^{(m)}, \dots, u_{di}^{(m)})^T \quad (i = 1, 2, \dots, d) \quad (42)$$

为对应于本征值  $\sigma_i^2$  的本征向量的近似值.

不妨定义  $d$  个本征值  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_d^2$  的  $d$  个本征向量依次为  $r_1, r_2, \dots, r_d$  (在实际计算时可取  $r_i = u_i^{(m)}, i = 1, 2, \dots, d$ ). 由于在一般情况下, 式

$$\begin{cases} r_i r_j = 0 & (i \neq j) \\ r_i^2 = 1 & (i, j = 1, 2, \dots, d) \end{cases} \quad (43)$$

均不成立, 所以需对  $d$  个本征值进行正交化. 把向量

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T, y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T \text{ 的内积定义为} \\ \langle x | y \rangle = y^T x = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n \quad (44)$$

而向量  $x$  的长度定义为

$$\|x\| = \langle x | x \rangle^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (45)$$

通过 G-S 过程由嵌入空间的一个基底  $\{r_1, r_2, \dots, r_d\}$  可得到标准正交基底  $\{w_1, w_2, \dots, w_d\}$

两基底之间的转换关系为

$$\begin{cases} y_1 = r_1, & w_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} \\ y_k = r_k - \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{r_k}{w_i} \right) w_i, w_k = \frac{y_k}{\|y_k\|} \\ k = 2, 3, \dots, d \end{cases} \quad (46)$$

即为

$$(r_1, r_2, \dots, r_d) = (w_1, w_2, \dots, w_d) \begin{bmatrix} \|y_1\| & \left( \frac{r_2}{w_1} \right) & \dots & \dots & \left( \frac{r_d}{w_1} \right) \\ 0 & \|y_2\| & \dots & \dots & \left( \frac{r_d}{w_2} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \left( \frac{r_d}{w_{d-1}} \right) \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \|y_d\| \end{bmatrix} \quad (47)$$

通过式(47)可以得到正交化、单位化的嵌入空间坐标向量 $(w_1, w_2, \dots, w_d)$ ，欧氏空间中的两个非零向量 $x, y$ ，其夹角 $\theta$ 定义为

$$\theta = \arccos \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad (48)$$

这样可以将时序投影到已正交化、单位化的各坐标轴 $(w_1, w_2, \dots, w_d)$ 上。

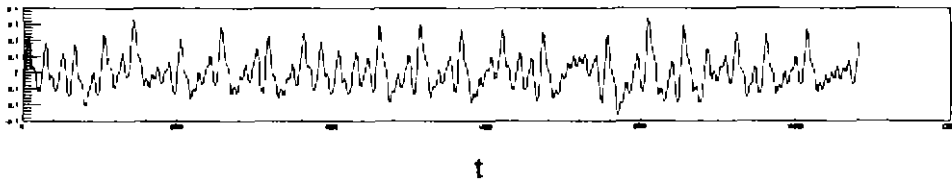


图 1 第 1 组数据的时间历程图

## 6 计算结果

根据前 5 节的理论编制的计算程序，取如下 4 组数据对本文的算法进行验证：

(1) 对 Logistic map  $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$  取  $\lambda = 4$  标准混沌的情况，前 1000 点作为暂态点去掉，把后 6000 点作为(1)组原始数据点，其相空间重构相图如图 7

(2) 对 Henon map  $\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$

取  $a = 1.4, b = 0.3$  标准混沌的情况，前 1000 点作为暂态点去掉，把后 6000 点作为(2)组原始数据点，其相空间重构相图如图 8。

(3) 取某实测经济时序数据，其时间历程图如图 1，其相空间重构相图如图 9。

(4) 取  $[0, 2\pi]$  内的随机数 7500 点。

对上述 4 组数据的原始数据分别进行付里叶变换，在其逆付里叶变换的相位上分别加上在  $[0, 2\pi]$  内产生的高斯分布的随机数，或加上用蒙特卡洛随机取余方法生成的均匀分布的随机数来生成替代数据。表中替代数据  $a, b$  由相位上加上不同的均匀分布的随机数所生成，其随机数种子分别取为 33.0 和 151.0，替代数据  $c$  由相位上加上  $\mu = 0, \sigma = 0$  的高斯分布的随机数所生成，替代数据  $d$  由相位上加上  $\mu = 0, \sigma = 10.0$  的高斯分布的随机数所生成，加上原始数据每组共有 5 组数据，其均值，均方差和算得的维数均值如下表：



	(4) 组原始数据	(4) 组替代数据 a	(4) 组替代数据 b	(4) 组替代数据 c	(4) 组替代数据 d
均值 $\bar{X}$	3.143 593 814	3.143 593 855	3.143 593 797	3.143 593 835	3.143 593 851
均方差 $S$	1.813 427 852 75	1.813 427 871 195	1.813 427 862 013	1.813 427 861 611	1.813 427 848 001
$\langle D_{reg} \rangle$	1.920 297 179 467				
$\langle D_{surr} \rangle$		2.090 015 691 268	2.199 898 283 823	2.317 852 380 578	2.297 979 050 142
	(1) 组原始数据	(1) 组替代数据 a	(1) 组替代数据 b	(1) 组替代数据 c	(1) 组替代数据 d
均值 $\bar{X}$	0.504 697 622	0.504 697 627	0.504 697 638	0.504 697 608	0.504 697 644
均方差 $S$	0.340 114 793 301	0.340 114 776 009	0.340 114 785 928	0.340 114 780 756	0.340 114 780 652
$\langle D_{reg} \rangle$	1.129 808 967 525				
$\langle D_{surr} \rangle$		1.855 071 391 208	1.869 004 651 628	1.876 265 034 335	1.866 391 761 901
	(2) 组原始数据	(2) 组替代数据 a	(2) 组替代数据 b	(2) 组替代数据 c	(2) 组替代数据 d
均值 $\bar{X}$	0.160 699 786 848	0.160 699 800 001	0.160 699 797 002	0.160 699 298 0	0.160 699 789 0
均方差 $S$	0.545 648 587 853	0.545 648 576 051	0.545 648 599 899	0.545 648 581 472	0.545 648 583 427
$\langle D_{reg} \rangle$	1.269 990 000 01				
$\langle D_{surr} \rangle$		2.930 198 768 601	3.090 042 856 004	2.960 000 200 001	3.001 006 022 301
	(3) 组原始数据	(3) 组替代数据 a	(3) 组替代数据 b	(3) 组替代数据 c	(3) 组替代数据 d
均值 $\bar{X}$	0.004 078 231	0.004 079 012	0.004 079 144	0.004 078 875	0.004 078 998
均方差 $S$	0.063 289 616 570	0.063 289 634 001	0.063 289 596 889	0.063 289 687 043	0.063 289 696 161
$\langle D_{reg} \rangle$	1.322 466 767 501				
$\langle D_{surr} \rangle$		1.095 651 282 801	1.110 599 347 013	1.104 820 166 101	1.105 417 170 001

从表中的数据中可以看出,无论是相位上加上均匀分布的随机数还是加上高斯分布的随机数其原始数据与替代数据的均值和均方差基本上是相同的.但由于相位的充分随机化在频域上表现为数据相位的改变,在实域上则表现为数据的变化,从而通过式(8)来判别这种改变的激烈程度.替代数据对应的判值  $Z_a, Z_b, Z_c, Z_d$  的值如下:

对第 1 组数据

$$Z_a = 2.132 403 892, Z_b = 2.173 371, Z_c = 2.194 718, Z_d = 2.165 688$$

对第 2 组数据

$$Z_a = 3.042 615, Z_b = 3.335 558, Z_c = 3.097 231 9, Z_d = 3.172 382$$

对第 3 组数据

$$Z_a = 3.583 76, Z_b = 3.347 586, Z_c = 3.438 895, Z_d = 3.429 461 8$$

对第 4 组数据

$$Z_a = 0.093 589 8, Z_b = 0.154 183 7, Z_c = 0.219 228 57, Z_d = 0.208 269$$

由以上所算得各组判值与临界值 1.96 作一比较,可以得出这样的结论:第 4 组数据为随机数据,第 1~3 组数据为混沌数据.这些结论与第 1、2、4 组数据的背景是一致的.

图 2—图 6 为第 1~4 组数据的维数图.

图 2 中取  $N = 7 500, W = 12, m = 4, \min r = 1.50, \max r = 11.50$ .

图 3 中取  $N = 7 500, W = 12, m = 3, \min r = 0.18, \max r = 1.5$ .

图 4 中取  $N = 7 500, W = 12, m = 3, \min r = 0.5, \max r = 2.85$ .

图 5 中取  $N = 6 224, W = 12, m = 3, \min r = 2.85, \max r = 32.0$

图 6 中取  $N = 6 224, W = 12, m = 3, \min r = 0.022, \max r = 0.5$ .

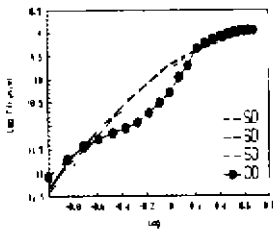


图2 第4组数据原始数据和其对应的4组替代数据的  $\log_2 r - \log_2 C(r, N, W)$  图

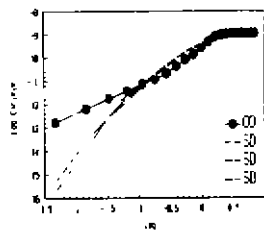


图3 第1组数据原始数据和其对应的4组替代数据的  $\log_2 r - \log_2 C(r, N, W)$  图

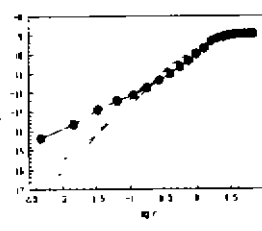


图4 第2组数据原始数据和其对应的4组替代数据的  $\log_2 r - \log_2 C(r, N, W)$  图

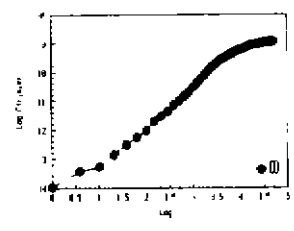


图5 第3组数据原始数据和其对应的4组替代数据的  $\log_2 r - \log_2 C(r, N, W)$  图

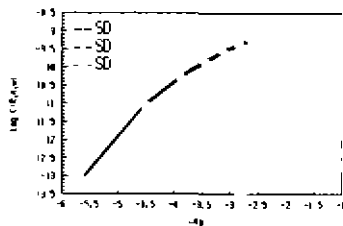


图6 第3组数据对应的4组替代数据的  $\log_2 r - \log_2 C(r, N, W)$  图

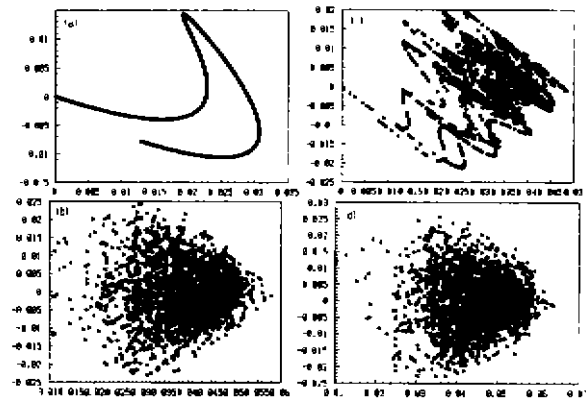


图7 第1组数据的相空间重构图

表1 (1)组数据 Logistic map 的 Lyapunov 指数

$N$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
896	0.470 7	0.276 2	-0.067 6	-0.131 0	-0.181 3	-0.508 9
1 796	0.465 3	0.279 4	-0.084 2	-0.133 2	-0.192 3	-0.558 6
2 696	0.460 8	0.283 2	-0.089 7	-0.139 4	-0.194 1	-0.564 2
3 596	0.441 9	0.266 9	-0.090 7	-0.137 0	-0.185 6	-0.487 1
4 496	0.451	0.166 9	-0.090 7	-0.137 7	-0.197 4	-0.496
5 396	0.452	0.264 9	0.086 1	-0.136 6	-0.209 0	-0.456 4
6 296	0.446 2	0.257 2	-0.085 4	-0.134 5	-0.208 4	-0.457 1
7 196	0.446 1	0.258 4	-0.085 5	-0.134 4	-0.211 8	-0.454 5
8 096	0.442 7	0.253 7	-0.082 8	-0.135	-0.188 6	-0.442 8
8 996	0.444 3	0.253 4	-0.083 3	-0.132 8	-0.173	-0.434
9 896	0.445 4	0.255	-0.079 6	-0.131 9	-0.178 4	-0.447
9 988	0.446 4	0.255 7	-0.080 6	-0.130	-0.173 4	-0.448 1

计算过程中取  $\text{Max } N = 10\ 000$ , 嵌入维数  $m = 6$ .

表2 (2)组数据 Henon map 的 Lyapunov 指数

$N$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
896	0.436 2	0.142 3	-0.339 1	-0.423 9	-0.764 9	-1.680 2
1 796	0.431 7	0.143 7	-0.311 4	-0.432 9	-0.798 8	-1.673
2 696	0.421 6	0.145 2	-0.324 7	-0.466 5	-0.780 5	-1.682
3 596	0.433 3	0.139 6	-0.369	-0.450 7	-0.765 5	-1.655
4 496	0.426 8	0.136 5	-0.374 8	-0.441 4	-0.765 4	-1.641
5 396	0.428 7	0.137 7	-0.361	-0.482 1	-0.801	-1.610
6 296	0.423 3	0.142 2	-0.352	-0.472 9	-0.858	-1.609
7 196	0.423 1	0.140 1	-0.348	-0.466 4	-0.822 5	-1.664
8 096	0.421 7	0.140 8	-0.349 5	-0.454 6	-0.819 4	-1.692
8 996	0.422 3	0.143 9	-0.344	-0.425 6	-0.822	-1.606
9 896	0.421 2	0.142	-0.340	-0.413 7	-0.817	-1.674
9 988	0.421 7	0.141 0	-0.342	-0.419 0	-0.812	-1.606 1

计算过程中取  $\text{Max } N = 10\ 000$ , 嵌入维数  $m = 6$ .

表 3 Ref[5] 给出的(2)组数据 Henon map 的 Lyapunov 指数的计算结果

$M$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
2	0.444 9	-1.609				
3	0.440 7	-0.893	-1.653			
4	0.441 9	-0.307	-0.804	-1.625		
5	0.463 1	-0.049	-0.389	-0.760 7	-1.635	
6	0.464 8	0.143 9	-0.227	-0.424 6	-0.871 5	-1.645

计算过程中取  $\text{Max } N = 10\ 000$ , 嵌入维数  $m = 6$ .

文献[5]中称  $m = 2$  的情况下正确的 Lyapunov 指数的值为  $\lambda_1 = 0.408$ ,  $\lambda_2 = -1.62$

表 4 (3)组数据经济时序数据的 Lyapunov 指数

$N$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
896	0.030 9	-0.003	-0.019	-0.027 8	-0.073	-0.196
1 796	0.030 8	0.004 3	-0.019	-0.028 9	-0.071	-0.216 9
2 696	0.030 9	0.004 7	-0.011	-0.032 7	-0.070	-0.231
3 596	0.030 9	0.008 8	-0.010 2	-0.034 7	-0.742	-0.237
4 496	0.030 9	0.007 8	-0.010 5	-0.033 3	-0.074	-0.233
5 396	0.030 6	0.007 9	-0.010 4	-0.031 6	-0.073	-0.222
6 296	0.030 6	0.006 4	-0.010	-0.032 4	-0.069	-0.217
7 196	0.030 5	0.005 5	-0.009	-0.032 0	-0.067	-0.220
8 096	0.030 4	0.005 1	-0.009 4	-0.032 7	-0.068	-0.221
8 996	0.030 5	0.005 5	-0.009	-0.031 7	-0.068	-0.217
9 896	0.030 5	0.005 3	-0.008	-0.031 8	-0.069	-0.217
9 988	0.030 5	0.005 3	-0.008	-0.0321	-0.069	-0.218

计算过程中取  $\text{Max } N = 10\ 000$ , 嵌入维数  $m = 6$ .

图 7, 图 8, 图 9 分别为(1)、(2)、(3)组数据的相空间重构相图, 其横、纵坐标分别为混沌时序在已正交化、单位化了的两个最大的本征向量上的投影。

图 7, 图 8 中(a)为取嵌入维数为 2 的情形, (b)为取嵌入维数为 3 的情形, (c)为取嵌入维数为 4 的情形, (d)为取嵌入维数为 8 的情形。图 9 中(a)为取嵌入维数为 4 的情形, (b)为取嵌入维数为 5 的情形, (c)为取嵌入维数为 8 的情形, (d)为取嵌入维数为 12 的情形。

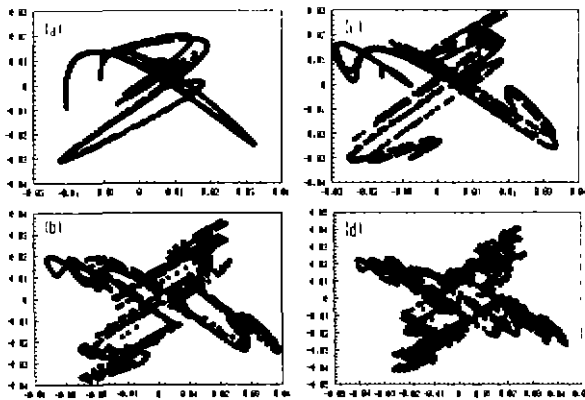


图 8 第 2 组数据的相空间重构图

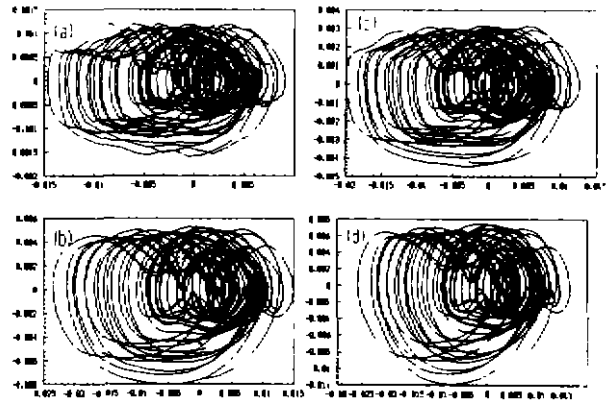


图 9 第 3 组数据的相空间重构图

## 7 结 论

1° 从图 7、图 8 和图 9 中可以得出这样的结论, 第 1 组数据的最小嵌入维数为 2, 第 2 组数据的最小嵌入维数为 2, 第 3 组实验数据的最小嵌入维数为 5.

2° 从图 7 中可以看出,第 2 组数据的最小嵌入维数为 4 时是最佳的,为 3 时虽不是最佳的但近似程度已基本可以了.从图 9 中可以看出第 3 组数据的最佳嵌入维数为 5.

3° 在研究第 3 组数据所在的动力系统方程时,习惯上取模型阶为 4,这从图 9 中可以看出最小嵌入空间维取 4 虽不是最佳,但近似程度已相当好了.本文的理论结果证明了人们惯常对某些动力系统的近似模态取法基本上是可行的.

在处理不知嵌入维数任何信息的时序时,本文的理论、算法及结果便显出优越性,它可以帮助人们找出最佳的嵌入维数,并能由此宏观上了解噪声对时序的影响情况.

4° 相空间重构工作使得非线性函数的逼近从时间上的外插变成相空间上的内插,这样更有利于问题的解决.

5° 相空间重构理论对低维混沌时序和高维混沌时序是普遍适用的,本文给出的实际计算结果完成了混沌时序在最大的两个本征值所对应的本征向量上的投影即相空间重构的重要工作.

### 参 考 文 献

- 1 盛昭瀚等.快速模拟退火法在分形数据压缩中的应用.控制与决策,1997,6
- 2 盛昭瀚,赵林度.分形模型在模拟自然景物中的应用.东南大学学报,1996,11
- 3 Packard J P,Curtchifield J D,Farmer,et al. Phys. Rev. Lett. 1980,45,712
- 4 Mane F T,et al. In Dynamical Systems of Turbulence,of Lecture Notes in Mathematics,edited by D. A. Rand and L. S. Young Berlin:Springer,1986,898,366
- 5 Eckman J P,Rapp P E,Zimmerman T D, et al. Phys. Letts. 1985,110a,335
- 6 Broomhead D S,King G P. In phenomena and chaos, edited by S. Sarkar,Bristol:Adam Hilger,1986
- 7 马军海,陈予恕,刘曾荣.动力系统实测数据的非线性混沌特性的判定.应用数学和力学,1998,6
- 8 Broomhead D S,King G P. Extracting qualitative dynamics from experimental data. Phys. 1997,D20;217~236
- 9 Mees A I,Rapp P E,Jennings L S. Singular-value decomposition and embedding dimension. Phys. 1987,36;340
- 10 Fraser A M. Reconstructing attractors from scalar time series; A comparison of singular system and redundancy criteria. Phys. 1989,D34;391~404

## Management Science to Face with Complicated Problems——the Reconstruction Technology of the Chaotic Timeseries for the Economic Dynamical System

*Sheng Zhaohan, Ma Junhai*

School of Economy and Management, Southeast University

**Abstract** In this paper the identification method for the nonlinear chaotic economic dynamical system based on timeseries is studied, and include the method of phase-randomized, the calculation method of its dimension, Lyapunov exponent and the singular-value decomposition for the technology is studied carefully.

**Keywords:** economic system, chaos, system reconstruction