第4卷第6期
2001年 12 月

管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA

Vol. 4 No. 6
Dec., 2001

基于最差情况的最优消费和投资策略①

刘海龙，吴冲锋
（上海交通大学安泰管理学院，上海 200052）

摘要：在假设证券收益存在有界不确定干扰和考虑交易费用的情况下，基于微分对策理论，研究了最差情况下的最优消费和投资策略问题. 首先，建立了最优消费和投资决策的微分对策模型；其次，证明了该微分对策模型存在唯一的值函数，并根据微分对策理论推导出了值函数满足的IB偏微分方程；再次，基于微分对策值函数，给出了最差情况下的最优消费和投资策略；最后，给出了IB偏微分方程解析解的一种求解方法，并对解的性质做了初步探讨.

关键词：最优消费和投资；微分对策；有界不确定；IB(Isaacs-Bellman)方程

中图分类号：F830.9　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007-9807(2001)06-0048-07

0 引 言

诺贝尔经济学奖获得者 Merton 在70年代初就在一定假设条件下建立了最优消费和投资模型[1]，并给出了解析解. 这是现代金融理论的突破性成果之一，人们将这个成果称为经典的最优消费和投资模型. 时至今日，仍有许多人在不断放宽经典最优消费和投资模型的假设条件来研究这一问题，取得了许多成果[2,3]. 但其主要研究集中在两个方面：一是带有交易费用的最优消费和投资问题[4,5]；二是具有不确定收入的最优消费和投资问题[6]. 这些研究大多都要求证券价格服从维纳过程. 但是，现实的金融市场证券价格往往不真正服从维纳过程，那么这些用随机动态模型研究证券投资决策问题的方法就不再适用了. 因此有必要研究其它解决问题的方法. 本文将研究另一种非完全市场情况下的最优消费和投资问题，既考虑了证券收益存在有界不确定干扰又考虑交易费用的情况，所使用的方法是微分对策方法. 关于运用微分对策方法研究证券投资决策问题，文[7,8]给出了这种基本思想，但没有进行深入具体的研究. 文[9]仅运用微分对策方法给出了投资策略.

1 微分对策模型描述

为了描述问题方便，作出如下一些假设：考虑只投资一个风险证券，T 表示投资决策过程的终端时间；$x(t)$，$y(t)$ 分别表示在 t 时刻银行存款的现金余额和证券余额；x_0，y_0 分别表示初始现金额和初始证券金额；$x(T)$，$y(T)$ 分别表示终端现金余额和终端证券余额；$c(t)$ 表示投资者的消费过程；$u_1(t)$，$u_2(t)$ 分别表示证券的购入速率和卖出速率，$u_1(t)$，$u_2(t) \in [0,U]$，U 是常数，当 $u_1(t) = u_2(t) = 0$ 时表示没有交易；$v(t) \in [-1,1]$ 表示不确定因素运动方式；β 表示不确定程度. 这一部分所研究的问题是：假设在固定的有限时期 T 内，投资者既不增加资金，也不抽取交易费用外的资金. 假设投资者可以自由地从银行存款中取出现金购买证券，也可以自由地抛出证券，变为现金存入银行. 但是购买和抛售单位金额证券要付交易费用 α. 由于不确定因素 $v(t)$ 的存在，证券余额 $y(t)$ 可能增加也可能减少. 投资者的目的是针对不确定干扰最差的情况下，选取最优交易策略 $u(t)$ 和消费策略 $c(t)$ 使终端值的效用最大. 这一问题可以用如下微分对策模型描述

① 收稿日期：2000-07-20；修订日期：2001-02-23.
基金项目：国家杰出青年科学基金资助项目(70025303)；教育部跨世纪优秀人才培养计划基金资助项目.
作者简介：刘海龙(1959-)，男，吉林省吉林市人，博士，教授.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) = r_1 x(t) - c(t) - u_1(t) + u_2(t) - \\
\alpha u_1(t) - \alpha u_2(t), \\
x(0) = x_0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) = r_2 y(t) + u_1(t) - u_2(t) + \beta y v(t), \\
y(0) = y_0 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

目标泛函为

$$
J(u_1, u_2, c, v) = \left\{\int_t^T F(c(s))\exp(-\rho t)\mathrm{d}s + F_1(x(T)) + F_2(y(T))\right\} \qquad (3)
$$

其中 r_1，r_2 分别表示无风险利率和风险资产投资的预期收益率；ρ 表示贴现因子，ρ 越大表示未来消费的贴现率越大；$F(x)$，$F_1(x)$，$F_2(x)$ 分别为效用函数. 方程(1) 表示投资者现金拥有量的瞬时变化量等于现金利率收益 $r_1(t)x(t)$、瞬时消费 $c(t)$、瞬时交易额 $u_1(t) + u_2(t)$ 和付出的交易费用 $\alpha[u_1(t) + u_2(t)]$ 的总和. 方程(2) 表示证券金额的瞬时变化量等于股票收益 $[r_2(t) + \beta v(t)]y(t)$ 与证券瞬时交易额 $u_1(t) - u_2(t)$ 之和，其中股票收益率 $r_2(t) + \beta v(t)$ 由两部分组成：一部分是预期收益率 $r_2(t)$；另一部分是不确定干扰 $\beta v(t)$，由方程(2) 可以看出，本文用有界不确定干扰 $v(t)$ 代替了随机动态模型中的维纳过程，所以本模型可以用来描述另一种不确定性问题. 这里的问题可看作：控制者一方（投资者）在干扰控制者一方（不确定因素 $v(t)$）最差的情况下，如何选取控制 $u_1(t)$，$u_2(t) \in [0, U]$ 和 $c(t)$，使目标泛函 J 最大.

2　基于值函数的最优消费和投资策略

为了求解上述微分对策问题，首先，证明本文的微分对策模型(1)、(2) 和(3) 存在唯一的值函数.

定理 1　在交易策略有限的条件下，微分对策问题(1)、(2) 和(3) 存在唯一的值函数 $V(t, x, y)$，且是如下伊萨克—贝尔曼(Isaacs-Bellman)方程的粘性解

$$
\begin{cases}
V_t + r_1 x V_x + r_2 y V_y - \beta|yV_y| - \rho V + \\
\quad \max\limits_{c}\{F(c) - cV_x\} + \\
\quad \max\limits_{u_1, u_2}\{[V_y - (1+\alpha)V_x]u_1(t) + \\
\quad [-V_y + (1-\alpha)V_x]u_2(t)\} = 0 \\
V(T, x, y) = F_1(x) + F_2(y)
\end{cases} \qquad (4)
$$

其中 V 的下角标 t，x，y 表示 V 关于相应变量的偏导数.

定理的证明见附录.

现在讨论 IB 方程(4) 解的形式，通过求解 IB 方程(4) 中的两个优化问题，可以得到基于值函数的最优消费和投资策略.

问题 Ⅰ

$$
N = \max_{c}\{F(c) - cV_x\} \qquad (5)
$$

假设具体的效用函数为 $F(x) = \dfrac{1}{\gamma}x^{\gamma}$，($\gamma < 1, \gamma \neq 0$)，则问题 Ⅰ 的最优解为

$$
c = (V_x)^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad (6)
$$

最优值为

$$
N = \frac{1-\gamma}{\gamma}(V_x)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad (7)
$$

问题 Ⅱ

$$
M = \max_{u_1, u_2}\{L_1 u_1(t) + L_2 u_2(t)\} \qquad (8)
$$

其中

$$
L_1 = V_y - (1+\alpha)V_x \qquad (9)
$$

$$
L_2 = -V_y + (1-\alpha)V_x \qquad (10)
$$

则问题 Ⅱ 的最优解分为以下 3 种情况：

1° 当 $L_1 > 0$，$L_2 < 0$ 时，最优解为 $u_1(t) = U$，$u_2(t) = 0$，最优值为 $M = L_1 U$；

2° 当 $L_1 < 0$，$L_2 > 0$ 时，最优解为 $u_1(t) = 0$，$u_2(t) = U$，最优值为 $M = L_2 U$；

3° 当 $L_1 < 0$，$L_2 < 0$ 时，最优解为 $u_1(t) = u_2(t) = 0$，最优值为 $M = 0$.

3　IB 偏微分方程的解析解

这一部分对 IB 方程(4) 在各种情况下，解的形式进行了讨论，并得到了在相应情况下解的解析表达式. 首先将优化问题 Ⅰ 和问题 Ⅱ 的最优值代入方程(4) 得

$$
\begin{cases}
V_t + r_1 x V_x + r_2 y V_y - \beta|yV_y| - \rho V + \\
\quad \dfrac{1-\gamma}{\gamma}(V_x)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \\
\quad \max\limits_{u_1, u_2}\{[V_y - (1+\alpha)V_x]u_1(t) + \\
\quad [-V_y + (1-\alpha)V_x]u_2(t)\} = 0 \\
V(T, x, y) = F_1(x) + F_2(y)
\end{cases} \qquad (11)
$$

由于 IB 偏微分方程(11) 是高度的非线性关系，对一般的效用函数 $F(x)$，$F_1(x)$，$F_2(x)$ 很难求出解析解，因此考虑如下的特殊情况

$$F(x) = F_1(x) = F_2(x) = \gamma^{-1}x^{\gamma}, 0 < \gamma < 1$$

下面分 4 种情况进行讨论:

1° $L_1 > 0, L_2 < 0$ 时

令 $V = \gamma^{-1}x^{\gamma}f_1(t) + \gamma^{-1}y^{\gamma}f_2(t) - f_3(t)$,

$$f_1(T) = 1, f_2(T) = 1, \tag{12}$$

$$f_2(t) \geqslant 0, f_3(T) = 0$$

先将最优值 N, M 代入方程(4),然后再将式(12)代入得

$$\gamma^{-1}x^{\gamma}\Big[f'_1(t) + r_1\gamma f_1(t) - \rho f_1(t) + \frac{1-\gamma}{\gamma}[f_1(t)]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\Big] +$$

$$\gamma^{-1}y^{\gamma}[f'_2(t) - r_2\gamma f_2(t) - \beta\gamma f_2(t) - \rho f_2(t)] +$$

$$f'_3(t) - \rho f_3(t) - U[f_2(t) - (1+\alpha)f_1(t)] = 0$$

由 x, y 的任意性必有

$$f'_1(t) - r_1\gamma f_1(t) - \rho f_1(t) + \frac{1-\gamma}{\gamma}[f_1(t)]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0,\ f_1(T) = 1 \tag{13}$$

$$f'_2(t) - r_2\gamma f_2(t) - \beta\gamma f_2(t) - \rho f_2(t) = 0,\ f_2(T) = 1 \tag{14}$$

$$f'_3(t) - \rho f_3(t) + U[f_2(t) - (1+\alpha)f_1(t)] = 0,\ f_3(T) = 0 \tag{15}$$

求解方程(13),令 $A(t) = [f_1(t)]^{\frac{1}{1-\gamma}}$,则

$$f_1(t) = [A(t)]^{1-\gamma} \tag{16}$$

$$f'_1(t) = (1-\gamma)[A(t)]^{-\gamma}A'(t) \tag{17}$$

将式(16)和(17)代入式(13)得如下方程

$$A'(t) = -\frac{r_1\gamma - \rho}{1-\gamma}A(t) - \frac{1}{\gamma} \tag{18}$$

解方程(18)得

$$A(t) = -\frac{1-\gamma}{(r_1\gamma-\rho)\gamma} + \Big[1 + \frac{1-\gamma}{(r_1\gamma-\rho)\gamma}\Big] \cdot \exp\Big[\frac{r_1\gamma-\rho}{1-\gamma}(T-t)\Big] \tag{19}$$

将式(18)代入式(16)中得

$$f_1(t) = \Big\{-\frac{1-\gamma}{(r_1\gamma-\rho)\gamma} + \Big[1 + \frac{1-\gamma}{(r_1\gamma-\rho)\gamma}\Big] \cdot \exp\Big[\frac{r_1\gamma-\rho}{1-\gamma}(T-t)\Big]\Big\}^{1-\gamma} \tag{20}$$

显然由方程(14)和(15)可以得到

$$f_2(t) = \exp[(r_2\gamma - \beta\gamma - \rho)(T-t)] \tag{21}$$

$$f_3(t) = \exp(\rho t)\int_t^T U[f_2(s) - (1+\alpha) \cdot f_1(s)]\exp(-\rho s)\mathrm{d}s \tag{22}$$

将式(20)、(21)和(22)代入式(12)得值函数如下

$$V(t,x,y) = \gamma^{-1}x^{\gamma}\Big\{-\frac{1-\gamma}{(r_1\gamma-\rho)\gamma} + \Big[1 + \frac{1-\gamma}{(r_1\gamma-\rho)\gamma}\Big] \cdot \exp\Big[\frac{r_1\gamma-\rho}{1-\gamma}(T-t)\Big]\Big\}^{1-\gamma} + \gamma^{-1}y^{\gamma}\exp[(r_2\gamma - \beta\gamma - \rho)(T-t)] + \exp(\rho t)\int_t^T U[f_2(s) - (1+\alpha)f_1(s)] \cdot \exp(-\rho s)\mathrm{d}s$$

2° $L_1 < 0, L_2 > 0$ 时

先将最优值 N, M 代入方程(4)中,然后再将式(12)代入,与第一种情况推导的方法完全相同,可求得值函数为

$$V(t,x,y) = \gamma^{-1}x^{\gamma}\Big\{-\frac{1-\gamma}{(r_1\gamma-\rho)\gamma} + \Big[1 + \frac{1-\gamma}{(r_1\gamma-\rho)\gamma}\Big] \cdot \exp\Big[\frac{r_1\gamma-\rho}{1-\gamma}(T-t)\Big]\Big\}^{1-\gamma} + \gamma^{-1}y^{\gamma}\exp[(r_2\gamma - \beta\gamma - \rho)(T-t)] + \exp(\rho t)\int_t^T U[-f_2(s) + (1-\alpha)f_1(s)]\exp(-\rho s)\mathrm{d}s$$

3° $L_1 < 0, L_2 < 0$ 时

先将最优值 N, M 代入方程(4)中,然后再将式(12)代入,同理得

$$V(t,x,y) = \gamma^{-1}x^{\gamma}\Big\{-\frac{1-\gamma}{(r_1\gamma-\rho)\gamma} + \Big[1 + \frac{1-\gamma}{(r_1\gamma-\rho)\gamma}\Big] \cdot \exp\Big[\frac{r_1\gamma-\rho}{1-\gamma}(T-t)\Big]\Big\}^{1-\gamma} - \gamma^{-1}y^{\gamma}\exp[(r_2\gamma - \beta\gamma - \rho)(T-t)]$$

4° $L_1 > 0, L_2 > 0$ 时

此时 $f_2(t) - (1+\alpha)f_1(t) > 0$, $f_1(t)(1-\alpha) - f_2(t) > 0$,则 $f_1(t)(1-\alpha) > f_1(t)(1-\alpha)$,即 $\alpha f_1(t) < 0$,这与 α 和上面已求出的 $f_1(t)$ 皆大于 0 相矛盾,故这种情况不可能出现.

4 消费和投资策略分析

1° 消费策略分析

将值函数 $V(t,x,y)$ 代入式(6),可得到最优消费策略

$$c(t,x)=\left\{-\frac{1-\gamma}{(r_1\gamma-\rho)\gamma}+\left[1+\frac{1-\gamma}{(r_1\gamma-\rho)\gamma}\right]\cdot\exp\left[\frac{r_1\gamma-\rho}{1-\gamma}(T-t)\right]\right\}^{-1}x \quad (23)$$

2° 投资策略分析

将值函数 $V(t,x,y)$ 代入式(9)和式(10)可得到

$$L_1=y^{\gamma-1}\exp[(r_2\gamma-\beta\gamma-\rho)(T-t)]-(1+\alpha)x^{\gamma-1}f_1(t) \quad (24)$$

$$L_2=-y^{\gamma-1}\exp[(r_2\gamma-\beta\gamma-\rho)(T-t)]-(1-\alpha)x^{\gamma-1}f_1(t) \quad (25)$$

1) 当 $L_1>0, L_2<0, \beta<r_2-\frac{\rho}{\gamma}-\frac{1}{(T-t)\gamma}\{\ln(1+\alpha)+(\gamma-1)(\ln x-\ln y)+\ln f_1(t)\}$ 时，以最大速率买进证券.

2) 当 $L_1<0, L_2>0, \beta>r_2-\frac{\rho}{\gamma}-\frac{1}{(T-t)\gamma}\{\ln(1-\alpha)+(\gamma-1)(\ln x-\ln y)+\ln f_1(t)\}$ 时，以最大速率卖出证券. 令

$$a=r_2-\frac{\rho}{\gamma}-\frac{1}{(T-t)\gamma}\{\ln(1+\alpha)-(\gamma-1)(\ln x-\ln y)+\ln f_1(t)\}$$

$$b=r_2-\frac{\rho}{\gamma}-\frac{1}{(T-t)\gamma}\{\ln(1-\alpha)+(\gamma-1)(\ln x-\ln y)+\ln f_1(t)\}$$

3) 当 $L_1<0, L_2<0, a<\beta<b$ 时，停止交易.

由此可以看出，当 β 小于 a 时，投资者应以最大速率买进证券. 当 β 大于 b 时，投资者应以最大速率卖出证券. 当 β 处于 (a,b) 区间时，投资者可不做任何交易，处于观望之中. 当 $\beta=a$ 或 $\beta=b$ 时，最优策略不确定，即奇异控制.

5 结论

使用微分对策方法研究基于最差情况最优消费和投资策略是文[9]的继续和深入，虽然推导最优消费和投资策略的解析表达式比较繁琐，但有清晰的思路和重要的经济意义，而且最优消费策略与经典最优消费策略的结果形式上是一致的，其投资策略与文[9]是相似的，同时本文使用的方法和研究思路是一种新的探索.

附录

以下简述微分对策理论，而对有关理论不加证明，详尽的内容可参考文[10-12]. 考虑由下面常微分方程描述的微分对策问题

$$\dot{X}=f(t,X(t),u(t),v(t)),X(0)=X_0 \quad (A.1)$$

其中 $X(t)\in R^n$ 是状态变量，$u(t)\in Q_1, v(t)\in Q_2$ 分别表示控制双方的策略，集合 Q_1 和 Q_2 是欧几里得距离意义下的紧集. 设对策的支付函数为

$$J(t_0,X_0,u,v)=\int_0^T\Psi(s,X(s),u(s),v(s))\cdot g(s,X(s),u(s),v(s))ds+\varphi[T,X(T)]\cdot g(t,X(t),u(t),v(t)) \quad (A.2)$$

其中 $f:[0,T]\times R^n\times Q_1\times Q_2\to R^n, \Psi:[0,T]\times R^n\times Q_1\times Q_2\to R^n, g:[0,T]\times R^n\times Q_1\times Q_2\to R^n, g(t,X(t),u(t),v(t))=\exp\left[-\int_0^t b(X(s),u(s),v(s))ds\right], b:R^n\times Q_1\times Q_2\to R^n, \varphi:[0,T]\times R^n\to R^n$，控制 $u(t)$ 努力使其最大，控制 $v(t)$ 希望其最小.

定义1 微分对策(A.1)的下值函数定义为 $V^-(t,X)=\max_{u\in Q_1}\min_{v\in Q_2}J(t,X,u,v)$.

定义2 微分对策(A.1)的上值函数定义为 $V^+(t,X)=\min_{v\in Q_2}\max_{u\in Q_1}J(t,X,u,v)$.

由微分对策的理论知道，对 $\forall(t,X)\in[0,T]\times R^n$，微分对策的上值和下值有如下关系

$$V^-(t,X)\leqslant V^+(t,X) \quad (A.3)$$

当式(A.3)等号成立时，微分对策(A.1)、(A.2)存在值函数. 值函数定义为

$\forall(t,X)\in[0,T]\times R^n$,

$V(t,X)=V^-(t,X)=V^+(t,X)$

下面给出微分对策问题(A.1)、(A.2)值函数存在的条件：

(B1) 函数 $f:[0,T]\times R^n\times Q_1\times Q_2\to R^n$ 和 $\Psi:[0,T]\times R^n\times Q_1\times Q_2\to R^n$ 是连续的，并对所有的 $(t,X,u,v)\in[0,T]\times R^n\times Q_1\times Q_2$，有

$$\|f(t,X,u,v)\|\leqslant R_f(1+\|X\|),$$

$$\|\Psi(t,X,u,v)\|\leqslant R_\Psi(1+\|X\|) \quad (A.4)$$

其中 R_f 和 R_Ψ 是正数，$\|X\|$ 是欧几里得范数.

(B2) 对一切 $(t,X,u,v)\in[0,T]\times R^n\times Q_1\times Q_2, Y\in R^n$，函数 f 关于变量 X，满足 Lipschitz 条件

$$\|f(t,X+Y,u,v)-f(t,X,u,v)\|\leqslant R_L\|Y\| \quad (A.5)$$

其中 R_l 是正数.

(B3) 对任意 $\lambda\in R^n$ 和 $(t,X)\in[0,T]\times R^n$, 如下 Isaacs 条件成立

$$\max_{u\in\Omega_1}\min_{v\in\Omega_2}H(t,X,u,v,\lambda)=\min_{v\in\Omega_2}\max_{u\in\Omega_1}H(t,X,u,v,\lambda)=H(t,X,\lambda) \quad (A.6)$$

其中 $H(t,X,u,v,\lambda)=\Psi(t,X,u,v)-b(X(t),u(t),v(t))V(t,X)+\langle\lambda,f(t,X,u,v)\rangle$, $\langle\lambda,f\rangle$ 表示 R^n 中向量 λ 与 f 的内积.

一般情况下,值函数不是 C^1 的,Isaacs-Bellman 偏微分方程未必有光滑解,因此为了用 Isaacs-Bellman 方程来刻划值函数,必须更新概念,另辟途径.在 20 世纪 80 年代初期,Crandall M G 和 Lion P L 提供了一种称为粘性解的新概念[11~14].在粘性解的概念下,Isaacs-Bellman 偏微分方程的解的存在性和唯一性问题容易解决.下面给出粘性解的定义:

设 Q 是 K 维欧氏空间 R^k 中的一个具有光滑边界 ∂Q 的区域,$C(Q)$ 表示在区域上实值连续函数的全体,$C^1(Q)$ 表示在区域 Q 上有连续一阶导数的实值连续函数的全体.以下考虑一阶偏微分方程

$$F(X,w(X),Dw(X))=0 \quad (A.7)$$

其中 $F(\cdot):Q\times R\times R^n\to R$, $X\in Q$, $w:Q\to R$, Dw 表示 w 的梯度.

定义 3 如果对任意的 $h\in C^1(Q)$ 及 $w\text{-}h$ 的每一局部最大点 X_0,有

$$F(X_0,w(X_0),Dh(X_0))\leqslant 0$$

则称连续函数 $w(X)$ 为偏微分方程(A.7)的粘性下解.

如果对任意的 $h\in C^1(Q)$ 及 $w\text{-}h$ 的每一局部最小点 X_0,有

$$F(X_0,w(X_0),Dh(X_0))\geqslant 0$$

则称连续函数 $w(X)$ 为偏微分方程(A.7)的粘性上解.

如果 $w(X)$ 既是偏微分方程(A.7)的粘性上解又是粘性下解,则称 $w(X)$ 是偏微分方程(A.7)的粘性解.

在有些情况下,上述粘性解的定义用起来不太方便,因此,引进一些等价的定义,为此,首先引进一些记号.对于 $w(X)\in C(Q)$ 以及 $X_0\in Q$,定义函数 $w(X)$ 在 X_0 点的上微分为

$$D^+w(X_0)=\{p\in R^n:\lim_{X\to X_0}[w(X)-w(X_0)-(p,X-X_0)]\leqslant 0\} \quad (A.8)$$

类似地,定义函数 $w(X)$ 在 X_0 点的下微分为

$$D^-w(X_0)=\{p\in R^n:\lim_{X\to X_0}[w(X)-w(X_0)-(p,X-X_0)]\geqslant 0\} \quad (A.9)$$

现在给出粘性解的另一个等价定义.

定义 4 如果对任意 $X\in Q$, $p\in D^+W(X)$,有

$$F(X,w(X),p)\leqslant 0$$

则称连续函数 $w(X)$ 为偏微分方程(A.7)的粘性下解.

如果对任意 $X\in Q$, $p\in D^-w(X)$,有

$$F(X,w(X),p)\geqslant 0$$

则称连续函数 $w(X)$ 为偏微分方程(A.7)的粘性上解.

如果 $w(X)$ 既是偏微分方程(A.7)的粘性上解又是粘性下解,则称 $w(X)$ 是偏微分方程(A.7)的粘性解.

引理 1[11] 假设微分对策问题(A.1)满足条件(B1)、(B2)和(B3),则微分对策问题(A.1)、(A.2)存在唯一值函数 $V(t,X):[0,T]\times R^n\to R$,且是如下 Cauchy 问题的粘性解

$$\begin{cases}H(t,X,\mathrm{DV})=0,(t,X)\in[0,T]\times R^n\\ V(T,X)=\varphi[T,X(T)],\ X\in R^n\end{cases} \quad (A.10)$$

其中 $H(t,X,\lambda)$ 由(A.6)定义,DV 表示 V 的梯度,控制双方的最优策略按如下方式选择.对任何 $\lambda\in R^n$,最优策略满足式(A.6),即

$$u^*(t,X,\lambda)=\mathrm{Arg}\max_u[\min_v H(t,X,u,v,\lambda)] \quad (A.11)$$

$$v^*(t,X,\lambda)=\mathrm{Arg}\min_v[\max_u H(t,X,u,v,\lambda)] \quad (A.12)$$

当值函数 $V(t,X)$ 在点 (t,X) 处连续可微时,其中 λ 等于 V 的梯度,即 $\lambda=\mathrm{DV}$.

定理 1 的证明:显然微分对策问题(A.1)、(A.2)和(A.3)满足条件(B1)和(B2),下面只须

证明条件(B3)也满足,对任意 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in R^2$, $(t,x,y)\in[0,T]\wedge R^2$, $u_1(t),u_2(t)\in[0,U]$, $v(t)\in[-1,1]$ 有

$$
\begin{aligned}
\text{左端} &= \max_{u_1,u_2,c}\min_{v}\{V_t-\rho V+F(c)+\langle\lambda,f(t,x,y,u_1,u_2,v)\rangle\} = \\
&\max_{u_1,u_2,c}\min_{v}\{V_t-\rho V-F(c)+\lambda_1[r_1x-c-(1+\alpha)u_1(t)+(1-\alpha)u_2(t)]+\lambda_2[r_2y+u_1(t)-u_2(t)+\beta yv(t)]\} = \\
&V_t-\rho V+\lambda_1r_1x-\lambda_2r_2y-\beta|y\lambda_2|+\max_{c}\{F(c)-c\lambda_1\}+\max_{u_1,u_2}\{[\lambda_2-(1+\alpha)\lambda_1]u_1(t)+[-\lambda_2+(1-\alpha)\lambda_1]u_2(t)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{右端} &= \min_{v}\max_{u_1,u_2,c}\{V_t-\rho V+F(c)+\langle\lambda,f(t,x,y,u_1,u_2,v)\rangle\} = \\
&\min_{v}\max_{u_1,u_2,c}\{V_t-\rho V+F(c)+\lambda_1[r_1x-c-(1+\alpha)u_1(t)+(1-\alpha)u_2(t)]+\lambda_2[r_2y+u_1(t)-u_2(t)-\beta yv(t)]\} = \\
&V_t-\rho V+\lambda_1r_1x+\lambda_2r_2y-\beta|y\lambda_2|+\max_{c}\{F(c)-c\lambda_1\}+\max_{u_1,u_2}\{[\lambda_2-(1+\alpha)\lambda_1]u_1(t)+[-\lambda_2+(1-\alpha)\lambda_1]u_2(t)\}
\end{aligned}
$$

所以,左端 = 右端,即条件(B3)成立,由引理1知道结论成立.

参考文献:

[1] Merton R C. Optimum consumption and protfolio rules in a continuous time model[J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3: 373-413

[2] Cox J, Huang C. Optimum consumption and protfolio policies when asset follow a diffusion process[J]. Journal of Economic Theory, 1989, 49: 33-83

[3] Hansen L P, Singleton K J. Stochastic consumption, risk aversion, and the temporal behavior of asset returns[J]. Journal of Political Economy, 1983, 91: 249-265

[4] Zarphopoulou T. Investment-consumption mode with transaction fees and Markov-chain parameters[J]. SIAM Journal of Control Optimization, 1992, 30: 613-636

[5] Shreve S E, Soner H M. Optimal investment and consumption with transaction costs[J]. The Annual of Applied Probability, 1994, 4(3): 609-692

[6] Domenico C. Optimal consumption and equilibrium prices with portfolio constraints and stochastic income[J]. Journal of Economic Theory, 1997, 72(1): 33-73

[7] Barron E N, Jensen R. Total risk aversion, stochastic optimal control and differential games[J]. Applied Mathematics and Optimization, 1989, 19: 313-327

[8] Fleming W H. Optimal investment models and risk sensitive stochastic control[M]. Mathematical Finance, New York: Springer-Verlag, 1995. 75-88

[9] 刘海龙,郑立辉,樊治平等. 证券投资决策的微分对策方法研究[J]. 系统工程学报, 1999, 14(1): 69-72

[10] 雍炯敏. 动态规划方法与 HAMILTON-JACOBI-BELLMAN 方程[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1992. 91-108

[11] Subbotin A I. Generalize solution of first-order PDEs: A dynamic optimization perspective[M]. Boston: Birkhauser, 1995. 45-80

[12] 刘海龙,樊治平,潘德惠. 带有交易费用的证券投资最优策略[J]. 管理科学学报, 1999, 2(4): 39-43

[13] Crandall M G, Lion P L. Viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations[J]. Transactions on American Mathematical Society, 1983, 277: 1-42

[14] Crandall M G, Evans L C, Lion P L. Some properties of viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations[J]. Transactions on American Mathematical Society, 1984, 282: 487-502

Optimal consumption and investment strategy based on worst-case

LIU Hai-long, *WU Chong-feng*

Aetna School of Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200052, China

Abstract: Under the hypothesis that security returns have bounded uncertainty, considering transaction costs, based on the theory of differential game, a optimal consumption and investment decision problem in financial market is studied. First, the differential game model for optimal consumption and investment decision problem was established. Secondly, the differential game proved to have a unique value function, and a partial differential equation is obtained for the value function. Third, The worst-case optimal consumption and investment strategies are given. Finally, the solution of IB partial differential equation in financial investment is made to explore the properties of the solution roughly.

Key words: optimal consumption and investment; differential game; bounded uncertainty; Isaacs-Bellman equation

(上接第47页)

Combination forecasting based on Stein-rule estimation and error correction

ZENG Yong[1], *TANG Xiao-wo*[1], *ZHENG Wei-min*[2]

1. Management College, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China;
2. School of Economics and Management, Tsinghua University, Beijing 100084, China

Abstract: Combination forecasting pioneered by Granger is an efficient way to diversify forecasting risk and thus to deal with model uncertainty. However, the empirical evidences have shown that the simple combining forecasts usually outperform the complex models due to the uncertainty and instability of the relationship between single forecasts. In this paper, the combination forecasting methods and model specification based on Stein-rule shrinkage estimation and error correction mechanism are studied. The empirical results show that the performance of combining forecasts can be improved by adopting Stein-rule estimators to combine non-sample information and sample information. Furthermore, the error correction models of combining forecasts are more accurate than other model forms. The error correction models proposed in this paper are more efficiency than previous models in utilizing the co-integration relationship between non-stationary series and their forecasts, and therefore even better and more applicable.

Key words: combination forecasting; Stein-rule estimators; error correction models