维普资讯 http://www.cqvip.com

第1卷第3期 1998年9月
管理科学学报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol. 1 No. 3 Sep. 1998

(9)
50-53

多属性决策中权重确定的一种集成方法[①]

樊治平[②] 张 全 马 建
(东北大学工商管理学院) (香港城市大学商学院)

O225

【摘要】针对多属性决策中属性权重的确定问题,提出了一种主客观信息的集成方法.该方法是通过一个数学规划模型,将决策者给出的主观权重偏好信息与客观的决策矩阵信息进行有机地集成,使确定的权重同时反映主观程度和客观程度.

关键词:多属性决策,权重,模型,集成方法

决策矩阵.

0 引 言

多属性决策是与多个属性有联系的有限方案选择问题[1],它具有广泛的理论和实际应用背景.虽然20多年来有关多属性决策问题的研究已经有了丰硕的成果,但是仍面临着新的挑战[2].下列符号表示一个多属性决策问题:

- $S=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$:m个可能方案的集合.
- $P=\{P_1,P_2,\cdots P_n\}$:n个属性的集合.假设这些属性是客观的并且是加性独立的(aditively independent).
- $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$:属性权重的向量,其中$\sum_{j=1}^{n}w_j=1,w_j\geqslant 0,\forall\ j$.
- $A=[a_{ij}]_{m\times n}$:决策矩阵.其中a_{ij}是方案S_i对应于属性P_j的一个数值结果.在决策矩阵A中,$a_{ij}\in[0,1],\forall\ i,j$,这表示矩阵$A$已被规范化.

决策者的目标就是从集合S中选择$M(<m)$个最满意的方案或一个最好的方案S^*.

值得指出,解决多属性决策问题的许多方法都需要关于属性权重的信息[1].由于方案的排序与属性的权重密切相关,所以,在解决多属性决策问题之前,如何确定权重是非常重要的.目前确定属性权重的方法大致可分为两类:一类是基于决策者给出偏好信息的方法(也包括决策者直接给出的属性的权重),例如特征向量法[3]、最小平方和法[4]和Delphi法[5],等等.另一类是基于决策矩阵信息的方法,例如主成分分析法[6],熵法[1]和多目标最优化方法[7,8],等等.文献[7]及本文作者认为第1类方法属于"主观赋权法",因为权重的确定是基于决策者的主观偏好信息;第2类方法属于"客观赋权法",因为权重的确定是基于客观信息(可以认为决策矩阵是属于客观信息的).

运用主观赋权法确定权重,虽然反映了决策者的主观判断或直觉,但是方案的排序可能有很大的主观随意性,也可能受到决策者的知识或经验缺乏的影响.而运用客观赋权法确定权重,虽然通常利用完善的数学理论,但忽视了决策者的主观信息.由于两类方法都存在长处和短处,所以将主观赋权法和客观赋权法进行集成或综合将是期望的.目前,有关确定权重的主客观信息集成方法的研究已经引起了重视,并且得到了一些初步的研究成果[9,10].本文将给出一种新的确定权重的集成方法.

---

① 国家自然科学基金资助项目(79600006)和辽宁省博士起动基金资助项目(971023).
② 樊治平:博士,副教授.通讯地址:沈阳市东北大学工商管理学院329信箱,邮政编码:110006.

维普资讯 http://www.cqvip.com

1 原理与方法

考虑多个决策者 $DM_k(k=1,2,\cdots,q)$ 已经分别给出属性的权重为 $w_k^0=(w_{k1}^0,w_{k2}^0,\cdots,w_{km}^0)^T,k=1,2,\cdots,q$. 设每个决策者的重要程度(权重)为 $h=(h_1,h_2,\cdots,h_q)^T$,其中,$\sum_{k=1}^{q}h_k=1,h_k\geqslant 0$.

从主观赋权法角度,为了确定属性的权重,可以建立下列优化模型

$$\min G'=\sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{n}h_k(w_j-w_{kj}^0)^2 \tag{1a}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}w_j=1 \qquad w_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,n \tag{1b}$$

模型(1)的含义是找出一个权重向量 w,使属性权重 $w_j(j=1,2,\cdots,n)$ 与决策者给出的权重 $w_{kj}^0(k=1,2,\cdots,q;j=1,2,\cdots,n)$ 之间的总偏差平方和 G' 最小.

从客观赋权法角度,为了确定属性权重,可以建立下列多目标最优化模型[8]

$$V-\min G=(g_1,g_2,\cdots,g_m) \tag{2a}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}w_j=1 \qquad w_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n \tag{2b}$$

模型(2)中,$g_i=\sum_{j=1}^{n}(a_j^*-a_{ij})^2w_j^2$,其中,$a_j^*=\max\{a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}\}$ 是属性 P_j 的"理想值". g_i 的含义是方案 $S_i=\{a_{i1}w_1,a_{i2}w_2,\cdots,a_{in}w_n\}$ 与"理想方案"$S^*=\{a_1^*w_1,a_2^*w_2,\cdots,a_n^*w_n\}$ 之间的偏差平方和. 模型(2)的含义是寻找一个权重向量 w,使 $g_1,g_2,\cdots,g_m$ 均达到最小.

为了求解模型(2),可以采用等权的线性加权方法,将多目标最优化模型转化为等价的单目标最优化模型

$$\min G''=\sum_{i=1}^{m}g_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_j^*-a_{ij})^2w_j \tag{3a}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}w_j=1 \qquad w_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,n \tag{3b}$$

模型(3)就是基于决策矩阵 A 的信息来确定属性的权重,可以认为是一种客观赋权法.

为了使确定的权重同时含有主观信息与客观信息,可以考虑将模型(1)和模型(3)进行有效的集成,为此,可以建立下列新的最优化模型

$$V-\min(G',G'') \tag{4a}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}w_j=1 \qquad w_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,n \tag{4b}$$

模型(4)的含义就是求出一个权重向量,使两个目标函数 G'、G'' 同时达到最小. 为了求解模型(4),可以采用线性加权方法,将两目标最优化模型转化为等价的单目标最优化模型

$$\min Z=\alpha\sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{n}h_k(w_j-w_{kj}^0)^2+\beta\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_j^*-a_{ij})^2w_j^2 \tag{5a}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}w_j=1 \tag{5b}$$

$$w_j\geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{5c}$$

其中,α、β 表示相对重要程度,且 $\alpha+\beta=1,\alpha,\beta>0$. 为了求解模型(5),首先不考虑约束条件(5c),建立 Lagrange 函数

$$L=\alpha\sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{n}h_k(w_j-w_{kj}^0)^2+\beta\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_j^*-a_{ij})^2w_j^2+2\lambda(\sum_{j=1}^{n}w_j-1) \tag{6}$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

式中,λ 为 Lagrange 乘子. 令 $\partial L/\partial w_j = 0$,得

$$\alpha \sum_{k=1}^{q} h_k (w_j - w_{kj}^0) + \beta \sum_{i=1}^{m} (a_j^* - a_{ij})^2 w_j + \lambda = 0 \tag{7}$$

联立求解式(5b) 和式(7),可以得到属性的权重为

$$w_j^* = b_j [c_j + (1 - \sum_{i=1}^{n} b_i c_i) / \sum_{j=1}^{n} b_j] \qquad j = 1,2,\cdots,n \tag{8}$$

其中

$$b_j = \frac{1}{\alpha + \beta \sum_{i=1}^{m} (a_j^* - a_{ij})^2} \qquad j = 1,2,\cdots,n \tag{9}$$

$$c_j = \alpha \sum_{k=1}^{q} h_k w_{kj}^0 \qquad j = 1,2,\cdots,n \tag{10}$$

下面来说明 w_j^* 将满足约束条件(5c),这样求出的 w_j^* 才有实际意义. 由式(9) 可知,$0 < b_j \leqslant 1/\alpha$,所以有 $1 - \sum_{j=1}^{n} b_j c_j \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{n} c_j$. 又由式(10) 可知,$\sum_{j=1}^{n} c_j = \alpha$,因此,$1 - \sum_{j=1}^{n} b_j c_j \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha} \alpha = 0$. 则由式(8) 可知,$w_j^* \geqslant b_j c_j$. 同时,注意到 $b_j > 0, c_j > 0$,故有 $w_j^* > 0$.

2 算 例

由于机器人广泛应用于各种工业中,所以使用机器人的用户面临着许多选择. 因为机器人有多个性能指标,并且至今还没有一个完善的工业标准,因此如何在市场上选择机器人是一个多属性决策问题[11,12]. 下面给出一个例子来说明前面提出的方法.

考虑一个用户要选择机器人,有 4 个方案供他 / 她选择,即 S_1, S_2, S_3, S_4;有 4 个属性,即 P_1:价格($10 000);$P_2$:速度(m/s);$P_3$:可重复性(mm);$P_4$:负载能力(kg). 这里 P_1、P_3 为成本型属性,P_2,P_4 为效益型属性,该问题的决策矩阵如表 1 所示.

表 1 关于选择机器人的决策信息

	P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	3.0	1.0	1.0	70
S_2	2.5	0.8	0.8	50
S_3	1.8	0.5	2.0	110
S_4	2.2	0.7	1.2	90

根据文献[7],将表 1 中的决策矩阵可转化为规范化的决策矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5/6 & 1/3 \\ 5/12 & 3/5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & 2/5 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

假设机器人用户聘请3个专家给出关于属性的权重向量分别为 $w_1^0 = (0.3, 0.4, 0.15, 0.15)^T$,$w_2^0 = (0.4, 0.3, 0.15, 0.15)^T$,$w_3^0 = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)^T$,并且每个专家的权重为 $h = (1/3, 1/3, 1/3)^T$. 同时,取系数 $\alpha = \beta = 0.5$. 如果使用前面给出的公式(8),则可求出同时反映主、客观信息的权重向量为 $w^* = (0.273\,3, 0.265\,8, 0.250\,9, 0.210\,0)^T$. 如果需要对所有方案进行排序,那么可以使用加权法,即 $d_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j^*$,则可计算出每个方案的综合评价值为 $d_1 = 0.544\,9$, $d_2 = 0.524\,2$, $d_3 = 0.483\,3$, $d_4 = 0.595\,8$. 故方案的排序结果为 $S_4 \succ S_1 \succ S_2 \succ S_3$.

维普资讯 http://www.cqvip.com

3 结束语

本文针对多属性决策中属性权重的确定问题,给出了一种集成方法.该方法是将主观信息与客观权信息进行集成,并通过数学规划模型直接求出权重向量.本文的研究内容弥补了单纯采用主观赋权法或客观赋权法的不足,使多属性决策问题的分析结果同时反映了主观程度和客观程度.

参考文献

1 Hwang C L,Yoon K. Multiple attribute decision making. Springer-Verlag,Berlin Heidelberg, New York,1981

2 Yoon K P,Hwang C L. Multiple attribute decision making—An Introduction. Sage University Paper,Sage QASS Series, Sage Publications,International Educational and Professional Publisher,1996

3 Saaty T L. A scaling method for priorities in hierarchical structures. Journal of Mathematical Psychology,1977,15:234~281

4 Chu A T W,Kalaba R E,Spingarn K. A comparison of two methods for determining the weights of belonging to fuzzy sets. Journal of Optimization Theory and Application,1979,27:531~538

5 Hwang C L,Lin M J. Group decision making under multiple criteria:methods and applications. Springer-Verlag,1987

6 严鸿和,陈玉祥,许绍明等.专家评分机理与最优评价模型.系统工程理论与实践,1989;9(2):19~23

7 王应明,傅国伟.运用无限方案多目标决策方法进行有限方案多目标决策.控制与决策,1993;8(1):25~29

8 樊治平.多属性决策的一种新方法.系统工程,1994;12(1):15~17

9 梁梁,陈晓剑.重要性与信息量的综合评价方法.决策与决策支持系统,1993;3(3):90~92

10 Fan Z P,Ma J,Tian P. A subjective and objective intergrated approach for the determination of attribute weights. Proceedings of the Fourth Conference of the International Society for Decision Support Systems,Switzerland,1996. 611~617

11 Goh C H. ,Tung Y C A,Cheng C H. A revised weighted sum decision model for robot selection. Computers & Industrial Engineering,1996;30:193~199

12 Khouja M,Offodile O. The industrial robots selection problem:a literature review and directions for future research. IIE Transactions,1994;26(4):50~61

An Integrated Approach to Determining Weights in Multiple Attribute Decision Making

Fan Zhiping,*Zhang Quan*

Faculty of Business Administration, Northeastern University

Ma Jian

Faculty of Business,City University of Hong Kong

Abstract In order to determine attribute weights in multiple attribute decision making,an integrated approach baased on subjective and objective information is proposed. By solving a mathematic programming model,the subjective information of weights given by decision makers and the objective information of the decision matrix are integrated so that the determined weights reflect both subjective factors and objective factors.

Keywords: multiple attribute decision making,weights,model,integrated approach