研究简报

评价利率期权的远期与即期模型的比较分析①

谢 赤
(湖南大学工商管理学院，长沙 410082)

摘要：对支持利率风险管理的利率期权评价模型进行比较分析.采用了有关市场的数据来检验7个具有单因素与双因素的即期利率与远期利率模型，由此得到一个单因子远期利率模型与两个双因子模型，即期利率模型与其它4个模型之间并无明显的区别.

关键词：利率期权；远期利率；即期利率
中图分类号：F832　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007-9807(2001)06-0077-06

0 引 言

利率衍生品评估模型是设计用来度量、控制和评估利率风险的各种系统的核心，无论所采用的是风险评价法、敏感性分析、重要性检测，还是所谓方案技术都是如此.不幸的是，目前还没有办法来准确评估采用从风险管理观点出发的几种定价模型的表现.

目前已有的评估模型可以分为两组：远期利率模型与即期利率模型.第一组方法以Ho和Lee[1]与Heath、Jarrow和Morton(HJM)[2]为代表，直接采用完全零债券价格曲线的无套利利差，或对利率衍生品定价的远期利率期限结构.本文将这种方法称作远期利率(或HJM)模型.第二组方法建立在瞬态即期利率的利差基础之上[3-8].有关第二组模型的文献大都与Cox，Ingersoll和Ross[9]的观点一致，即使内生的利率期限结构(和波动结构)适合于所观测的期限结构，而这又是通过随机因子过程的非独立时间参数来实现的.两种模拟利率期限结构以及随之而来的衍生品评价的随机行为相互之间是密切相关的.事实上，一些模型在数学上的等价性可以很容易地建立起来.

1 数据分析与模型的选择

检测利率期权评价模型的第一步就是要预先选择模型的基本特征，它涉及驱动利率期限结构因素的数量和这些因素随机过程的函数形式.

首先使用主要因素分析法来决定因子的数量.由于不同期限收益之间的高度相关性，因而两个因素解释了利率期限结构中变量的95%以上.这一发现在上世纪70年代至90年代的不同时期都是成立的.Litterman和Scheinkman报告了美国市场上相似的结果[10].这里，仅考虑单因子和双因子模型.

1.1 单因子模型

单因子远期利率模型最与众不同的特征是远期利率波动的函数形式.Amin和Morton[11]检验了各种小范围的(一个和两个参数)参数，发现参数数量比所使用的模型的形式对模型的行为有着更强的影响.二参数模型一般能更好地适应于价格.事实上，具有能在内外样本最好的适应性的模型是具有线性比例波动函数的二参数模型.可是，单参数模型的参数估值更为稳定且它能从其观测

① 收稿日期：2000-06-07；修订日期：2001-01-08.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(79970015)；国家社会科学基金资助项目(00BJY013).
作者简介：谢 赤(1963-)，男，湖南株州人，博士，教授，博士生导师.

到的误定价赚取更多更稳定的利润. Amin 和 Morton 认为,具有不变波动的模型(绝对模型)看起来在单参数模型中是较好的.

由这些研究,可以仔细观察两个单因子 HJM 模型:一个单参数模型和一个双参数模型. 这个单参数模型具有不变波动性,实际上是 Ho-Lee 模型的连续时间形式. 上述双参数模型具有线性比例波动性.

对单因子即期利率模型的理解可从短期利率 r 过程的含义开始. 联系到对其它市场的观察,发现如果利率值的水平位置较低(高),则短期利率上升(下降)的可能性大于其下降(上升). 另外,大的利率波动发生在高利率时期,缓和的变动发生在低利率时期. 因此,对具有瞬态波动 $\sigma r^{\in}$ 的短期利率的平均还原过程使用标准模型. 与 Chan 等[12] 的结果(对指数 $\in$ 其值为 1.5)相反,发现该值在 0.5 和 1 之间. 这些估值带来一个 r 的随机微分方程的唯一解.

1.2　双因子模型

对双因子远期利率模型必须要确定好两个(分别针对每一个因子)波动函数. 考虑两种不同的结构:在第一种情形中,假设两个波动函数都独立于远期利率的水平;在第二种情形中,两个波动函数都与远期利率成比例. 通过主要因素分析法实际确定了两个双因子模型中的波动函数的准确形式.

两个实证发现会影响选择所考察的两个双因子即期利率模型的状态变量. 主要因素分析与回归分析结合说明,第一个因子可以由收益曲线的水平确定,第二个因子与长期利率与短期利率的利差密切相关. 用这些发现作为构建第一个双因子模型的基础,它使用一个长期利率及其与短期利率间的利差作为因子. 这一基本思路可追溯到 Brennan 和 Schwartz[13] 与 Schaefer 和 Schwartz[14] 等人的研究.

第二个双因子模型以短期利率波动展现了典型的波动集束发现这一基础. 因此,具有随机短期利率波动的模型也许能对数据以合适的描述. 这一模型代表了 Longstaff 和 Schwartz[15] 方法的一般化形式.

两种双因子即期利率模型都是期限结构仿射模型群的特例[16],虽然它们在数学上是等价的,但其实际中表现大不相同.

2　模型与基本实施步骤的评述

2.1　远期利率模型

这里对本研究中使用的 HJM 方法的具体实施作一评述. 本文并不对这一方法作全面讨论,而只将焦点集中在远期利率模型的最简单的起源上.

表 1 总结了波动函数的参数含义. $\sigma(t,T,f)$ 表示单因子模型的波动函数,$\sigma_1(t,T,f)$ 和 $\sigma_2(t,T,f)$ 表示双因子模型的两个波动函数;f 表示在日期 T 瞬态借入或贷出的日期 t 的瞬态远期利率 $(t \leqslant T)$;σ,σ_0 和 σ_1 为正的参数;$\sigma_1(t,T)$ 和 $\sigma_2(t,T)$ 为 t 和 T 的函数,可由实证确定. 为了避免有限时间内远期利率过程的膨胀,用一个大的正数 M 来约束比例波动.

表 1　远期利率模型

A 组　单因子模型	
$\sigma(t,T,f) \equiv \sigma$	绝对 I
$\sigma(t,T,f) = \sigma_0 + \sigma_1(T-t)\min(f,M)$	线性比例
B 组　双因子模型	
$\sigma_1(t,T,f) = \sigma_1(t,T)$	
$\sigma_2(t,T,f) = \sigma_2(t,T)$	绝对 Ⅱ
$\sigma_1(t,T,f) = \sigma_1(t,T)\ \min(f,M)$	
$\sigma_2(t,T,f) = \sigma_2(t,T)\ \min(f,M)$	比例 I

这一方法的基础是整个瞬态远期利率曲线. HJM 从驱动这些远期利率动差的非特定因素的固定数量开始

$$\mathrm{d}f(t,T) = \alpha(t,T)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{2}\sigma_i(t,T,f)\mathrm{d}z_i(t) \qquad (1)$$

式中,$f(t,T)$ 表示在日期 T 借入或贷出了日期 t 的瞬态远期利率$(T \geqslant t)$;$z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 表示独立一维布朗运动;$\alpha(t,T)$ 和 $\sigma_i(t,T,f)$ 为期限 T 的远期利率的移动和波动系数. 正如 HJM 所显示的,当大量的有规律条件和一个无套利条件满足时,利率中性量度下的远期利率移动将由波动函数 $\sigma_i(t,T,f)$ 唯一地确定

$$\alpha(t,T) = \sum_{i=1}^{2}\sigma_i(t,T,f)\int_t^T\sigma_i(t,s,f)\mathrm{d}s \qquad (2)$$

如前所述,主要关注这一方法的 4 个方面的特征:两个单因子模型和两个双因子模型,其波动函数的参数说明见表 1.

任何一种远期利率衍生品的评价模型实施的第 1 步都是估值目前收益曲线，它用在当前远期利率曲线 $f(0,T)$ 形式的远期利率模型中.

第 2 步要对波动参数进行估值，这一点由远期利率的时间序列来完成. 可分别由远期利率变化和相对远期利率变化直接得到两个单因素模型的波动参数. 使用主要因子分析法来确定双因子模型中的远期利率 $f(t,T)$ 的波动和两个独立因子的波动.

第 3 步是计算期权价格，这里通过构建一个二叉树模型束在风险中性度量法下离散方程(1). 对线性比例和比例 Ⅱ 远期利率模型，这个二叉树是非重新组合的.

2.2　即期利率模型

不同于对与可观测当前期限结构相关的期限结构的随机行为进行定义的远期利率模型，即期利率模型必须适合于当前利率与波动. 按照 Cox 等[7] 的观点，通过随机因素过程的非独立时间参数来实现这一适应性.

这里，在像 Cox 等人建立的一般均衡中衍生的那样的衍生品基本评价方程的基础上构建起即期利率模型的思路. 如果在时刻 T 清算的衍生品价值是一个充分光滑函数 $F(x_1,x_2,t,T)$，其中 x_1，x_2 具有移动和离散函数 $\mu_i(x_i,t)$，$\sigma_i(x_i,t)$，$i=1,2$，那么 F 将满足下列偏微分方程

$$F_t + F_{x1}[\mu_1 - \theta_1\sigma_1] + F_{x2}[\mu_2 - \theta_2\sigma_2] + F_{x1x1}\frac{1}{2}\sigma_1^2 - F_{x2x2}\frac{1}{2}\sigma_2^2 = rF \tag{3}$$

这里，r 表示瞬态无风险利率；$\theta_1(x_1,x_2,t)$ 和 $\theta_2(x_1,x_2,t)$ 为两个因素的风险市场价格. 它服从 θ_1 和 θ_2 仅为状态变量和时间的实际定价的函数的非套利观点，F 的下标表示偏导数.

本研究通过确定驱动各因素的随机过程的性质、风险的市场价格的函数形式及各因素与瞬态即期利率 r 之间的关系来推导出 3 个即期利率模型. 表 2 总结了基于单因子和双因子模型的各种假定. 其中，z_1 和 z_2 表示驱动双因子模型的独立一维布朗运动，k，k_x 和 k_y 为正的平均反转参数，r，r_s，r_x，r_y 为正的参数，表示各个因素的长期静态均值，$\lambda(t)$ 表示非独立时间函数，Φ 为固定参数.

表 2　即期利率模型

因　素	过　程　性　质	因素风险	短期利率
短期利率：r	$dr = k(\gamma - r)dt + \sigma r^{\epsilon} dz$	$\theta = \lambda(t)$	给定
长期利率：l	$dl = \sigma_l \sqrt{l}\, dz_1$	$\theta_1 = \Phi\sqrt{l}$	
长短期利差：s	$ds = (r_s - s)dt + \sigma dz_2$	$\theta_2 = \lambda(t)$	$r = l - s$
两个未确定因子：x，y	$dx = k_x(r_x - x)dt + \sigma_x \sqrt{x}\, dz_1$	$\theta_1 = 0$	
与短期利率及期波动线性相关	$dy = k_y(r_y - y)dt - \sigma_y \sqrt{y}\, dz_2$	$\theta_2 = \lambda(t)\sqrt{y}$	$r = x + y$

1) 单因素即期利率模型

这里假设短期利率 $r(t)$ 的动差表现了均值反转，且发散系数取决于短期利率水平. k，r，σ 和 $\in$ 为正的常数.

Hull 和 White 方法的基本思路就是为了在零债券情况下使方程(3) 的解与外生给定的零债券价格的期限结构匹配，允许在 r 的风险中性过程中出现非独立时间参数. 如果弹性参数 $\in$ 为正，则必须定量地实行这一标准. 通常任何参数都可选作非独立时间函数，然而，出于经济与技术上原因，选择了风险的市场价格. 原则上，如果假设第二参数取决于时间，则模型也可适合外生给定的当前波动结构. 不过这一方法有着明显的缺点：第二个非独立时间参数是不稳定的且部分难以实现未来内生的波动结构(文[4,16] 也报告了类似的结果).

在这些发现中，并没有针对具有第二个非独立时间参数的当前波动结构修正模型，而只是将内生的波动结构的两点适应于可观测的一个短期利率与长期利率的波动. 中期利率的波动可由模型插值得到.

这种狭义的适应方法的优点是模型会产生稳定的未来波动结构. 技术上，由(固定) 均值反转参数 k 发展模型的两点标准化到当前波动结构，该参数决定了瞬态利率波动向长期利率波动的转移[17].

模型的实施分 4 步：

第 1 步　由息票债券的价格确定零债券的

当前收益曲线；

第 2 步 采用 Euler 离散化来估值短期利率过程的移动与波动参数. 由一个月货币市场利率的时间序列观测得到最大可能性估值；

第 3 步 通过采用模拟决定非独立时间参数 $\lambda(t)$ 和参数 k 来实现对期限 $\overline{T}=9$ 年的长期利率的当前收益曲线和波动的吻合，这就要在下列条件下解出具有一个状态变量 $x_1=r$ 的偏微分方程(3)：

a. 零债券的期限条件 $F(r,T,T)\equiv 1$

b. 内生的零债券价格对当前瞬态利率 $r(0)$ 基础上的观测价格 $F(T)$ 的适应条件

$$F(r(0),0,T)=\hat{F}(T)\quad (0<T\leqslant\overline{T})\tag{4}$$

c. 长期利率波动的适合条件

$$-\frac{1}{\overline{T}}\frac{F_r(r(0),0,\overline{T})}{F(r(0),0,\overline{T})}=v\tag{5}$$

式(5)的左边表示期限 $\overline{T}$ 的零债券的内生收益波动与短期利率波动 $\sigma r(0)^{\xi}$ 的比率，右边表示期限 $\overline{T}$ 的零债券收益的历史观测波动与短期利率波动的比率. 采用 Uhrig 和 Walter 提出的反转隐性有限差方法来对式(3)至(5)求解；

第 4 步 由求解式(3)并结合完全隐性 Crank-Nicholson 方法的看涨和看跌的边界条件来决定利率担保值. 对时间变量采用一天的时间步长 Δt，对转移状态变量 $z=1/(1+r/r(0))$ 采用 1/30 的刻度. Brennan 和 Schwartz 提出的状态变量的变动具有将原始状态空间[0,∞]转换成有界区间[0,1]，且边界条件更容易处理的优点[14]. 在 $z=0(r=\infty)$ 注意债券和欧式期权的价值为零，在 $z=1(r=0)$ 定量采用转换后的偏微分方程(3)的特殊结构.

2) 具有长期利率与利差的双因子模型

在数据分析过程中的一些发现以及两个因素变化间相关度小于 0.23，使得要对第 2 个模型中的状态变量作出选择. 这些实际现象说明，使用长期利率 l 与长期利率与短期利率 r 之间利差作为独立随机因素的双因子模型似乎可以描绘出收益曲线的动差.

对德国债券市场中长期利率的时间序列行为的考察说明，只存在长期利率的轻微的均值反转趋势. 对均值反转参数 k_l 过程 $\mathrm{d}l=k_l(r_l-l)\mathrm{d}t+\sigma_l l^{\xi}\mathrm{d}z$ 的离散形式的最大可能估值在 1% 的水平上与零并没有显著差别.

此外，为了保持负的长期利率 l，以保持模型分析上的优势，将长期利率模拟成具有离散系数的平方根表达式 $\sigma_l\sqrt{l}$ 的倍数. 假设利差过程服从 Ornstein-Uhlenbeck 过程，该过程可以取正式也可以取负式. 参数 σ_l, r_s 和 σ_s 为正的常数.

借助于利差风险的非独立时间市场价格可校正利率期限结构模型，由于变量的分离性 Ornstein-Uhlenbeck 与利差过程的选择，可以解出这一问题，而且这个利差过程保证了内生的利率期限结构能适合于每个观测过程，这一点对使用了非负状态变量的双因素模型来说并不普遍成立.

采用长期利率风险的市场价格来克服在其中两个因素都是利率双因子模型中普遍存在的问题[16]. 状态变量 l 标以"长期利率"，但并不具备这一性质，因为零债券的价格同时取决于状态变量 s 和 l. 因此，具有与 l 相关的期限的零债券有着并不仅仅依赖于 l 的期限的收益. 这种内部不协调可能受到长期利率的风险市场价格的合适选择的影响.

该模型的执行也由 4 步组成. 第 1 步与单因子模型的第一步相同；第 2 步缩小到长期利率与利差的两个波动的估值. 这两个参数也反映了有关波动结构的信息；第 3 步中内生的零债券价格在分析上适合于由采用解 $F(l,s,t,T)=G(l,t,T)H(s,t,T)$ 分离性观测到的价格；第 4 步借助于方向改变隐含方法计算出期权值.

时间与状态变量的栅极尺寸统一固定为与单因子模型的一致，由于状态变量 s 既可以取正值又可以取负值，因而选取一个特殊的处理方法：在数字化方法中将状态变量限定在区间[$-\infty$, $l(0)$]内. 选择上边界 $l(0)$ 来保证 l 的当前水平的非负的短期利率，通过状态变量的适当变化，将原始状态空间[$-\infty$, $l(0)$]转换成状态空间[0,1]. 对 $s=-\infty$，注意债券与欧式期权的价值为零，对 $s=l(0)$，施加以边界条件，设第二衍生品 F_{ss} 等于零.

3) 具有短期利率及其波动的双因子模型

由前述数据分析步骤可知，短期利率展现出波动束，这一现象可通过随机波动来近似模拟. 由于短期利率波动是期权定价中的关键变量，因而

前景看好的方法应该是要给单因子模型加上作为第二状态变量的利率波动水平.

由此得到的模型表示了由 Longstaff 和 Schwartz 提出的一般均衡模型的一般化形式，他们将其模型建立在如表2所描述的两个独立因素 x 和 y 的随机进展假设的基础上，其中 k_i，r_i，σ_i，r_i 和 σ_i 为(正)参数[15]. 短期利率 r 及其瞬态方差 V 作为均衡的部分来内生确定

$$r = x - y \tag{6}$$

$$V = \sigma_x^2 x + \sigma_y^2 y \tag{7}$$

通过这个线性方程组，可以表示出按照可观测状态变量 r 和 V 的利率衍生品的基础评价方程(3).

为了实现与当前期限结构的一致，通过引入非独立时间风险参数将模型一般化. 由于状态变量 x 和 y 中偏微分方程的分离性，可以减小内生到外生利率的期限结构适应性，再到 Cox 等人的模型内的适应性问题.

实施方法像其它模型一样也包括4个步骤：第1步涉及当前利率期限结构的估值；第2步中参数的估值比其它两个即期利率模型相比要复杂些，这是因为短期利率的波动并不是直接可观测的. 按照文[15]，使用两阶段方法. 在第1阶段，由使用GARCH模型来估值短期利率的波动；在第2阶段，对描述短期利率及其波动的运动的参数估值，为此，要使 r 和 V 的长期静态非条件分布的前两个时点相等.

除了这两个方程外，还通过选择波动参数 σ_x^2 和 σ_y^2 分别作为 $V(t)/r(t)$ 最小值和最大值来得到其它两个条件. 由这6个条件，通过求解出非线性方程组来计算出模型的6个参数.

第3步中当前期限结构的模型的标准就遵循与单因素模型相同的方法. 这里也采用反转隐性差异方法. 第4步中期限价格的计算与其它双因素即期利率模型中的方法一致.

参 考 文 献：

[1] Ho T S Y, Lee S-B. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims[J]. Journal of Finance, 1986, (41): 1001-1029

[2] Heath D, Jarrow R, Morton A. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation[J]. Econometrica, 1992, (60): 77-105

[3] Hull J, White A. Pricing interest-rate-derivative securities[J]. Review of Financial Studies, 1990, (3): 573-592

[4] Hull J, White A. One-factor interest-rate models and the valuation of interest-rate derivative securities[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1993, (28): 235-254

[5] Black F, Derman E, Toy W. A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options[J]. Financial Analysts Journal, 1990, (46): 33-39

[6] Black F, Karasinski P. Bond and option pricing when short rates are log-normal[J]. Financial Analysts Journal, 1991, (47): 52-59

[7] Jamshidian F. Forward induction and construction of yield curve diffusion models[J]. Journal of Fixed Income, 1991, (1): 62-74

[8] Sandmann K, Sondermann D. A term structure model and the pricing of interest-rate derivatives[J]. Review of Futures Markets, 1993, (12): 391-423

[9] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A theory of the term structure of interest rates[J]. Econometrica, 1985, (53): 385-407

[10] Litterman R, Scheinkman J. Common factors affecting bond returns[J]. Journal of Fixed Income, 1991, (1): 54-61

[11] Amin K I, Morton A. Implied volatility functions in arbitrage free term structure models[J]. Journal of Financial Economics, 1994, (35): 141-180

[12] Chan K C, Karolyi G A, Longstaff F A, et al. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate[J]. Journal of Finance, 1992, (47): 1209-1227

[13] Brennan M, Schwartz E. A continuous time approach to the pricing of bonds[J]. Journal of Banking and Finance, 1979, (3): 133-155

[14] Schaefer M S, Schwartz E S. A two factor model of the term structure: An approximate analytical solution[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1981, (19): 301-329

[15] Longstaff F, Schwartz E. Interest-rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model[J]. Journal of Finance, 1992, (47): 1259-1282

[16] Duffie D, Kan R. A yield-factor model of interest rates[J]. Mathematical Finance, 1996, (64): 379-406

[17] Uhrig M, Walter U. A new numerical approach for fitting the initial yield curve[J]. Journal of Fixed Income, 1996, (5): 82-90

Compare analysis of forward and spot models for valuing interest-rate options

XIE Chi

College of Business Management, Hunan University, Changsha 410082, China

Abstract: The object of this article is to investigate the question of which interest-rate options valuation models are better suited to support the management of interest-rate risk. We test seven spot-rate and forward-rate models with one and two factor forward-rate model for interest-rate warrants for the period from 1990 to 1993 and identify a one-factor forward-rate model and two spot-rate models with two factors that are not significantly outperformed by any of the other four models.

Key words: interest-rate option; forward rate; spot rate