第4卷第2期 管 理 科 学 学 报 Vol. 4 No. 2
2001年4月 JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA Apr., 2001

评价相对效率的投入—产出型DEA[①]

李光金
（四川大学管理学院，成都 610064）

摘要：传统DEA只能在固定投入或产出的条件下，从产出或投入角度测算决策单元相对效率，因而不能综合地反映决策单元的投入产出效果. 基于双目标规划，本文将提出从投入及产出角度评价决策单元相对效率的投入—产出型DEA，并研究其相对有效性. 最后以沪市16家高科技上市公司为应用实例，研究其相对经营效率.

关键词：DEA；决策单元；相对效率；数学规划
中图分类号：N94 **文献标识码**：A **文章编号**：1007-9807(2001)02-0058-05

0 引 言

美国学者Charnes等创立的数据包络分析(DEA)[1]，已经成为评价具有相同类型投入和产出的若干生产或非生产部门(简决策单元)相对效率的有效方法. 这种方法基于单目标线性规划，在所定义的生产可能集内，或固定投入而将产出尽量扩大；或固定产出而将投入尽量缩小，其产出的最大扩大比率的倒数或投入的最小缩小比率被定义为决策单元的相对效率. 因而前者称产出型DEA，而后者相应称为投入型DEA. 然而问题是，就同一个决策单元来讲，投入型DEA所测算的相对效率与对应的产出型DEA所测算的结果数值上有时不一致[2]. 那么在运用DEA进行实证研究时，究竟是采用DEA的投入型还是产出型？另一方面，在对两个不同的决策单元进行排序时，如果仅仅因为它们的相对效率(假设是从投入角度测算的)相同，就认为它们具有相同的排序就有失偏颇，因为此时从产出角度测算的相对效率很有可能不相等. 针对投入型及产出型DEA(以下称传统DEA)所固有的局限性，本文将提出投入—产出型DEA，目的是从投入及产出角度研究决策单元的相对效率及相对有效性等问题.

1 传统DEA及其局限性

设决策单元的投入向量 $X=(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_m)^T$，$x_i$ 表示第 i 种投入，$Y=(y_1,\cdots,y_r,\cdots,y_s)^T$，$y_r$ 表示第 r 种产出，X_j，Y_j 对应第 j 个决策单元投入、产出向量，X_0，Y_0 对应被评价决策单元相应指标.

从投入角度测算决策单元(X_0,Y_0)相对效率的DEA模型(BCC)[3]为

$$\begin{aligned} &\min\ \theta \\ &\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j \leqslant \theta X_0 \\ &\quad\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j \geqslant Y_0 \\ &\quad\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1, \forall\ \lambda_j \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1}$$

对应的从产出角度测算决策单元(X_0,Y_0)相对效率的DEA模型为

$$\begin{aligned} &\max\ \delta \\ &\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j \leqslant X_0 \\ &\quad\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j \geqslant \delta Y_0 \end{aligned}$$

① 收稿日期：2000-02-14；修订日期：2000-11-29.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(79800023).
作者简介：李光金(1965-)，男，四川自贡人，博士，副教授.

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1, \forall\ \lambda_j \geqslant 0 \qquad (2)$$

事实上，上述 DEA 具有以下局限性：

局限 1　对于同一决策单元，运用(1)和(2)所测算的相对效率不一定总是相等的，这意味着同一个决策单元可能有不相等的两种相对效率．那么到底哪种才真实地反映了决策单元的投入产出效果，传统 DEA 显然没有且不能回答此问题．

局限 2　传统 DEA 仅根据决策单元的单准则相对效率大小来对非有效决策单元排序，显然就不能区分从投入(或产出)测算相对效率相同但从产出(或投入)得出相对效率不同的两个非有效决策单元的优劣顺序．

2　投入—产出型 DEA 及其决策单元相对效率、相对有效性

传统 DEA 只能在固定投入(或产出)的情况下，将产出(或投入)尽量扩大(或缩小)，使得所得出的决策单元相对效率会忽视不同决策单元投入消耗(或产出水平)之间的差异．严格讲这种效率只是决策单元的产出(或投入)单准则效率．如果在以相同比率缩小投入(或扩大产出)的同时，也将产出以相同比率尽量扩大(或投入尽量缩小)，即

$$\begin{aligned}
&\max\ \delta\\
&\min\ \theta\\
&\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j \leqslant \theta X_0\\
&\qquad 0 < \theta \leqslant 1\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j \geqslant \delta Y_0\\
&\qquad \delta \geqslant 1\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1, \forall\ \lambda_j \geqslant 0
\end{aligned} \qquad (3)$$

如果(3)最优解存在，且 $\lambda^0 = (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)^{\mathrm T}, \theta^0, \delta^0$，并定义

$$\eta = \frac{\theta^0}{\delta^0} \qquad (4)$$

显然，(4)不仅反映了投入的最小缩小量而且还考虑了产出的最大扩大量，与传统 DEA 相比，更客观地描述了决策单元投入及产出效率，故为了与传统 DEA(1)和(2)区别开来，本文以下称(3)为投入—产出型 DEA．

此外，在(3)中，如果 δ 取其下限 $\delta = 1$，它就等价于投入型 DEA(1)；若 θ 取其上限 $\theta = 1$，它又等价于产出型 DEA(2)．由此可见，传统 DEA 只是(3)的特殊情形．

(3)为双目标规划，它又等价于如下线性规划：

$$\begin{aligned}
&\max\ \delta - \theta\\
&\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j \leqslant \theta X_0 \qquad 0 < \theta \leqslant 1\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j \geqslant \delta Y_0 \qquad \delta \geqslant 1\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 \qquad \forall\ \lambda_j \geqslant 0
\end{aligned} \qquad (5)$$

因而，(3)可转化成线性规划(5)求解．

定义 1　若 $\lambda^0, \theta^0, \delta^0$ 为规划(5)最优解，则当 $\theta^0 = \delta^0 = 1$ 时，称决策单位 (X_0, Y_0) 相对弱有效．

为了定义决策单元 (X_0, Y_0) 相对有效，可建立如下规划：

$$\begin{aligned}
&\max\ \delta' = (\delta_1,\cdots,\delta_s)^{\mathrm T}\\
&\min\ \theta' = (\theta_1,\cdots,\theta_m)^{\mathrm T}\\
&\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} = \theta_i x_{i0} \quad 0 < \theta_i \leqslant 1 \quad i = 1,\cdots,m\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} = \delta_r y_{r0} \quad \delta r \geqslant 1 \qquad r = 1,\cdots,s\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 \qquad \forall\ \lambda_j \geqslant 0
\end{aligned} \qquad (6)$$

定义 2　若多目标规划(6)的有效解为 $\lambda'^0, \theta'^0, \delta'^0$，则当 $\theta'^0 = e_1^{\mathrm T} = (1,\cdots,1)_{s\times1}^{\mathrm T}, \theta'^0 = e_2^{\mathrm T} = (1,\cdots,1)_{m\times1}^{\mathrm T}$ 时，决策单元 (X_0, Y_0) 相对有效．

为了得到多目标规划(6)的有效解，并用之判断决策单元相对有效性，定义

$$\mu(\theta_i) = \frac{1-\theta_i}{1-\theta_{Li}} \quad \theta_{Li} \leqslant \theta_i \leqslant 1 \qquad (7)$$

$$\mu(\delta_r) = \frac{\delta_r - 1}{\delta_{Ur} - 1} \quad \delta_{Ur} \geqslant \delta_r \geqslant 1 \qquad (8)$$

其中 θ_{Li}, δ_{Ur} 分别是规划(9)和(10)的最优值

$$\begin{aligned}
&\min\ \theta_i\\
&\text{s.t.}\ (\lambda', \theta', \delta') \in R
\end{aligned} \qquad (9)$$

$$\begin{aligned}
&\max\ \delta_r\\
&\text{s.t.}\ (\lambda', \theta', \delta') \in R
\end{aligned} \qquad (10)$$

其中 R 是规划(6)的可行域．

根据最小算子及最大隶属度原则[4]，规划(6)

的有效解可以通过求解线性规划(11)得到.

$$\max\ \mu$$
$$\text{s.t.}\ \mu \leqslant \frac{1-\theta_i}{1-\theta_{Li}},\quad i=1,\cdots,m$$
$$\mu \leqslant \frac{\delta_r - 1}{\delta_{Ur}-1},\quad r=1,\cdots,s$$
$$(\lambda,\theta',\delta') \in R \qquad (11)$$

根据定义 2 有

定义 3 设规划(11)最优解 $\mu^*,\theta_i^*,i=1,\cdots,m,\delta_r^*,r=1,\cdots,s$,如果 $\mu^*=1,\theta_i^*=1,\delta_r^*=1,\forall\, i,r$ 则 (X_0,Y_0) 相对有效.

实际上,(X_0,Y_0) 是否相对有效不必求解规划(11)就能作出判断,因为由(6)-(11)可得

定理 1 (X_0,Y_0) 相对有效的充要条件是规划(9)和(10)的最优值 $\theta_{Li}=1,\delta_{Ur}=1,\forall\, i,r$

证明 充分条件:当 $\forall\,\theta_{Li}=1$ 时,因 $\theta_{Li}\leqslant\theta_i\leqslant 1$,则规划(11)的最优解一定满足 $\forall\,\theta_i^*=1$,同理 $\forall\,\delta_r^*=1$,并且有 $\mu^*=1$,根据定义 3 决策单元 (X_0,Y_0) 相对有效.

必要条件:当决策单元 (X_0,Y_0) 相对有效时,规划(11)最优解满足 $\mu^*=1,\theta_i^*=1,\delta_r^*=1,\forall\, i,r$ 由其约束条件有 $\theta_{Li}=1,\delta_{Ur}=1,\forall\, i,r$.

然而,运用规划(9)和(10)识别决策单元 (X_0,Y_0) 是否相对有效,需要反复求解 $(m+s)$ 个线性规划,因而比较繁琐.下面给出

定理 2 决策单元 (X_0,Y_0) 相对有效等价于它在传统 DEA 模型意义下相对有效.

证明 当决策单位 (X_0,Y_0) 相对有效时,根据定理 1 知 $\theta_{Li}=1,\delta_{Ur}=1,\forall\, i,r$,此时规划(12)最优解一定满足 $s_i^{-0}=0,s_r^{+0}=0,\alpha^0=1$,否则与 $\theta_{Li}=1,\delta_{Ur}=1,\forall\, i,r$ 矛盾,据传统 DEA 决策单元相对有效定义[3],它在传统 DEA 意义下相对有效.

$$\min\ \alpha - \epsilon\Big(\sum_{i=1}^{m}s_i^- + \sum_{r=1}^{s}s_r^+\Big)$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} + s_i^- = \alpha x_{i0},\quad i=1,2,\cdots,m$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0},\quad r=1,2,\cdots,s$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1,\qquad \forall\,\lambda_j \geqslant 0 \qquad (12)$$

反之,当 (X_0,Y_0) 在传统 DEA 意义下相对有效时,规划(12)最优解必满足 $s_i^{-0}=0,s_r^{+0}=0,\alpha^0=1$,证明它相对有效,须证明规划(11)最优解 $\mu^*=1,\theta_i^*=1,\delta_r^*=1,\forall\, i,r$. 此证明参见文[5]$P_{20}$ 定理 2.

3 应用实例

本文以沪市 16 家上市高科技公司为实例,研究其 1998 年相对经营效率,有关统计数据如表 1[16],具体评价结果见表 2,同时为了说明投入—产出型 DEA 的优越性,表 2 中还列出了运用传统 DEA 对上述公司经营效率的评价结果. 从表 2 可知,除处于相对弱有效的哈高科等 9 家公司以外,投入型和产出型 DEA 对其余公司经营效率评价结果明显不一致,且有的相差甚大;其次,产出型 DEA 对鼎天科技、天坛生物、方正科技、张江高科的评价结果与投入—产出型 DEA 基本一致,而投入型 DEA 对工大高新、华东电脑的评价又与投入—产出型 DEA 较接近. 这说明传统 DEA 确实存在"同一决策单元有两种效率"的现象,且它们没有也不能回答何种效率更真实;相反,投入—产出型 DEA 综合地反映了决策单元投入效率和产出效率,很好地解决了此类问题,因而,根据投入—产出型 DEA 的相对效率大小对非有效决策单元的排序也就更符合实际.

表 1 沪市 16 家高科技上市公司投入—产出数据

公司名称	投入 x_1	投入 x_2	产出 y_1	产出 y_2
哈高科	1.65	3.45	0.71	1.15
清华同方	3.70	4.64	1.15	0.09
稀土高科	0.43	2.27	0.19	0.01
宏图高科	2.36	1.22	0.57	0.16
鼎天科技	2.09	2.85	0.29	0.13
天坛生物	0.43	1.30	0.45	0.03

公司名称	投入 x_1	投入 x_2	产出 y_1	产出 y_2
云大科技	0.11	1.62	0.54	0.03
上海贝岭	0.70	1.00	0.45	0.03
有研硅股	0.84	0.76	0.34	0.00
方正科技	1.59	3.05	0.32	0.24
工大高新	1.06	2.85	0.62	0.04
东大阿派	2.21	2.51	1.17	0.00
中国高科	0.99	0.63	0.07	0.07
实达电脑	4.87	1.87	0.99	0.03
华东电脑	12.52	2.41	0.88	0.00
张江高科	0.23	1.88	0.24	0.06

注：投入 x_1—— 每股主营业务成本，投入 x_2—— 每股年初净资产，产出 y_1—— 每股主营业务利润，产出 y_2— 每股非主营业务利润.

表 2　上市公司相对经营效率评价

公司名称	投入型 DEA 相对经营效率	产出型 DEA 相对经营效率	投入一产出型 DEA 相对经营效率
哈 高 科	1	1	1
清华同方	1	1	1
稀土高科	0.630 1	0.299 7	0.238 1
宏图高科	1	1	1
鼎天科技	0.385 8	0.293 7	0.293 7
天坛生物	0.980 6	0.910 2	0.909 8
云大科技	1	1	1
上海贝岭	1	1	1
有研硅股	1	1	1
方正科技	0.486 5	0.386 7	0.386 7
工大高新	0.573 0	0.760 0	0.579 4
东大阿派	1	1	1
中国高科	1	1	1
实达电脑	1	1	1
华东电脑	0.698 0	0.770 6	0.689 7
张江高科	0.856 6	0.511 6	0.511 6

4　结束语

本文提出的投入—产出型 DEA 克服了传统 DEA 在测算决策单元相对效率时所存在的局限性，并证明投入—产出型 DEA 与传统 DEA 决策单元相对有效性具有等价性，因而在识别决策单元有效性及改进非有效决策单元时，仍可以按传统 DEA 方法进行.

参 考 文 献：

[1] Charnes A, Cooper W W, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units [J]. Eur. J. of Ops. Res., 1978,2:429-444

[2] Golany B, Roll Y. An application procedure for DEA [J]. Omega,1989,17(3):237-250

[3] 魏权龄. 评价相对有效性的 DEA 方法[M]. 北京：中国人民大学出版社,1988. 21-23

[4] Stanley L E,LI R J. Fuzzy multiple objective programming and compromise programming with pareto optimum.

Fuzzy Sets and Systems. 1993.53:601-610
[5] 李光金,刘永清.基于多目标规划的 DEA [J].系统工程理论与实践,1997,17(3):16-22
[6] 闵尽.1999深沪股票大典·上海卷 [M].广州:羊城晚报出版社,1999.5,1-428

Input-and-output-oriented DEA for assessing relative efficiency

LI Guang-jin
Management School, Sichuan University, Chengdu 610064, China

Abstract: The previous data envelopment analysis(DEA) can only be used to measure relative efficiencies of decision making units(DMUs) in either input orientation or output orientation, so it is considered to be traditional DEA in this paper. As the result, it is unable to reflect totally the performance of DMUs in the input-output process. On the basis of bi-objective programming, this paper develops input-and-output-oriented DEA so as to assess relative efficiencies of DMUs in both input and output orientation, and further discusses the relative efficiency of DMUs.
Key words: DEA; DMU; relative efficiency score; mathematical programming

(上接第57页)

Viability equilibrium of real estate market

ZHAO Sheng-min, WANG Chun-feng, LI Guang-quan
Tianjin University, Tianjin, 300072, China

Abstract: In this paper the problem of Walras equilibrium of a real estate market is considered. First, a static model of the real estate market is established. The viability Walras equilibrium of the real estate market is defined, and its existence is proved. Secondly, a dynamic evolution model of the real estate market is developed in the form of differential inclusion. The existence of viability dynamic equilibrium of the real estate market is proved under some assumptions by applying viability theory. Finally, the situation of Chinese real estate market is analyzed, and some suggestions are presented.
Key words: real estate market; viability equilibrium; differential inclusions; viability theory