第3卷第3期
2000年 9 月

管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA

Vol. 3 No. 3
Sep., 2000

(9) 60-64

基于鲁棒控制的期权定价方法[①]

F830
F224

郑立辉
(同济大学经济与管理学院，上海 200092)

摘要：首先从经济学的行为分析出发，在鲁棒控制的框架下给出了期权卖价、买价和公平价格的严格定义．然后通过求解微分对策，得到了定价模型值函数的封闭解．最后给出了期权价格及其对冲策略的显式表达式，并比较了这种期权定价方法与随机方法的优缺点．

关键词：期权定价；鲁棒控制；微分对策

金融数学论

中图分类号：F224　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007-9807(2000)03-0060-05

0 引 言

期权定价理论是西方现代金融理论的基础之一，它集中体现了金融理论的许多核心问题，其方法又可以直接应用于财务管理、资产评估和风险管理等领域，因此一直是学术界普遍关注的热点问题之一[1]．期权定价问题在一定的市场假设条件下，为期权合同寻找一个买卖双方都可接受的价格．目前的期权定价方法基本上是在随机分析的框架下进行的，有关文献见文[2～4]等．

一般来说，不确定性建模的方法有两种：随机方法和极大极小优化或最差情况设计(worst-case design)．自从80年代初以来，控制理论界一直在努力研究最差情况设计方法在控制系统设计中的应用，并取得了巨大进展[5,6]．由于最差情况设计可以降低控制系统关于建模误差的敏感性，使系统具有良好的容错性能，因此又被称为鲁棒控制(robust control)．对期权定价问题进行鲁棒性分析的研究始于文[7]，该文献针对不确定的股票波动率给出了定价公式．在这一方向上的最新成果还有文[8]和文[9]．文献[10]首先用鲁棒控制理论的观点研究了期权定价问题，并得到了Black-Scholes 公式．本文则从经济学的角度出发，在鲁棒控制的框架下对更广泛的一类或有债权(contingent claims)的定价问题进行严格描述，丰富了文[10]的研究结果．把鲁棒控制方法应用到金融工程研究的文献还有文[11～13]等．

1 期权定价的微分对策模型

期权是一种金融合同，它规定其持有者有权在某一确定时间以某一确定价格购买或出售某种标的资产．为了给期权确定出合理的价格，首先应该求出该期权的一个套期保值策略，即无论标的资产如何变化，该策略都能抵补掉期权的风险．这样就可以根据期权的套期保值成本来确定它的价格了．或有债权是包括期权在内的更广泛的一类衍生证券．本文将在如下标准的假设条件下研究欧式或有债权的套期保值与定价问题：

(H1) 金融市场是无摩擦的，即不考虑交易费用和税收的影响；

(H2) 允许投资者进行卖空交易；

(H3) 市场中存在一种被称为银行存款的无风险资产．

1.1 Knight 不确定性下的套期保值问题

考虑在 T 时刻到期的欧式或有债权．用 $x(t)$ 表示期权标的资产在时刻 t 的价格，并假定它服从如下微分方程

---

① 收稿日期：1999-03-19；修订日期：2000-03-20．
基金项目：上海市教育委员会曙光计划和中国博士后科学研究基金资助项目．
作者简介：郑立辉(1968-)，男，吉林昌图人，博士，副教授．

$$\dot{x}(t) = \alpha \cdot x(t) + \beta \cdot x(t) w(t) \quad (1)$$

式中 $\alpha > 0$ 表示股票瞬时收益率 $\dot{x}(t)/x(t)$ 的确定性部分，$\beta > 0$ 表示收益率不确定部分的幅度，而函数 $w(t) \in [-1,1]$ 表示不确定噪声运动的方式. 令 r 表示无风险利率，则无风险资产的价值 $b(t)$ 服从微分方程

$$\dot{b}(t) = r \cdot b(t)$$

在 Black-Scholes 期权定价理论中描述股票价格运动的模型是几何布朗运动. 本文使用的有界不确定性模型与几何布朗运动模型具有相同的结构，只是这里用有界噪声代替了标准维纳过程. 象模型(1)中的 $w(t)$ 那样，其概率分布不受任何限制的不确定性在经济学中被称为 Knight 不确定性[14]. 研究具有 Knight 不确定性的期权定价问题有如下两个原因：一个是金融市场经常受到政治、经济和社会等环境因素的影响而不满足稳态假设，此时股票价格一般不服从几何布朗运动；另一个原因是 Knight 不确定性可以包含建模误差等非线性因素，如果把这些因素当作维纳过程来处理，将会造成较大的偏差.

考虑一个由标的资产和无风险资产构成的动态自融资证券组合(self-financing portfolio). 用 $y(t)$ 表示证券组合在时刻 t 的值，$\pi(t)$ 表示其中标的资产所占的份额，则证券组合由价值为 $\pi(t)y(t)$ 的标的资产和价值为 $[1-\pi(t)]y(t)$ 的无风险资产构成. 证券组合的价值遵循如下微分方程

$$\dot{y}(t) = ry(t) + (\alpha - r)\pi(t)y(t) + \beta y(t)\pi(t)w(t) \quad (2)$$

下面研究 Knight 不确定性下期权的套期保值问题. 假设投资者是风险厌恶的. 由于投资者不知道股票价格的扰动噪声的概率分布，他们针对最差的不确定状态进行决策. 用 $g(x)$ 表示或有债权的损益函数，令 $R^- = [0,\infty)$. 定义函数

$$\gamma(t_0, x_0, y_0; \pi(\cdot), w(\cdot)) = y(T) - g[x(T)] \quad (3)$$

它表示套期保值证券组合的终端价值与期权损益的差值. 式中 $t_0 \in [0,T]$ 表示初始时刻，$x_0 \in R^+$ 表示标的资产的初始价格，$y_0 \in R$ 表示证券组合的初值.

下面用"二人零和微分对策"来描述期权的套期保值问题. 假设证券组合的控制变量 $\pi(t)$ 和不确定扰动量 $w(t)$ 分别由相互冲突的博弈者——套期保值者和敌对的环境来控制，前者使目标泛函(3)极大化，后者使目标泛函极小化. 通过研究此微分对策，不仅可以得到使最差的套期保值效果达到最优的投资策略，而且可以给出期权的合理价格.

1.2 期权定价问题的微分对策模型

在正式给出期权价格的定义之前，先引入微分对策的相关概念. 对于任意 $t \in [0,T]$，令 $\pi(t) \in \Pi$. 根据微分对策理论[15]，套期保值者的策略可以定义为函数 $U(t,x): [0,T] \times R^+ \to \Pi$，使之对于任意 $t \in [0,T]$ 满足 $\pi(t) = U[t, x(t)]$. 同理，敌对环境的策略定义为函数 $V(t,x): [0,T] \times R^+ \to [-1,1]$，使之对于任意 $t \in [0,T]$ 满足 $w(t) = V[t, x(t)]$. 微分对策(1)－(3)的下值定义为

$$\Gamma_1(t_0, x_0, y_0) = \max_U \min_V \gamma(t_0, x_0, y_0; U, V)$$

上值定义为

$$\Gamma_2(t_0, x_0, y_0) = \min_V \max_U \gamma(t_0, x_0, y_0; U, V)$$

由微分对策理论知道，下值和上值恒满足 $\Gamma_1 \leqslant \Gamma_2$，并且当且仅当等式成立时，微分对策的值 $\Gamma(t_0, x_0, y_0)$ 存在，此时

$$\Gamma(t_0, x_0, y_0) = \Gamma_1(t_0, x_0, y_0) = \Gamma_2(t_0, x_0, y_0) \quad (4)$$

下面用微分对策的这些概念给出衍生证券价格的定义. 一般来说，期权的买方和卖方对期权价格有不同的看法：卖方希望期权的价格足够高，以便他们可以用这笔期权费构造一个套期保值证券组合，来抵补掉期权义务给他们带来的全部风险；另一方面，期权的买方希望期权的价格足够低，以致于在这种价格下期权卖方不能获得无风险的超额利润，否则期权买方宁愿自己构造套期保值策略，而不愿购买期权. 这些期权价格可以用微分对策的值函数来定义.

定义 1 对于任意时刻 t 和标的资产价格 x，或有债权的卖价和买价分别定义为集合 $P_w(t,x)$ 和 $P_b(t,x)$ 中的元素

$$P_w(t,x) = \{y: \Gamma_1(t,x,y) \geqslant 0\}$$

$$P_b(t,x) = \{y: \Gamma_2(t,x,y) \leqslant 0\}$$

或有债权的公平价格定义为如下集合中的元素

$$P_f(t,x) = P_w(t,x) \cap P_b(t,x)$$

由定义 1 知，对于任意时刻 t 和股票价格 x、当且仅当存在 y，使不等式

$$0 \leqslant \Gamma_1(t,x,y) \leqslant \Gamma_2(t,x,y) \leqslant 0$$

成立时，期权才存在公平价格. 因此有如下重要结论.

定理 1　对于任意时刻 t 和标的资产价格 x，当且仅当微分对策(1)－(3)在点 (t,x,y) 具有零值，即 $\Gamma(t,x,y)=0$ 时，证券组合的初值 y 是或有债权的公平价格.

2　微分对策的解

本节根据微分对策理论推导微分对策值函数所满足的 Isaacs 方程，并求出其封闭解. 这些结果将在下一节中被用来求解期权的价格及其抵补策略.

2.1　微分对策值函数满足的 Isaacs 方程

令 $D=[0,T]\times R^+\times R$. 对于任意 $(s_1,s_2)\in R^2$ 和 $(t,x,y)\in D$，定义

$$H(t,x,\dot{y};\pi,w)=s_1(\alpha x+\beta xw)+s_2[ry+(\alpha-r)y\pi+\beta y\pi w]$$

根据微分对策理论[15]，微分对策存在值函数的条件是所谓的 Isaacs 条件成立. 对于微分对策(1)－(3)有

$$\begin{aligned}
&\max_{\pi\in\prod}\min_{w\in[-1,1]} H(t,x,y;\pi,w)\\
&=\max_{\pi\in\prod}\min_{w\in[-1,1]}\{s_2\beta y\pi+s_1\beta xw+\\
&\qquad s_2(\alpha-r)y\pi+(s_1\alpha x+s_2ry)\}\\
&=\max_{\pi\in\prod}\min_{w\in[-1,1]}\{s_2\beta y(\pi+s_1x/s_2y)(w+\\
&\qquad (\alpha-r)/\beta)\}+r(s_1x+s_2y)\\
&=r(s_1x+s_2y)\\
&=\min_{w\in[-1,1]}\max_{\pi\in\prod} H(t,x,\dot{y};\pi,w)
\end{aligned}$$

式中第 4 行成立的前提是取

$$\pi=-s_1x/s_2y,\qquad w=-(\alpha-r)/\beta \tag{5}$$

可见 Isaacs 条件对于微分对策(1)－(3)成立. 因此有如下结果.

定理 2　假设期权的标的资产价格满足条件(I). 那么 1.1 节中的微分对策存在唯一的值函数. 同时，该值函数是如下 Cauchy 问题的解

$$\begin{aligned}
&u_t+r(x\cdot u_x+y\cdot u_y)=0\\
&u(T,x,y)=y-g(x)
\end{aligned} \tag{6}$$

式中的下标表示 u 关于相应变量的偏导数.

2.2　Isaacs 方程的解

下面运用偏微分方程的古典特征解法来分段地求解偏微分方程(6). 假设或有债权的损益函数 $g(x)$ 在 $L_i\subset R^+$ 上连续可微，$(i\in I)$，其中 L_i 满足

$$\cup_{i\in I}L_i=R^+,\quad L_i\cap L_j=\varnothing,\quad \text{if } i\neq j.$$

定义

$$N_i=\{(t,x,y)\in D: xe^{r(T-t)}\in L_i\}\qquad i\in I \tag{7}$$

偏微分方程(6)的特征系统由如下方程组给出

$$\dot{t}(\lambda)-1=0,\dot{x}(\lambda)-rx(\lambda)=0,$$
$$\dot{y}(\lambda)-ry(\lambda)=0$$

对于任意初始点 $(t,x,y)\in N_i$，特征系统的解为

$$t(\lambda)=\lambda+t,\ x(\lambda)=xe^{r\lambda},\ y(\lambda)=ye^{r\lambda}$$

运用古典特征方法可得

$$\begin{aligned}
u_i(t,x,y)&=u_i[T,xe^{r(T-t)},ye^{(T-t)}]\\
&=ye^{r(T-t)}-g[xe^{r(T-t)}]
\end{aligned}$$

现把这一结果叙述如下.

定理 3　假设期权合约的损益函数 $g(x)$ 在 L_i 上连续可微，集合 N_i 由式(7)定义，那么函数

$$u_i(t,x,y)=ye^{r(T-t)}-g[xe^{r(T-t)}],\quad (t,x,y)\in N_i,\ i\in I$$

是偏微分方程(6)在 N_i 上的连续可微解.

3　期权价格和套期保值策略

本节运用上一节的结果推导期权价格及其套期保值策略的显式表达式，并且比较这种定价方法与期权定价的随机方法的优缺点.

由定理 1 知道，对于任意时刻 t 和标的资产价格 x，若令微分对策的值函数 $u_i(t,x,y)=0$，并求解 y 可以得到期权的公平价格

$$y^*(t,x)=e^{-r(T-t)}g[xe^{r(T-t)}] \tag{8}$$

下面推导期权的套期保值策略. 根据微分对策理论[15]，微分对策(1)－(3)的最优套期保值策略和敌对环境的最优策略由式(5)给出，并且对于任意 $(t,x,y)\in N_i$，有

$$s_1=u_x=-g'[xe^{r(T-t)}]e^{r(T-t)}$$
$$s_2=u_y=e^{r(T-t)}$$

因此最优策略为

$$\pi^*(t,x,y) = \frac{g'[xe^{r(T-t)}]e^{r(T-t)}x}{e^{r(T-t)}y} = g'[xe^{r(T-t)}]\frac{x}{y}$$

也就是说，最优证券组合中的股票数量 $n^*(t,x)$ 为

$$n^*(t,x) = \frac{\pi^* y}{x} = g'[xe^{r(T-t)}],\ x \in L_t \quad (9)$$

无风险资产的数量为 $m^*(t,x)$ 为

$$m^*(t,x) = y^*(t,x) - n^*(t,x)x,\ x \in L_t \quad (10)$$

定理 4　假定欧式或有债权的标的资产价格服从式(1). 则对于任意时刻 t 和标的资产价格 x，或有债权存在唯一的公平价格，该价格由式(8)给出，即

$$P_f(t,x) = \{y^*(t,x)\}$$

或有债权的套期保值策略由(9)和(10)给出，不确定扰动的最差状态为 $w^*(t) = -(\alpha - r)/\beta$.

在上述定理中，或有债权的价格和套期保值策略均独立于股票价格模型(1)，它们只与无风险利率及期权自身的参数(如损益函数、到期日等)有关. 这表明本文提出的期权定价方法关于标的资产价格的模型具有较强的鲁棒性，即无论股票价格模型中的参数如何变化，期权价格和抵补策略都是不变的.

如果讨论的或有债权是执行价格为 K 的欧式看涨期权，则期权的损益函数为 $g(x) = \max\{x - K, 0\}$. 令 $k(t) = Ke^{-r(T-t)}$，还有如下结果.

推论 1　假设某一欧式看涨期权的到期日为 T，执行价格为 K，其标的资产价格服从式(1)，则期权的公平价格 $y^{ur}(t,x)$ 为

$$y^{ur}(t,x) = \max\{x - k(t), 0\} \quad (11)$$

期权的套期保值策略为

$$n^{ur}(t,x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant k(t) \\ 0, & x < k(t) \end{cases}$$

$$m^{ur}(t,x) = \begin{cases} -k(t), & x \geqslant k(t) \\ 0, & x < k(t) \end{cases} \quad (12)$$

式中 n^{ur} 表示股票的持仓量，m^{ur} 表示无风险资产的头寸.

这一具体结果已由文[10]得到. 下面把期权定价的鲁棒控制方法和随机方法进行对比，分析它们的优缺点.

考虑期权参数相同，但标的资产价格服从几何布朗运动的欧式看涨期权，它的价格 $y^{bs}(t,x)$ 可由著名的 Black-Scholes 公式[2]给出. 众所周知，此期权价格满足不等式[3]

$$y^{ur}(t,x) = \max\{x - k(t), 0\} \leqslant y^{bs}(t,x) \leqslant x$$

这一关系表明，用微分对策方法得到的期权价格 $y^{ur}(t,x)$ 是 Black-Scholes 期权价格 $y^{bs}(t,x)$ 的下限，也就是说，本方法的套期保值成本低于期权定价的随机方法.

在期权定价的 Black-Scholes 理论中，最优套期保值策略是使 t 时刻的股票头寸 n^{bs} 等于 $\partial y^{bs}/\partial x$，即期权的 Delta($\Delta$)，无风险头寸 m^{bs} 等于 $y^{bs} - x\Delta$. 由于 $y^{bs}(t,x)$ 及其导数都是连续函数，因而这种抵补策略要求套期保值者随着股价的变动不停地进行交易. 同时它还要求股票数量是无限可分的.

由式(12)可以看出，基于微分对策的套期保值策略无论在时间上还是在股票数量上都可以是不连续的：当标的资产价格高于执行价格的贴现值 $k(t)$ 时，最优投资策略是购买一股股票，同时借入数量为 $k(t)$ 的无风险资产，这种套期保值头寸称为抵补头寸(covered position)；当 $x(t)$ 低于 $k(t)$ 时，最优投资策略是卖掉股票，并且还清在无风险资产上的借款，这种套期保值头寸称为裸头寸(naked position). 在期权的实际操作中，这种套期保值方法被称为止损策略(stop-loss strategy)[3]. 显然，这种策略不要求股票价格无限可分.

4　结论

本文在鲁棒控制的框架下研究了一种新的期权定价方法. 与期权定价的随机方法相比，本方法有如下优点：第一，对标的资产价格的概率分布没有任何限制，允许股票价格中的不确定性以任意方式和幅度运动，因而本方法可以适用于更加广泛的市场环境. 第二，这种方法运用的抵补策略比随机方法的抵补策略具有更低的成本，可以给期权的买卖双方都带来一定的好处. 最后，得到的止损策略不需要象随机方法那样不停地进行交易，而且不要求股票数量是无限可分的. 从本文的研究结果看，基于鲁棒控制的期权定价方法可以有效地解决随机方法中存在的一些问题，因而有着广阔的研究前景.

参 考 文 献:

[1] 宋逢明. 期权定价理论和1997年诺贝尔经济学奖获得者的贡献[J]. 管理科学学报, 1998, 1 (2): 1-8

[2] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. J. Political Economy, 1973, 81: 637-654

[3] Hull J. Options, futures, and other derivative securities[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc., 1993

[4] Duffie D. Dynamic assets pricing theory[M]. New Jersey: Princeton University Press, 1992

[5] Zames G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformation, multiplicative seminorms, and approximate inverses[J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1981, 26: 301-320

[6] Basar T, Bernhard P. H^{∞}-optimal control and related minimax design problems: a dynamic game approach[M]. Boston, MA: Birkhauser, 1991

[7] Avellaneda M, Levy A, Paras A. Pricing and hedging derivatives securities in markets with uncertainty volatilities [J]. Applied Mathematical Finance, 1995, 2: 73-88

[8] Karoui N, Jeanblanc-Picque M, Shreve S. Robustness of the Black and Scholes formula[J]. Mathematical Finance, 1998, 6 (2): 93-126

[9] Ahn H, Muni A, Swindle G. Optimal hedging strategies for misspecified asset price models[J]. Applied Mathematical Finance, 1999, 6: 197-208

[10] McEneaney W. A robust control framework for option pricing[J]. Math. of Operations Research, 1997, 22: 202-221

[11] Fleming W. Optimal investment models and risk sensitive stochastic control. In Davis M et al. ed. Mathematical Finance, New York: Springer-Verlag, 1995

[12] 刘海龙, 郑立辉, 樊治平, 潘德惠. 证券投资决策的微分对策方法研究[J]. 系统工程学报, 1999, 18 (1): 69-72

[13] 郑立辉, 张兢田, 鲍新中. 证券选择的极大极小设计方法[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20 (2): 48-51

[14] Knight F. Risk, uncertainty and profit[M]. Boston: Houghton-Mifflin, 1921

[15] Subbotin A. Generalized solutions of first-order PDEs: the dynamical optimization perspective[M]. Boston, MA: Birkhauser, 1995

A robust control approach to option pricing

ZHENG Li-hui

School of Economics and Management, Tongji University, Shanghai 200092, China

Abstract: Based on the behavior analysis of economics, this paper first proposes strict definitions for option writing price, buying price, and fair price in the framework of robust control. Then a closed solution for the value function of the dynamic game is derived by solving the corresponding Bellman equation. Finally explicit expressions for the option price and the hedging strategy are obtained, and comparisons are made between this option pricing method and the traditional stochastic method. The advantages of this option pricing method include: the hedging cost is lower than that of the traditional method, and the hedging strategy doesn't require continuous trading, and the infinite divisibility of stock shares while the traditional method does.

Key words: option pricing; robust control; differential game