

③

15-19, 43

管理科学: 面对复杂性 II

——经济时序动力系统分形及混沌特性分析研究^①

盛昭瀚^② 马军海[✓] 陈国华

C931.1

(东南大学管理学院系统所)

【摘要】给出了根据经济时序动力系统实测数据的分形及混沌特性关联维数的统计估计, 嵌入维数与分维数及计算中研究与计算程序, 并建议了嵌入维数及计算点数的选出方法, 算例表明本文建议的方法是有效的。

关键词: 非线性, 混沌经济时序, 分形
分类号: C931.1

管理科学

0 引言

在实际经济管理问题生活中, 常表现出包括混沌在内的各种复杂现象与行为, 这种现象与行为若采用传统的统计学的方法处理, 往往难以得到令人满意的结果, 而若采用混沌的方法处理则非常有效, 国外学者在相位随机化方法——判定时序的随机与混沌特性, 判值的计算方法, 分形, Lyapunov 指数, 噪声去除, 本征值分解, 相空间重构, 混沌建模及预测方面都做了不少工作, 文献[1~5]已形成了一套初步的方法与理论, 但许多工作还不完善, 而如何将这些方法在管理科学领域实用化, 文献[1]做了有意义的探索工作, 本文在此基础上给出了根据经济时序动力系统实测数据的分形及混沌特性关联维数的统计估计, 嵌入维数与分维数的研究, 并建议了嵌入维数的选出方法, 算例表明本文建议的方法是有效的。

1 分形维数的统计估计

奇怪吸引子的结构具有分形现象, 常用分维值来定量表示, 分维值指出了动力系统的有效自由度, 从而揭示了奇怪吸引子的复杂程度, 分维的定义有很多种, 而且不同的定义其最终值也稍有差别, 经过近几年的研究, 常用的较多的分维主要有 Hausdorff 维数 D_H , 计盒维数 D_B , 信息维数 D_I , 关联维数 D_2 , 广义维数 D_q ,

$$\text{令 } V_r = [x_t, x_{t+\tau}, x_{t-2\tau}, \dots, x_{t+(m-1)\tau}] \quad (1)$$

其中 $V_r \in \mathcal{X}^m$.

目前, 广泛采用 G-P 算法计算关联维数, 由于动力系统实测数据间不可避免地存在着数据之间的自相关性, 为了减少或基本根除由于数据间的自相关性所造成的影响, $C(r, N, \tau)$ 常采用式(2)

$$C(r, N, \tau) = \frac{2}{(N - \tau + 1)(N - \tau)} \sum_{N=\tau}^N \sum_{i=1}^{N-n} H(r - |V_{i+\tau} - V_i|) \quad (2)$$

① 高校博士点基金资助项目(97028604)。

② 盛昭瀚: 教授, 博士生导师, 通讯地址: 东南大学管理学院系统所, 邮编: 210096。
本文 1998 年 5 月 10 日收到。

H 为 Heaviside 函数, 这里要求 W 应满足条件

$$W \geq \tau \left(\frac{2}{N} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (3)$$

τ 为时序之间的时间间隔, m 为嵌入维数, 采用时序的关联维数为

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{d[\log_2 C(r, N, W)]/dr}{d[\log_2(r)]/dr} \quad (4)$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{N \rightarrow \infty} C(r, N, W) = F(r)$, $F(r)$ 表示数据集中点 x_i 和 x_j 距离的分布函数.

$$F(r) = p\{|x_i - x_j| < r\}, d_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln F(r)}{\ln r} \quad (5)$$

由式(5) $F(r)$ 可写为

$$F(r) = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{d_2}, 0 < r \leq r_0 \quad (6)$$

取样本中 M 个独立的距离字样为 r_1, r_2, \dots, r_M , 采用极大似然函数估计动力系统实测数据的维数 d_2 , 由式(6), 其概率密度为

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d_2 x^{d_2-1}}{r_0^{d_2}} \quad 0 < x \leq r_0 \quad (7)$$

取似然函数为

$$L = \prod_{i=1}^M f(r_i) \quad (8)$$

则 d_2 的极大似然估计为

$$\hat{d}_2 = \left[\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \ln \left(\frac{r_0}{r_j} \right) \right]^{-1} \quad 0 < r_j \leq r_0 \quad (9)$$

由式(9)得 d_2 的方差为

$$\text{Var}(\hat{d}_2) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln f(X, d_2)}{\partial d_2^2} \right] = \frac{d_2^2}{M} \quad (10)$$

由于实际问题中 N 的取值不可能无穷大而要受到诸多的限制, 取 $r_i = |x_i - x_j|$, 则式(9) d_2 的极大似然估计为

$$\hat{d}_2 = \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N w_i \left(\frac{r_0}{r_i} \right) \right]^{-1} \quad (11)$$

式中 $w_i = H(r_0 - r_i)$ 和 $L = \sum_{i=1}^N w_i$

由式(9)知 $\text{Var}(\hat{d}_2)$ 与所取的样本的个数成反比, 实际问题中适当的取样本大一些可减少 $\text{Var}(\hat{d}_2)$, 以便使 d_2 的估计值更准确.

2 嵌入维数与分维数关系分析研究

根据式(2)及最小二乘估计可得到分维的近似估计公式

$$D_2(m) = \frac{l \sum_{i=1}^l \log_2(r_i) \log_2 C_m(r_i) - \sum_{i=1}^l \log_2(r_i) \sum_{i=1}^l \log_2 C_m(r_i)}{l \sum_{i=1}^l (\log_2(r_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^l \log_2(r_i) \right)^2} \quad (12)$$

根据嵌入定理, 假设向量 $Y_{i+\tau}(m)$ 满足式(13)

$$Y_{i+\tau}(m) = (y_{i,1}, y_{i,2}, y_{i,3}, \dots, y_{i,m}) = g(Y_i(m)) \quad (13)$$

$$\text{即 } \begin{cases} y_{i+r,1} = y_{i,2} \\ y_{i+r,2} = y_{i,3} \\ \vdots \\ y_{i+r,q} = y_{i,q+1} = \varphi(y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,q}) \\ \vdots \\ y_{i+r,m-1} = y_{i,m} = \varphi(y_{i,q-q}, y_{i,m-q+1}, \dots, y_{i,m-1}) \\ y_{i+r,m} = \varphi(y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,m}) \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{定义 } S_{i,k}(r) = \sum_{i=1, i \neq k}^M H_r^- [|Y_i(k) - Y_j(k)|]$$

$$k \text{ 为嵌入维数,且满足 } (q \leq k \leq m) \quad (15)$$

根据文献[5]的证明,可定义两向量 $Y_i(k)$ 及 $Y_j(k)$ 之间的距离为 ∞ 范数

$$|Y_i(k) - Y_j(k)| = \max_{1 \leq \sigma \leq k} |y_{i,\sigma} - y_{j,\sigma}| \quad (16)$$

$$\text{这样有 } \max_j \max_{\sigma} |y_{i,\sigma} - y_{j,\sigma}| \sim r \quad (17)$$

由于 r 很小,可将 $y_{i,k+1}$ 在 $y_{i,k+1}$ 附近展成 Taylor 级数

$$y_{i,k+1} = \varphi(y_{i,k-q+1}, y_{i,k-q+2}, \dots, y_{i,k}) = \varphi(y_{i,k-q+1}, y_{i,k-q+2}, \dots, y_{i,k}) + \frac{\partial \varphi}{\partial y_{i,k-q+1}} (y_{i,k-q+1} - y_{j,k-q+1}) + \frac{\partial \varphi}{\partial y_{i,k-q+2}} (y_{i,k-q+2} - y_{j,k-q+2}) + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial y_{i,k}} (y_{i,k} - y_{j,k}) \quad (18)$$

由式(18)可得

$$\begin{aligned} |y_{i,k+1} - y_{j,k+1}| &\approx \\ &\left| \frac{\partial \varphi}{\partial y_{i,k-q+1}} (y_{i,k-q+1} - y_{j,k-q+1}) + \frac{\partial \varphi}{\partial y_{i,k-q+2}} (y_{i,k-q+2} - y_{j,k-q+2}) + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial y_{i,k}} (y_{i,k} - y_{j,k}) \right| \leq \\ &\left| \frac{\partial \varphi}{\partial y_{i,k-q+1}} (y_{i,k-q+1} - y_{j,k-q+1}) \right| + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y_{i,k-q+2}} (y_{i,k-q+2} - y_{j,k-q+2}) \right| + \dots + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y_{i,k}} (y_{i,k} - y_{j,k}) \right| \quad (19) \end{aligned}$$

由于 $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial y_{i,k-q+1}} \right|, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y_{i,k-q+2}} \right|, \dots, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y_{i,k}} \right|$ 依赖于 $Y_j(k)$, 且对所有的 $Y_j(k)$ 其均连续,所以式(19)均为定值.应用式(17)得到

$$\max_j |y_{i,k+1} - y_{j,k+1}| \sim r \quad (20)$$

对于一定的嵌入维数 k 和固定的滞迟时间 τ , 则向量 $Y_i(k)$ 的个数 $M = N - (k-1)\tau = N$, 这样便有 $S_{i,k}(r) \sim S_{i,k+1}(r) \propto r^{d_2}$; 换句话说, 向量 r 半径附近的向量个数 $Y_i(k+1)$ 和 $Y_i(k)$ 相同. 这样便有 $C_i(r) \sim C_{i+1}(r) \propto r^{d_2}$. 类似可推得 $C_q(r) \sim C_{q+1}(r) \sim \dots \sim C_m(r) \propto r^{d_2}$, 这样便可以得到嵌入维数与分维数之间的关系式

$$D_2(q) \approx D_2(q+1) \approx \dots \approx \dots \approx D_2(m) \approx d_2 \quad (21)$$

既计算 D_2 时略去噪声影响, 只要取最少的嵌入维数大于或等于分维数, 从理论上不会对 D_2 产生影响.

3 计算结果

取如下 3 组数据分别对其理论进行研究:

1) 对 Logistic map $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$, 取 $\lambda = 4$ 标准混沌的情况, 前 1 000 点作为暂态点去掉, 把后 10 000 点作为 1) 组原始数据点.

2) 取 Henon map $\begin{cases} x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = \beta x_n \end{cases} \quad \alpha = 1.4, \beta = 0.3$ 标准混沌的情况 10 000, 前 1 000 点作为暂态点去掉, 把后 10 000 点作为 2) 组原始数据点.

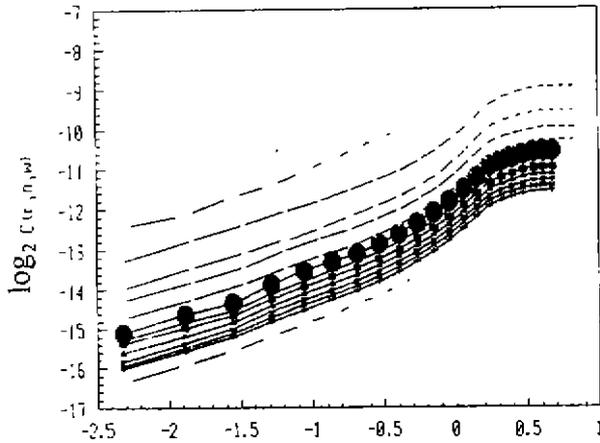


图 1 第 1 组数据的维数图,至上而下分别为 500 点,1000 点,1500 点,2000 点,2500 点,3000 点,4000 点,5000 点,6000 点,7000 点,8000 点,9000 点,10000 点

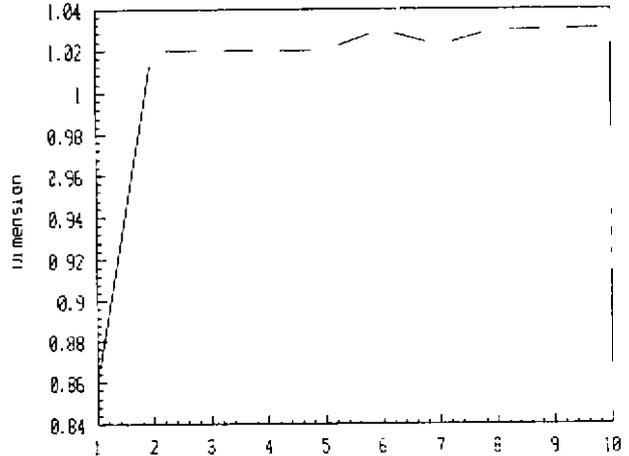


图 2 第 1 组数据的嵌入维数与分维数之间关系图

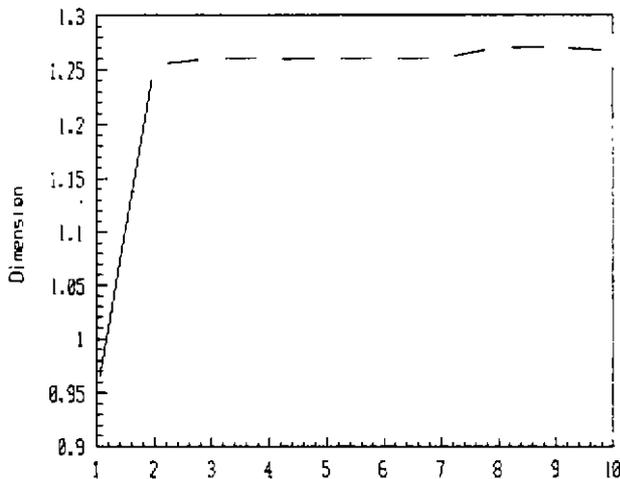


图 3 第 2 组数据的嵌入维数与分维数之间关系图

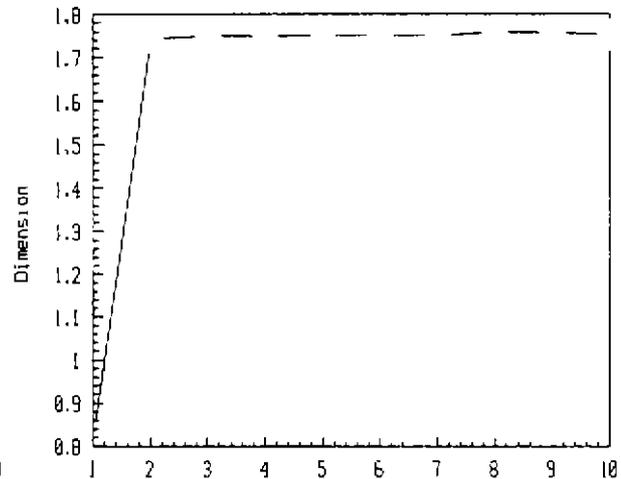


图 4 第 3 组数据的嵌入维数与分维数之间关系图

3) 用所得到的混沌经济数据测定 3225 点作为实验数据,其时间历程图如图 5,其相图如图 2. 按照文中理论编制的计算维数的程序对(1)组数据 logistic 映射 10000 点进行研究,其维数图 [$\log_2 C(r, N, w)$ 图] 如图 1,至上而下分别为 500 点,1000 点,1500 点,2000 点,2500 点,3000 点,4000 点,5000 点,6000 点,7000 点,8000 点,9000 点,10000 点.

从理论上分析可知,①②③ 组数据的最小嵌入维数都是 2,图 2,图 3,图 4 分别对嵌入维数 $m = 1, m = 2, m = 3, m = 4, m = 5, m = 6, m = 7, m = 8, m = 9, m = 10$ 嵌入维数进行了计算. 计算结果表明:在计算关联维数时,只要取得大于最小嵌入维数的嵌入维数,计算得到的关联维数基本上是相同的,这一结果与所得到的结果是一致的.

从以上的计算可以看出,一维以上、二维以下计算其维数时取 2000 点以上,其维数比较真实.

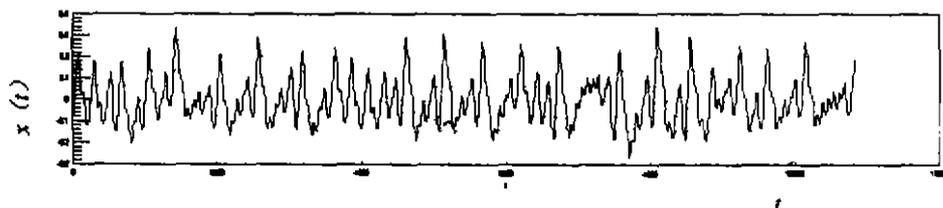


图5 第3组数据的时间历程图

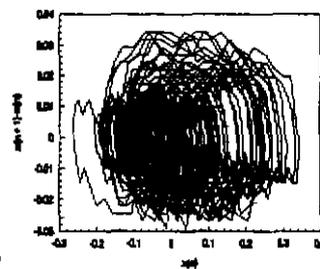


图6 第3组数据的相图

4 结 论

(1) 本文从理论上和实际计算中得到,只要所取得嵌入维数大于混沌时序的实际维数,则其对分维数无质的影响.

(2) 分维数的计算时 2 范数, 3 范数, ... 等价于 ∞ 范数, 这样在具体计算时可取在算法上易实现的范数.

(3) 从计算结果来看, 本文的算法是切实可行的.

参 考 文 献

- 1 盛昭瀚, 马军海. 管理科学: 面对复杂性——混沌时序经济动力系统重构技术. 管理科学学报, 1998; 1(1): 31~42
- 2 马军海. 混沌时序动力系统非线性重构. 天津大学博士学位论文, 1997
- 3 马军海, 陈予恕, 刘曾荣. 动力系统实测数据的非线性混沌特性的判定. 应用数学和力学, 1998; (6): 481~488
- 4 Broomhead D S, King G P. Extracting qualitative dynamics from experimental data. Phys. 1987; (D20): 217~236
- 5 Mees A I, Rapp P E, Jennings L S. Singular-value decomposition and embedding dimension. Phys. Rev. A. 1987; 36: 340
- 6 Theiler J. Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time series data. Phys. Rev., 1986; (A34): 2427~2432
- 7 Cabrera J Luis, Javier F. Numerical analysis of transient behavior in the discrete random logistic equation with delay. Phys. Lett., 1995; (A197): 19~24
- 8 Kostelich E J. Problems in estimating dynamics from data. Phys., 1992; (D58): 138~152
- 9 Schiff S J, Chang T. Information transport in temporal systems. Phys. Rev. Lett., 1992; 378~393
- 10 Grassberger P. Finite sample corrections to entropy and dimension estimates. Phys. Lett., 1988; (A125): 369~373
- 11 Theiler J. Some comments on the correlation dimension of noise. Phys. Lett., 1991; (A155): 480~493
- 12 Timonen J, Koskinen H. An improved estimator of dimension and some comments on providing confidence intervals. Geophys. Res. Lett., 1993; (20): 1527~1536
- 13 Ma Junhai, Chen Yushu, Liu Zengrong. Threshold values for diagnosis of chaotic nature of the data obtained in nonlinear dynamic analysis. Applied Mathematics and Mechanics, 1998, 19(6): 513~520

企业专家组对产品设计方案的群评价上去,在不 续修正与完善.
 同的实际环境中使用这个法则,还需在运行中继

参 考 文 献

- 1 陈珽. 决策分析. 北京: 科学出版社, 1987
- 2 王宗军. 综合评价的方法、问题及其研究趋势. 管理科学学报, 1998, 1(1): 73~79
- 3 Eschenauer. Koki. Osycake. Multicriteria design optimization. Springer, 1990
- 4 Steuer R E. Multiple criteria optimization: theory, computation and application. John Wiley & Sons, Inc. 1986

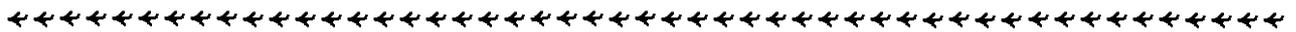
A Study of Series Group Evaluation Criteria

Zheng Yingwen

Institute of Automation, Fuzhou University

Abstract A model of series group evaluation systems is established. An evaluation criterion with minimal variance, the recurrence adjustment approximation, is presented. Some evaluation criteria are analysed, and their simulation results are compared.

Keywords: group evaluation, minimal variance, recurrence adjustment



(上接第19页)

Management Science to Face with Complicated Problems II — Study on Some Problems About Fractal and Chaotic of the Economic Dynamical Time Series

Sheng Zhaohan, Ma Junhai, Chen Guohua

Institute of Systems Engineering, Southeast University

Abstract The paper presents a new method about statistic estimation. The relationship about embedding dimension are studied carefully. According to the theory the concrete paradigm, as well as the selected method of calculating length of the economic time series were proposed. The proposed method in this paper was proved by calculating examples to be effective.

Keywords: nonlinear, statistic estimation, chaotic economic timeseries, fractal