第 5 卷第 1 期 管 理 科 学 学 报 Vol.5 No.1
2002 年 2 月 JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA Feb., 2002

概率准则下的两期投资决策问题[①]

韩其恒, 唐万生, 李光泉
(天津大学系统工程研究所, 天津 300072)

摘要: 概率准则是以期望收益率为导向的, 是某些情况下投资者的投资决策准则, 它具有一定的现实指导意义. 在一般情况下, 证券收益率在不同时期的概率分布会不同而且相关. 因此, 提出了一类概率准则下的两期投资决策问题, 建立了其数学模型. 对于证券收益率为连续及离散型随机变量这两种情况分别进行了讨论, 给出了求解最优策略的方法及投资决策的步骤, 并举例予以了说明.

关键词: 投资决策; 概率准则; 收益率
中图分类号: F830.59 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2002)01-0055-04

0 引 言

对于以收益期望值或以方差为准则的单期投资决策问题, 已有很多论述[1-13]. 以收益的期望值或以代表风险大小的方差为投资决策准则诚然是一种较为理性的投资选择, 但在现实生活中决策者进行投资决策时, 并非一定遵循理性原则, 现实有时需要决策者为达到一定目的或目标而采取带有一定风险性的行为, 为研究此类问题, 本文提出了概率准则下的投资决策模型. 概率准则与经济准则不同[14,15], 在很多不确定情况下使用概率准则更符合实际情况, 概率准则下的投资决策就是通过选择决策变量使实际收益率不小于期望收益率的概率达到最大, 并以此作为其投资决策的准则, 它是某些情况下投资者选取投资决策的依据, 具有一定的现实意义. 概率准则是以期望收益率为导向的, 不同的投资者可能会有不同的期望收益率, 对于不同的期望收益率, 投资者会采取不同的投资策略. 一般来讲, 若期望收益率较大, 也就是说投资者的侥幸投机心理较浓, 那么投资者就会孤注一掷, 采取风险较大的投资策略, 反之若期望收益率较小, 那么投资者就会采取风险较小的投资策略. 另外, 证券收益率在不同时期的概率分布一般会不同并且相关, 因此在概率准则下, 如果投资者仅能对下一期的证券收益率作出经验预测的话, 那么他只能作出单期投资决策. 但如果投资者亦能够对第二期的证券收益率作出与第一期预测相关的经验预测的话, 那么随着信息量的增大, 投资者就能够作到从长远出发, 进行长期规划, 亦即对两期作出投资决策, 该决策对于其目标而言, 一定不劣于对两个单期各自独立作出的投资决策.

1 模型建立

假定用 k 表示期数, x_k 表示投资者在第 k 期在银行所拥有的无风险投资量, $r \in (0,1)$ 是银行利率, 它是一个常数. y_k 表示投资者在第 k 期在证券市场所拥有的有风险投资量. 不失一般性, 不妨设起始阶段 $x_0 > 0, y_0 = 0$, 假设投资者在进行第 k 期投资决策时, 可在 x_{k-1} 与 y_{k-1} 之间进行自由转换, 从银行到证券市场的资金转换量用决策变量 u_k 表示, $u_k \in [-y_{k-1}, x_{k-1}]$. 并设投资者对第 1 期与第 2 期的证券收益率所作出的预测为随机变量 ξ_1 与 ξ_2, 其联合分布密度函数为 $f(x,y)$, $x,y \in (-1,+\infty)$, 边缘分布密度函数分别为

① 收稿日期: 2000-08-17; 修订日期: 2000-11-28.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(79700016).
作者简介: 韩其恒(1963-), 男, 博士生.

$f_1(x)$ 与 $f_2(x)$, 那么状态方程就为

$$\begin{cases} x_k = (1+r)(x_{k-1}-u_k) & (1) \\ y_k = (1+\xi_k)(y_{k-1}+u_k) & (2) \end{cases}$$

其中 $k = 1, 2$

目标函数或概率准则是使第 2 期末的总体收益率大于某一期望值 r^* 的概率最大, 其中 $(1+r^*) > (1+r)^2$.

$$\max J = \max_{u_1, u_2} \Pr\left\{\frac{x_2+y_2-x_0}{x_0} \geq r^*\right\} \quad (3)$$

式(1)-(3) 是一类投资决策问题, 通过选择决策变量 u_1 与 u_2 使 J 最大

2 两期投资决策

2.1 第 2 期投资决策变量 u_2 的选择

当对第 2 期投资决策变量 u_2 进行选择时, 第 1 期的事件已经发生, 所以不妨设第 1 期 ξ_1 的实际取值为 A, 第 1 期的投资决策为 u_1. 由式(1), (2) 可得

$$\begin{cases} x_2 = (1+r)^2(x_0-u_1) - (1+r)u_2 \\ y_2 = (1+\xi_1)(1+\xi_2)u_1 + (1+\xi_2)u_2 \end{cases}$$

将 $\xi_1 = A$ 及上式带入式(3) 可得

$$J = \Pr\left\{\frac{(1+A)u_1+u_2}{x_0}\xi_2 \,\middle|\, (\xi_1 = A) \geq (1+r^*) - (1+r)^2 + \frac{(1+r)(r-A)u_1}{x_0} + r\frac{(1+A)u_1+u_2}{x_0}\right\}$$

当 $\frac{u_1}{x_0} = 0$ 时, 由上式可以看出, u_2 取的值越大, J 值越大, 因此选择 $u_2 = x_1$, 即将资金全部转入证券市场, 这时

$$J(0) = \frac{1}{f_1(A)}\int_{\frac{r^*-r}{1+r}}^{+\infty} f(A, y)\,\mathrm{d}y$$

当 $\frac{u_1}{x_0} \in (0, 1]$ 时, 若

$$(1+r^*) - (1+r)^2 + \frac{(1+r)(r-A)u_1}{x_0} > 0$$

即若 $A \in \left(-1, r + \frac{[(1+r^*)-(1+r)^2]x_0}{(1+r)u_1}\right)$

那么 $\frac{(1+A)u_1+u_2}{x_0}$ 的值越大, J 值越大, 所以选择 $u_2 = x_1$, 将资金全部转入证券市场, 这时

$$J(u_1) = \frac{1}{f_1(A)}\int_{\frac{1+r^*}{(1+r)+(A-r)\frac{u_1}{x_0}}-1}^{+\infty} f(A, y)\,\mathrm{d}y$$

若 $(1+r^*) - (1+r)^2 + \frac{(1+r)(r-A)u_1}{x_0} = 0$,

即若 $A = r + \frac{[(1+r^*)-(1+r)^2]x_0}{(1+r)u_1}$, 选择 $u_2 = -(1+A)u_1 = -y_1$, 将资金全部转入银行, 这时 $J(u_1) = 1$.

同理, 若

$$(1+r^*) - (1+r)^2 + \frac{(1+r)(r-A)u_1}{x_0} < 0$$

即若 $A \in \left(r + \frac{[(1+r^*)-(1+r)^2]x_0}{(1+r)u_1}, +\infty\right)$, 选择 $u_2 = -y_1$, 将资金全部转入银行, 这时 $J(u_1) = 1$, 目标(3) 一定能实现

由以上分析可得:

定理 1 当 $\frac{u_1}{x_0} = 0$ 时, 选择 $u_2 = x_1$, 将资金全部转入证券市场, 这时

$$J(0) = \frac{1}{f_1(A)}\int_{\frac{r^*-r}{1+r}}^{+\infty} f(A, y)\,\mathrm{d}y$$

当 $\frac{u_1}{x_0} \in (0, 1]$ 时, 若

$$A \in \left(-1, r + \frac{[(1+r^*)-(1+r)^2)]x_0}{(1+r)u_1}\right)$$

选择 $u_2 = x_1$, 将资金全部转入证券市场, 这时

$$J(u_1) = \frac{1}{f_1(A)}\int_{\frac{1+r^*}{(1+r)+(A-r)\frac{u_1}{x_0}}-1}^{+\infty} f(A, y)\,\mathrm{d}y$$

若 $A \in \left[r + \frac{[(1+r^*)-(1+r)^2]x_0}{(1+r)u_1}, +\infty\right)$, 选择 $u_2 = -y_1$, 将资金全部转入银行, 这时

$$J(u_1) = 1$$

定理 1 的直观意义为: 若第 1 期资金全部在银行, 由于 $(1+r^*) > (1+r)^2$, 为保证 J 值最大, 第 2 期就应将资金全部转入证券市场 若第 1 期一部分资金在证券市场, 那么只有当第 1 期证券的实际收益率大到一定程度时, 这时将资金全部转入银行, 能保证目标一定能实现 否则就将资金

全部转入证券市场, 以获取较大的 J 值

2 2　第 1 期投资决策变量 u_1 的选择

在进行第 1 期投资决策时, 第 1 期及第 2 期事件均未发生 对于固定的 u_1, u_2 的选择及目标函数 J 的值均在随着 ξ_1 的实际取值在变动 所以选择这样的 u_1, 它使 $E[J(u_1)]$ 达到最大, 即使 $J(u_1)$ 的期望值达到最大

$$\max_{u_1} E[J(u_1)] \tag{4}$$

由定理 1 及期望值的定义立刻可以得到如下定理

定理 2　当 $\frac{u_1}{x_0} = 0$ 时

$$E[J(0)] = \int_{\frac{r^*-r}{1+r}}^{+\infty} f_2(y)\,dy$$

当 $\frac{u_1}{x_0} \in (0, 1]$ 时

$$E[J(u_1)] = \int_{-1}^{r+\frac{(1+r^*)-(1+r)^2}{1+r}\frac{x_0}{u_1}} dx \cdot \int_{\frac{1+r^*}{(1+r)+(x-r)\frac{u_1}{x_0}}-1}^{+\infty} f(x,y)\,dy + \int_{r+\frac{(1+r^*)-(1+r)^2}{1+r}\frac{x_0}{u_1}}^{+\infty} f_1(x)\,dx$$

由定理 2 及复合函数的求导法则, 不难得到:

定理 3　当 $\frac{u_1}{x_0} \in (0, 1]$ 时

$$\frac{dE[J(u_1)]}{du_1} = \frac{(1+r^*)-(1+r)^2}{1+r}\frac{x_0}{u_1^2} \cdot \int_{-1}^{r} f\left[r+\frac{(1+r^*)-(1+r)^2}{1+r} \cdot \frac{x_0}{u_1}, y\right]dy +$$

$$\int_{-1}^{r+\frac{(1+r^*)-(1+r)^2}{1+r}\frac{x_0}{u_1}} f\left[x, \frac{1+r^*}{(1+r)+(x-r)\frac{u_1}{x_0}} - 1\right] \cdot \frac{(1+r^*)(x-r)x_0}{[(1+r)x_0+(x-r)u_1]^2}dx$$

这样, 得到求解投资决策问题(1)-(3) 的步骤如下: 首先根据定理 2, 定理 3 及式(4) 作出第 1 期投资决策 u_1, 然后根据定理 1 作出第 2 期投资决策 u_2

2 3　证券收益率为离散型随机变量时的两期投资决策问题

当证券收益率为离散型随机变量时, 两期投资决策问题的状态方程为

$$\begin{cases} x_k = (1+r)(x_{k-1} - u_k) & (1') \\ y_k = (1+\xi_k)(y_{k-1} + u_k) & (2') \end{cases}$$

其中 $k = 1, 2$

设 $\xi_k (k = 1, 2)$ 的取值范围为 $-1 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$, 其联合分布密度为

$$P_{ij} = \Pr\{\xi_1 = a_i, \xi_2 = a_j\}, (i, j = 1, 2, 3, \cdots)$$

边缘密度为

$$P_i^1 = \sum_{j=1}^{+\infty} P_{ij}, P_j^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} P_{ij}, (i, j = 1, 2, 3, \cdots)$$

目标函数为

$$\max J = \max_{u_1, u_2} \Pr\left\{\frac{x_2 + y_2 - x_0}{x_0} \geq r^*\right\} \tag{3'}$$

其中 $(1+r^*) > (1+r)^2$.

设 ξ_1 的实际取值为 a_A, $\frac{r^*-r}{1+r} \in (a_{B-1}, a_B]$, $r + \frac{[(1+r^*)-(1+r)^2]x_0}{(1+r)u_1} \in (a_{C(u_1)-1}, a_{C(u_1)}]$, $\frac{1+r^*}{(1+r)+(a_A-r)\frac{u_1}{x_0}} - 1 \in (a_{D(A,u_1)-1}, a_{D(A,u_1)}]$, 同证券收益率为连续型随机变量的情形一样, 有如下结论:

定理 1'　当 $\frac{u_1}{x_0} = 0$ 时, 选择 $u_2 = x_1$, 将资金全部转入证券市场, 这时

$$J(0) = \frac{1}{P_A^1}\sum_{j=B}^{+\infty} P_{Aj}$$

当 $\frac{u_1}{x_0} \in (0, 1]$ 时, 若 $a_A \in \left(-1, r + \frac{[(1+r^*)-(1+r)^2]x_0}{(1+r)u_1}\right)$, 选择 $u_2 = x_1$, 将资金全部转入证券市场, 这时

$$J(u_1) = \frac{1}{P_A^1}\sum_{j=D(A,u_1)}^{+\infty} P_{Aj}$$

若 $a_A \in \left[r + \frac{[(1+r^*)-(1+r)^2]x_0}{(1+r)u_1}, +\infty\right)$, 选择 $u_2 = -y_1$, 将资金全部转入银行, 这时 $J(u_1) = 1$, 目标一定能实现

定理 2' 当 $\frac{u_1}{x_0} = 0$ 时, $E[J(0)] = \sum_{i=B}^{+\infty} P_i^2$

当 $\frac{u_1}{x_0} \in (0, 1]$ 时,

$$E[J(u_1)] = \sum_{i=1}^{C(u_1)-1} \sum_{j=D(i,u_1)}^{+\infty} P_{ij} + \sum_{i=C(u_1)}^{+\infty} P_i^1$$

求解投资决策问题(1')-(3')的步骤如下:首先根据定理 2'作出第 1 期投资决策 $\max_{u_1} E[J(u_1)]$, 然后根据定理 1'作出第 2 期投资决策 u_2.

3 例子

设 $r = 0.05$, $r^* = 0.15$, ξ_1 与 ξ_2 为离散型随机变量, $a_1 = -0.1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0.2$, $P_{ij} = 0$ ($i > 3$ 或 $j > 3$). 设 ξ_1 的实际取值为 a_A ($A = 1, 2, 3$).

经计算, 第 1 期投资决策应为 $\frac{u_1}{x_0} \in \left[\frac{19}{63}, \frac{11}{18}\right]$.

由定理 1', 当 $\frac{u_1}{x_0} \in \left[\frac{19}{63}, \frac{11}{18}\right]$ 时, 由于

$$0 < r + \frac{[(1+r^*) - (1+r)^2]x_0}{(1+r)u_1} \leq 0.2$$

若 $a_A = -0.1$, 即 $A = 1$, 选择 $u_2 = x_1$, 将资金全部转入证券市场, 这时

$$J(u_1) = \sum_{j=D(1,u_1)}^{3} \frac{P_{1j}}{P_1^1} = \frac{P_{13}}{P_{11} + P_{12} + P_{13}}$$

若 $a_A = 0$, 即 $A = 2$, 选择 $u_2 = x_1$, 将资金全部转入证券市场, 这时

$$J(u_1) = \sum_{j=D(2,u_1)}^{3} \frac{P_{2j}}{P_2^1} = \frac{P_{23}}{P_{21} + P_{22} + P_{23}}$$

若 $a_A = 0.2$, 即 $A = 3$, 选择 $u_2 = -y_1$, 将资金全部转入银行, 这时 $J(u_1) = 1$.

4 结论

概率准则是某些情况下投资者的投资决策准则, 它具有一定的现实意义, 在现实生活中作决策时, 决策者并非一定遵循理性原则, 现实有时需要决策者为达到一定的目的而采取带有一定风险性的行为. 虽然决策者对未来的预测能力有限, 但是实际上每人都是根据个人经验所得到的预测在进行决策. 如果决策者能够预见得长远一些, 那么就能作到从长远出发, 进行长期规划. 本文从理论角度探讨了在概率准则下的两期投资决策问题, 给出了求解最优策略的方法及投资决策的步骤.

参 考 文 献:

[1] Markowitz H M. Portfolio selection[J]. J. Finance, 1952, (3): 151-158

[2] Sharpe W F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under condition of risk[J]. Journal of Finance, 1964, (19): 425-442

[3] Markowitz H M. Foundation of portfolio theory[J]. J. Finance, 1991, (2): 469-477

[4] Fama E F, Kenneth R F. The cross-section of expected stock return[J]. Journal of Finance, 1992, 47: 427-465

[5] Alexander G J. Short selling and efficient sets[J]. The Journal of Finance, 1993, 48(4): 1497-1506

[6] Roll R, Ross S A. On the cross-sectional relation between expected returns and betas[J]. Journal of Finance, 1994, 101-121

[7] 唐小我, 傅 庚, 曹长修. 非均匀条件下组合证券决策方法研究[J]. 系统工程, 1994, 12(6): 23-38

[8] 程仕军. 极大化证券组合的投资收益率[J]. 系统工程, 1994, 12(4): 7-10

[9] 朱玉旭, 黄洁刚. 最小方差组合证券集及其特性分析[J]. 系统工程理论方法应用, 1996, 5(2): 52-60

[10] Smidts A. The relationship between risk altitude and strength of preference: a test of intrinsic altitude[J]. Management Science, 1997, 43(3): 357-370

[11] 刘志强. 现代资产组合理论与资本市场均衡模型[M]. 北京: 经济科学出版社, 1998

[12] 刘海龙, 樊治平, 潘德惠. 一种证券收益与风险的动态模型的辩识方法[J]. 管理科学学报, 1999, 2(1): 37-41

(下转第 92 页)

105(1/2): 1-45

[12] 徐振宁, 姚 莉, 张维明等. 基于MAS的协作信息系统试验平台的设计与实现[J]. 计算机工程与应用, 2000, 36(7): 31-34

Study of GDSS based on MAS

XU Zhen-ning, ZHANG Wei-ming, CHEN Wen-wei

Department of Management Science and Engineering, The National University of Defense Technology, Changsha, 410073, China

Abstract: GDSS has great difference with traditional DSS on working style and architecture. In the network environment, decision in organization needs a kind of open GDSS architecture and cooperation working style. This paper presents a new GDSS architecture based on MAS and a cooperation decision model under the architecture. Based on architecture, we develop a prototype of GDSS and figure out the direction of research in the future.

Key words: multi-agent system (MAS); GDSS; cooperation; architecture; decision model

(上接第 58 页)

[13] 刘海龙, 郑立辉等. 证券投资决策的微分对策方法研究[J]. 系统工程学报, 1999, 14(1): 69-72

[14] Liu B D, Ku C F. Probability criterion in inventory systems[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Science, 1993, 13(1): 70-75

[15] 梁建峰, 唐万生. 有交易费用的组合证券投资的概率准则模型[J]. 系统工程, 2001, 19(2): 5-10

Problem of two period investment decision-making with probability criterion

HAN Qi-heng, TANG Wan-sheng, LI Guang-quan

Institute of Systems Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China

Abstract: Probability criterion is an investment decision-making criterion of investors in some cases, it has practical significance, its investment decision-making is determined by the expected return rate. Generally speaking, different investors will have different expected return rates, the security's return rates in different periods will have different probability distributions and correlation to each other. In this paper, a problem of two-period investment decision-making with probability criterion is proposed, its mathematical model of an optimal investment decision-making is established. For continuous or discrete random variable of security's return rate, the steps for investment decision-making are derived. Finally, an illustrative example is given.

Key words: investment decision-making; probability criterion; rate of return