(6)

第1卷第4期
1998年 12月

管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA

Vol. 1 No. 4
Dec. 1998

逼近群体理想点的多目标群体决策算法

34-38

方卫国[1]
（北京航空航天大学飞机设计研究所）

周 泓
（北京航空航天大学管理学院）

C934

【摘要】将用于个人多目标决策的 TOPSIS 方法推广到群体决策情形，引入群体理想点概念，用群体理想点取代群体效用. 基于群体决策的结论应尽量接近所有决策成员最理想的结论这一思想，提出逼近群体理想点的多目标群体决策方法，并通过算例说明该方法的具体应用.

关键词：群体决策，多目标决策，群体理想点

分类号：C934

0 引 言

传统的群体决策研究中，多数是基于群体效用归并的，即将群体中各成员的效用函数归并为统一的群体效用函数，从而利用群体偏好来表达各成员的一致偏好. 要实现这种效用归并是非常困难的，Arrow[1]曾指出，在至少3个备选方案的情况下，由个人对方案的序数排序所得到的任何群体序数偏好都无法满足他所提出的5个基本条件. 效用归并必须经过成员间的偏好比较，若给定个人序数偏好排序而没有固定的参照物，则这种比较是无法实现的. 因此，Arrow 得出如下结论：社会排序是不可能的，除非施加外部力量或强制实施. Sen[2]也类似表明，只有在个人排序反映了偏好强度与成员间效用可比性时，才能对个人排序加以归并. 由于很难得出准确的成员效用函数及其比较关系，因而这类效用归并方法尽管在理论上得到了不少研究，但在实际应用中存在极大的局限.

在实际决策过程中，若决策人是理性的，则成员之间的效用比较可通过其决策行为隐含地体现出来. 一个决策成员无论在主观地还是客观地评价其他成员的效用时，往往是通过观察他们的实际选择与所表示出的满意程度而实现的. 一个理性的决策人，即使在客观上无法显式地表达他与其他成员之间的效用比较关系，他的实际行为也可以通过其理性的选择而充分体现出这一比较过程. 因而许多实际的群体决策方法往往巧妙地回避了显式效用归并，而利用一定的准则来达到谋求群体一致性的目的.

本文将用于个人多目标决策的 TOPSIS 方法[3]推广到群体决策情形，引入群体理想点概念，提出一种逼近群体理想点的多目标群体决策方法. 该方法的基本思想是使群体决策的解尽量接近所有决策人最理想的结论.

1 方法原理

设有 L 个决策人组成决策群体，记作 $M = \{M_1, M_2, \cdots, M_L\}$，备选方案集为 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，决策人利用属性函数 $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 来对各方案进行评价. 各决策人对 m 个属性的重视程度可以彼

---

[1] 方卫国：副教授，研究方向：系统工程与飞机设计综合决策. 通讯地址：北京航空航天大学飞机设计研究所. 邮编：100083.
本文1997年6月16日收到.

此不同，以 $W^l = (w_1^l, w_2^l, \cdots, w_m^l)^{\mathrm{T}}$ 表示决策人 M_l 赋予各属性的权重，其中

$$0 \leqslant w_j^l \leqslant 1, \sum_{j=1}^{m} w_j^l = 1 \quad j = 1,2,\cdots,m \quad l = 1,2,\cdots,L$$

各决策人的地位也可以不同，即存在权威性差异，以权向量 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_L)^{\mathrm{T}}$ 来表示各决策人的权威性权重，其中

$$0 \leqslant \alpha_l \leqslant 1 \quad l = 1,2,\cdots,L \quad \sum_{l=1}^{L} \alpha_l = 1$$

决策目标是要所有属性值尽量大，即

$$\max f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)) \quad x \in X$$

由各备选方案的属性值可以得到决策矩阵如下

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{属性 } 1 & \text{属性 } 2 & \cdots & \text{属性 } m \end{array} \\ \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_m(x_n) \end{bmatrix} \end{array} \tag{1}$$

由于决策矩阵中各属性值具有不同的衡量标准及度量单位，为便于统一处理，必须要对其进行规范化处理. 令

$$Z_{ij} = \frac{f_j(x_i)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} [f_j(x_k)]^2}} \quad i = 1,2,\cdots,n \quad j = 1,2,\cdots,m \tag{2}$$

称矩阵

$$G = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1m} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nm} \end{bmatrix} \tag{3}$$

为决策矩阵 A 的规范化矩阵. 矩阵 G 中的元素具有相同的度量标准，因而可以统一处理. 在规范化决策矩阵 G 中引入属性的不同重要程度权重，即可得到各决策人 M_l 的规范化加权决策矩阵. 记决策人的规范化加权决策矩阵为 G_w^l，

$$G_w^l = \begin{bmatrix} w_1^l z_{11} & w_2^l z_{12} & \cdots & w_m^l z_{1m} \\ w_1^l z_{21} & w_2^l z_{22} & \cdots & w_m^l z_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_1^l z_{n1} & w_2^l z_{n2} & \cdots & w_m^l z_{nm} \end{bmatrix} \quad l = 1,2,\cdots,L \tag{4}$$

定义 1　称向量 $(\max_i w_1^l z_{i1}, \max_i w_2^l z_{i2}, \cdots, \max_i w_m^l z_{im})^{\mathrm{T}}$ 为决策人 M_l 的理想目标点，称向量 $(\min_i w_1^l z_{i1}, \min_i w_2^l z_{i2}, \cdots, \min_i w_m^l z_{im})^{\mathrm{T}}$ 为决策人 M_l 的负理想目标点.

注意前面曾假设决策的目标是使所有属性值尽量大，即属性值越大决策人越满意. 如果存在某个属性 k，其值越小决策人越满意，则理想目标点向量中，第 k 项应为 $\min_i w_k^l z_{ik}$，而负理想目标点向量中的对应项为 $\max_i w_k^l z_{ik}$.

所谓理想目标点是一个设想的最好结果，它的所有属性值都达到各备选方案中相应属性的最好值. 而一个负理想目标点则是另一个设想的最坏结果. 逼近理想点的群决策方法的思想就是使决策结果尽量靠近理想目标点，而远离负理想目标点. 记决策人 M_l 的理想目标点为

$$I_l^* = (y_{l1}^*, y_{l2}^*, \cdots, y_{lm}^*)^{\mathrm{T}}$$

负理想目标点为

$$I_l^- = (y_{l1}^-, y_{l2}^-, \cdots, y_{lm}^-)^{\mathrm{T}}$$

为评价各备选方案与理想目标点和负理想目标点的接近程度，引入如下两个距离，即备选方案 x_i 到 I_l^+ 的距离 d_{il}^+ 与到 I_l^- 的距离 d_{il}^-.

$$d_{il}^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(w_j^l z_{ij} - y_{lj}^+)^2} \qquad i = 1,2,\cdots,n; l = 1,2,\cdots,L \tag{5}$$

$$d_{il}^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(w_j^l z_{ij} - y_{lj}^-)^2} \qquad i = 1,2,\cdots,n; l = 1,2,\cdots,L \tag{6}$$

在此基础上，可引入某一备选方案对理想目标点的相对接近度概念，并以此构成群体接近度矩阵.

定义 2 称 $c_l(x_i)$ 为备选方案 x_i 相对于决策人 M_l 理想点的接近度，其中

$$c_l(x_i) = d_{il}^- / (d_{il}^- + d_{il}^+) \quad i = 1,2,\cdots,n \quad l = 1,2,\cdots,L \tag{7}$$

称矩阵

$$C = \begin{bmatrix} c_1(x_1) & c_2(x_1) & \cdots & c_L(x_1) \\ c_1(x_2) & c_2(x_2) & \cdots & c_L(x_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_1(x_n) & c_2(x_n) & \cdots & c_L(x_n) \end{bmatrix} \tag{8}$$

为群体决策的相对接近度矩阵.

易知，$0 \leqslant c_l(x_i) \leqslant 1$，若 x_i 为决策人 M_l 的理想解，则有 $c_l(x_i) = 1$，若为 M_l 的负理想解，则有 $c_l(x_i) = 0$. 方案越接近理想解，远离负理想解，则 $c_l(x_i)$ 越大. 因此，群体决策的目标就是选出方案 $x^* \in X$，使得所有 $c_l(x^*)$，$l = 1,2,\cdots,L$ 均尽量大. 由于决策群体中各决策人地位及权威性不同，因而须对其进行加权处理，加权后的矩阵如下

$$C_w = \begin{bmatrix} \alpha_1 c_1(x_1) & \alpha_2 c_2(x_1) & \cdots & \alpha_L c_L(x_1) \\ \alpha_1 c_1(x_2) & \alpha_2 c_2(x_2) & \cdots & \alpha_L c_L(x_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_1 c_1(x_n) & \alpha_2 c_2(x_n) & \cdots & \alpha_L c_L(x_n) \end{bmatrix} \tag{9}$$

定义 3 称向量 $I_G^+ = (\max\limits_i \alpha_1 c_1(x_i), \max\limits_i \alpha_2 c_2(x_i), \cdots, \max\limits_i \alpha_L c_L(x_i))^T$ 为群体理想点，称向量 $I_G^- = (\min\limits_i \alpha_1 c_1(x_i), \min\limits_i \alpha_2 c_2(x_i), \cdots, \min\limits_i \alpha_L c_L(x_i))^T$ 为群体负理想点.

类似于前面，引入备选方案到群体理想点及群体负理想点的距离 d_{iG}^+ 与 d_{iG}^-.

$$d_{iG}^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{L}(\alpha_j c_j(x_i) - y_{Gj}^+)^2} \qquad y_{Gj}^+ = \max_i \alpha_j c_j(x_i) \tag{10}$$

$$d_{iG}^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{L}(\alpha_j c_j(x_i) - y_{Gj}^-)^2} \qquad y_{Gj}^- = \min_i \alpha_j c_j(x_i) \tag{11}$$

类似地有如下群体理想点接近度的概念.

定义 4 称 $c_G(x_i)$ 为备选方案 x_i 关于群体理想点的接近度，其中

$$c_G(x_i) = d_{iG}^- / (d_{iG}^- + d_{iG}^+) \tag{12}$$

显而易见，$c_G(x_i)$ 的值越大，方案 x_i 越接近群体理想方案、远离群体负理想方案. 当 $c_G(x_i) = 1$ 时，方案 x_i 就是群体理想方案，当 $c_G(x_i) = 0$ 时，方案 x_i 就是群体负理想方案. 以 $c_G(x_i)$ 作为排序准则，$c_G(x_i)$ 越大方案越优，便可得到群体对方案的排序.

综上所述，逼近群体理想点的群体决策方法的步骤如下：

(1) 根据决策问题列出决策矩阵 A，并对其进行规范化处理，得到规范化矩阵 G；

(2) 根据各决策人对属性的不同加权处理，得出各决策人的规范化加权决策矩阵 G_w^l，$l = 1,2,\cdots,L$；

(3) 根据各决策人的规范化加权决策矩阵，确定其理想目标点与负理想目标点，并根据式(5)、(6)、(7) 求得备选方案相对于各决策人理想点的接近度 $c_l(x_i)$，构成接近度矩阵 C；

(4) 对接近度矩阵 C 进行决策人权威性加权处理，得出矩阵 C_α；

(5) 根据 C_α 确定群体理想点与群体负理想点，并根据式(10)、(11)、(12)求出各备选方案关于群体理想点的接近度 $c_G(x_i)$；

(6) 根据 $c_G(x_i)$ 的大小对方案进行排序，若 $c_G(x_i) > c_G(x_j)$，则方案 x_i 优于方案 x_j.

2 算　例

设某一决策问题具有5个备选方案 $x_1 \sim x_5$，可利用5种不同属性对其进行评价，各方案相应的属性值如表1所示，其中属性1、3的值越小，方案越优，而属性2、4、5的值越大，方案越优.

表1　方案—属性表

方案	属性1	属性2	属性3	属性4	属性5
x_1	3	100	10	7	7
x_2	2.5	80	6	3	4
x_3	1.8	50	20	5	9
x_4	2.2	70	12	5	7
x_5	1.6	40	8	4	3

决策群体由4人组成，其权威性权重向量为 $\alpha = (0.4, 0.3, 0.15, 0.15)^{\mathrm{T}}$. 各决策人对方案属性的加权如下：

$$W^1 = (0.25, 0.15, 0.4, 0.1, 0.1)^{\mathrm{T}} \qquad W^2 = (0.2, 0.35, 0.3, 0.05, 0.1)^{\mathrm{T}}$$

$$W^3 = (0.5, 0.3, 0.1, 0.05, 0.05)^{\mathrm{T}} \qquad W^4 = (0.4, 0.1, 0.3, 0.1, 0.1)^{\mathrm{T}}$$

由表1易得决策矩阵 A. 对 A 中元素进行规范化处理，可得规范化矩阵 G

$$G = \begin{bmatrix} 0.590 & 0.628 & 0.367 & 0.629 & 0.490 \\ 0.491 & 0.502 & 0.220 & 0.269 & 0.280 \\ 0.354 & 0.314 & 0.733 & 0.449 & 0.630 \\ 0.432 & 0.439 & 0.440 & 0.449 & 0.490 \\ 0.315 & 0.251 & 0.293 & 0.359 & 0.210 \end{bmatrix}$$

由此可得各决策人的规范化加权决策矩阵分别为

$$G_\alpha^1 = \begin{bmatrix} 0.147 & 0.094 & 0.147 & 0.063 & 0.049 \\ 0.123 & 0.075 & 0.088 & 0.027 & 0.028 \\ 0.089 & 0.047 & 0.293 & 0.045 & 0.063 \\ 0.108 & 0.066 & 0.176 & 0.045 & 0.049 \\ 0.079 & 0.038 & 0.117 & 0.036 & 0.021 \end{bmatrix} \quad G_\alpha^2 = \begin{bmatrix} 0.118 & 0.220 & 0.110 & 0.031 & 0.049 \\ 0.098 & 0.176 & 0.066 & 0.014 & 0.028 \\ 0.071 & 0.110 & 0.220 & 0.023 & 0.063 \\ 0.087 & 0.154 & 0.132 & 0.023 & 0.049 \\ 0.063 & 0.088 & 0.088 & 0.018 & 0.021 \end{bmatrix}$$

$$G_\alpha^3 = \begin{bmatrix} 0.295 & 0.188 & 0.037 & 0.031 & 0.025 \\ 0.246 & 0.151 & 0.022 & 0.014 & 0.014 \\ 0.177 & 0.094 & 0.073 & 0.023 & 0.032 \\ 0.216 & 0.132 & 0.044 & 0.023 & 0.025 \\ 0.157 & 0.075 & 0.029 & 0.018 & 0.011 \end{bmatrix} \quad G_\alpha^4 = \begin{bmatrix} 0.236 & 0.063 & 0.110 & 0.063 & 0.049 \\ 0.197 & 0.050 & 0.066 & 0.027 & 0.028 \\ 0.142 & 0.031 & 0.220 & 0.045 & 0.063 \\ 0.173 & 0.044 & 0.132 & 0.045 & 0.049 \\ 0.126 & 0.025 & 0.088 & 0.036 & 0.021 \end{bmatrix}$$

由于属性1、3的值越小，属性2、4、5的值越大，方案越优，故容易得出各决策人的理想目标点和负理想目标点如下：

$$I_1^+ = (0.079, 0.094, 0.088, 0.063, 0.063)^{\mathrm{T}} \qquad I_1^- = (0.147, 0.038, 0.293, 0.027, 0.021)^{\mathrm{T}}$$

$$I_2^+ = (0.063, 0.220, 0.066, 0.031, 0.063)^{\mathrm{T}} \qquad I_2^- = (0.118, 0.088, 0.220, 0.014, 0.021)^{\mathrm{T}}$$

$$I_3^+ = (0.157, 0.188, 0.022, 0.031, 0.032)^{\mathrm{T}} \qquad I_3^- = (0.295, 0.075, 0.073, 0.014, 0.011)^{\mathrm{T}}$$

$$I_4^+ = (0.126, 0.063, 0.066, 0.063, 0.063)^{\mathrm{T}} \qquad I_4^- = (0.236, 0.025, 0.220, 0.027, 0.021)^{\mathrm{T}}$$

由式(5)～(9)可求得相对接近度矩阵 C 及其加权矩阵 C_α.

$$C=\begin{bmatrix}0.642 & 0.709 & 0.466 & 0.512\\ 0.752 & 0.722 & 0.511 & 0.648\\ 0.262 & 0.262 & 0.526 & 0.398\\ 0.569 & 0.547 & 0.546 & 0.570\\ 0.701 & 0.504 & 0.555 & 0.722\end{bmatrix} \quad C_r=\begin{bmatrix}0.257 & 0.213 & 0.070 & 0.077\\ 0.301 & 0.217 & 0.077 & 0.097\\ 0.105 & 0.079 & 0.079 & 0.060\\ 0.227 & 0.164 & 0.082 & 0.086\\ 0.280 & 0.151 & 0.083 & 0.108\end{bmatrix}$$

易得群体理想点与负理想点为

$$I_G^* = (0.301, 0.217, 0.083, 0.108)^T \qquad I_G^- = (0.105, 0.079, 0.070, 0.060)^T$$

由式(10)～(12)求得各方案关于群体理想点的接近度如下

$$c_G(x_1) = 0.784 \quad c_G(x_2) = 0.950 \quad c_G(x_3) = 0.036 \quad c_G(x_4) = 0.621 \quad c_G(x_5) = 0.742$$

以 $c_G(x_i)$ 的值为准则，可得备选方案最终排序为

$$x_2 > x_1 > x_5 > x_4 > x_3$$

3 结束语

本文提出的逼近群体理想点的多目标群体决策方法，是传统的个人多目标决策 TOPSIS 方法在群体条件下的扩展. 该方法用群体理想点取代群体效用，回避了群体效用归并这一困难问题. 其基本思想是使群体决策的结论尽量接近所有决策成员最理想的结论，并考虑了群体成员不同权威程度对群体决策结论的影响. 通过一个算例来说明该方法的具体应用，算例表明该方法可操作性强，且易于在计算机上实现，因而有较大的实用价值.

参考文献

1 Arrow K J. Social choice and individual values. Yale University, New Haven, 1963

2 Sen A K. Collective choice and social welfare. Holden-Day, San Francisco, CA, 1970

3 Hwang C L, Yoon K. Multiple attributes decision making methods and applications. Berlin: Springer-Verlag, 1981

A Kind of Multi-objective Group Decision-making Method Marching on Group Ideal Point

Fang Weiguo

Institute of Aircraft Design, Beijing University of Aeronautics and Astronautics

Zhou Hong

School of Management, Beijing University of Aeronautics and Astronautics

Abstract The TOPSIS method for individual multi-objective decision-making is generalized to group decision-making. The concept of group ideal point is introduced, with which the group utility is substituted. Based on the idea that the conclusion of group decision-making should approximate to the ideal conclusions of all decision-making members, a kind of multi-objective group decision-making method marching on group ideal point is proposed, and an example is presented to illustrate the application of the method.

Keywords: group decision-making, multi-objective decision-making, group ideal point