研究简报

判断矩阵迁移的信息提取与预测①

王国华, 梁 樑
(中国科学技术大学商学院, 合肥 230026)

摘要: 以不同时间点的判断矩阵为基础, 通过对数最小二乘法求解出其变化信息, 并预测下一时间点的判断矩阵; 同时对判断矩阵的多阶段预测和动态判断矩阵的求解也提出了一种新方法 最后, 以一个算例说明该方法的实施过程

关键词: 判断矩阵; 信息; 预测
中图分类号: O 223 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2002)02-0091-04

0 引 言

现实生活中, 对于社会、经济活动中的许多问题, 专家往往在某一特定时期能够给出较为准确的判断信息, 而不能给出该问题的处于较长时间段内的变化过程的准确判断信息 因此, 如何从多个时间点的专家判断矩阵中提取出问题的变化信息, 对于深入认识问题的内在机制, 从而预测将来的变化趋势和控制其发展方向, 具有极为重要的意义

例如, 国家"八五"、"九五"以及"十五"期间的经济状况, 可以通过"八五"、"九五"的判断信息, 提取出该时间段内的变化信息, 得到经济的变化发展方向, 借此预测"十五"期间的经济状况 事实上, 如果在环境没有发生重大变化的情况下, 可以通过以往多个时期的判断信息的变化趋势, 拟合出各项指标的变化函数, 从而更为准确地预测问题将来的发展状况 为说明问题方便, 主要讨论两个时间段内的情况

1 判断矩阵的迁移

假定在 t 时刻, 判断矩阵 $A(t) = [a_{ij}(t)]_{n\times n}$, $t+1$ 时刻判断矩阵为 $A(t+1) = [a_{ij}(t+1)]_{n\times n}$, 则只需要求出这两个矩阵之间的相互关系, 就得到其变化信息 为表示方便, 令矩阵 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, 为期初判断矩阵, $A^* = [a^*_{ij}]_{n\times n}$ 为期末判断矩阵

令对角矩阵 $R = \mathrm{diag}[r_1, r_2, \cdots, r_n]$, $S = \mathrm{diag}[s_1, s_2, \cdots, s_n]$, $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$, $r_i = s_i^{-1}$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 称对角矩阵 R、S 为矩阵 A (通过 RAS) 迁移到 A^* 的迁移矩阵 对角矩阵 R 对矩阵 A 横向调整, 矩阵 S 对矩阵 A 纵向调整 $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$, 表示对矩阵 A 各行调整的比重之和为 1, 其中 r_i 表示对矩阵 A 第 i 行调整的幅度占矩阵总体调整的比重 $r_i = s_i^{-1}$, 是为了使得在矩阵 A 迁移的过程中不改变矩阵 A 的一致性 显然, 若矩阵 A 为一致性矩阵, 则 RAS 也是一致性矩阵

简证

$$RAS = [r_i a_{ij} s_j]_{n\times n} = \left[r_i a_{ij} \frac{1}{r_j}\right]_{n\times n} \quad (1)$$

则

$$[r_i a_{ij} s_j]_{n\times n} = \left[r_i a_{ij} \frac{1}{r_j}\right]_{n\times n} =$$

$$[(r_j a_{ji} s_i)^{-1}]_{n\times n} = \left[\left(r_j a_{ji} \frac{1}{r_i}\right)^{-1}\right]_{n\times n} \quad (2)$$

① 收稿日期: 2000-08-31; 修订日期: 2001-11-14
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(79570069).
作者简介: 王国华(1976-), 男, 江苏南通人, 博士生

另

$$r_i a_{ij} s_j \cdot r_j a_{jk} s_k = r_i \frac{1}{r_j} a_{ij} a_{jk} r_j s_k = r_i a_{ik} s_k \qquad (3)$$

则

$$r_i a_{ij} s_j = \frac{r_i a_{ik} s_k}{r_j a_{jk} s_k} \qquad (4)$$

可以通过以下优化问题(对数最小二乘法使得 RAS 与矩阵 A^* 最贴近) 求解矩阵 R、S:

$$J = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [\ln(r_i a_{ij} s_j) - \ln a_{ij}^*]^2 \qquad (5)$$

在满足式(5) 的优化问题下, 可以认为迁移矩阵R、S 描述了判断矩阵从A 变化到 A^* 的过程 事实上, 现实中对于许多问题的处理也是通过这种思想实现的 这种方法的本质是将判断矩阵的整个指标体系作为一个整体(系统) 来考虑, 迁移矩阵就是描述了这一系统的各项指标从一个状态(时刻) 到另一个状态的总体变化程度, 因而也就比从各单个指标去描述更为科学、可靠

2 迁移矩阵的求解

令 $R_i = \ln r_i$, $S_i = \ln s_i$,

$$K_{ij} = \ln \frac{a_{ij}^*}{a_{ij}} = \ln a_{ij}^* - \ln a_{ij}$$

则式(5) 转化为

$$J = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (R_i + S_j - K_{ij})^2 \qquad (6)$$

故而

$$J = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (R_i^2 + S_j^2 + 2R_i S_j - 2R_i K_{ij} - 2S_j K_{ij} + K_{ij}^2) \qquad (7)$$

由式(7) 对 R_i 求偏导, 故有

$$\frac{\partial J}{\partial R_i} = 2\sum_{i=1}^{n} R_i + 2\sum_{i=1}^{n} S_j - 2\sum_{j=1}^{n} K_{ij} = 0 \qquad (8)$$

则

$$R_i = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} K_{ij} - \sum_{j=1}^{n} S_j\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}^*}{a_{ij}} - \sum_{j=1}^{n} \ln s_j\right) \qquad (9)$$

由此可得

$$R_i - R_k = \ln \frac{r_i}{r_k} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\ln \frac{a_{ij}^*}{a_{ij}} - \ln \frac{a_{kj}^*}{a_{kj}}\right) \qquad (10)$$

$$\frac{r_i}{r_k} = \exp\left\{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\ln \frac{a_{ij}^*}{a_{ij}} - \ln \frac{a_{kj}^*}{a_{kj}}\right)\right\} = \exp\left\{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln \frac{a_{ij}^* a_{kj}}{a_{kj}^* a_{ij}}\right\} \qquad (11)$$

至此, 就得到了所有 r_i 与 r_j 的比例关系

再由 $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$, $r_i = s_i^{-1}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 就可以求解出迁移矩阵 R、S.

3 矩阵迁移的预测

根据以上方法, 就求解出迁移矩阵 R、S. 如果认为在未来的一段时间内, 外部环境不会发生重大变化, 判断矩阵的各项指标变化趋势不会发生重大偏移, 下面就可以利用迁移矩阵 R、S, 预测下一阶段判断矩阵的各项指标情况, 即 RA^*S.

$$RA^*S = [r_i a_{ij}^* s_j]_{n\times n} = \left[r_i a_{ij}^* \frac{1}{r_j}\right]_{n\times n} \qquad (12)$$

要表示出一个动态的判断矩阵 $[a_{ij}(t)]_{n\times n}$ 是非常困难的 在动态AHP 中, 针对不同情况有多种方法用来描述了动态判断矩阵(在此不赘述), 但是大多只是给予定性的描述, 不能较好地定量计算, 因此其实用性就受到很大限制 使用以上判断矩阵的迁移信息求解方法, 这一问题就可以得到较好解决

正如前所述, 迁移矩阵 R、S 仅描述了一段时间内(两个时间点) 从期初的判断矩阵A 变化到期末的 A^* 的过程 当然, 如果针对较长时期内的状态不断变化问题, 要更加准确地预测未来发展趋势, 或要动态表示出判断矩阵的变化情况, 需要求解出一个较长时期内的若干阶段判断矩阵的迁移情况, 可以先分别求出各阶段的迁移矩阵 ($R(t) = [r_i(t)]_{n\times m}$、$S(t) = [s_i(t)]_{n\times n}$), 然后把这一系列迁移矩阵加以分析, 拟合出各迁移矩阵与不同阶段的关系函数, 得到新的迁移矩阵函数 $R^*(t)$、$S^*(t)$. 这样就可以计算出动态的判断矩阵 $A^*(t)$, 也就可以对任意时期判断矩阵的变化进行预测 本文主要介绍解决这类问题的算法和思想, 具体数学手段不再赘述, 感兴趣的同仁可以参考线性系统理论的有关资料 事实上, 对于许多实际问题, 如投入产出问题等, 只需要解决的是期初和期末的状态判断并预测下期的状态 这样的

问题就可以直接使用本文的方法, 而且在不考虑外部条件变化时, 这种方法是有效、可靠的

当然, 上述关于如何更加科学地拟合出迁移矩阵与不同时间阶段的关系函数等问题, 是以后需要进一步研究的课题 另外, 正如前文所述, 这里假定了外部环境不会发生重大变化, 判断矩阵的各项指标变化趋势不会发生重大偏移, 如果考虑这些因素, 在预测下期判断矩阵时还需要加入外部调整因子矩阵, 这也是预测误差的主要来源 如何科学、有效决策这一问题, 也是需要进一步研究的

4　算例

期初判断矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1/3 & 1/2 & 1/4 & 1/5\\ 3 & 1 & 3/2 & 3/4 & 3/5\\ 2 & 2/3 & 1 & 1/2 & 2/5\\ 4 & 4/3 & 2 & 1 & 4/5\\ 5 & 5/3 & 5/2 & 5/4 & 1\end{bmatrix}$$

期末判断矩阵

$$A^*=\begin{bmatrix}1 & 1/4 & 1/3 & 1/3 & 1/4\\ 4 & 1 & 4/3 & 4/3 & 1\\ 3 & 3/4 & 1 & 1 & 3/4\\ 3 & 3/4 & 1 & 1 & 3/4\\ 4 & 1 & 4/3 & 4/3 & 1\end{bmatrix}$$

令迁移矩阵为 R、S, $R=\mathrm{diag}[r_1, r_2, r_3, r_4, r_5]$, $S=\mathrm{diag}[s_1, s_2, s_3, s_4, s_5]$, $\sum_{i=1}^{5} r_i = 1$, $r_i = s_i^{-1}$, $i=1,2,\cdots,5$ 则根据式(11) 可以得到

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{3}{4},\ \frac{r_1}{r_3}=\frac{2}{3},\ \frac{r_1}{r_4}=\frac{4}{3},\ \frac{r_1}{r_5}=\frac{5}{4}.$$

又　$\sum_{i=1}^{5} r_i = 1$

故　$r_1=0.1858, s_1=5.3833; r_2=0.2477, s_2=4.0375; r_3=0.2786, s_3=3.5889; r_4=0.1393, s_4=7.1778; r_5=0.1486, s_5=6.7292$

至此, 求得迁移矩阵 R、S 如下:

$$R=\mathrm{diag}[0.1858,\ 0.2477,\ 0.2786,\ 0.1393,\ 0.1486]$$

$$S=\mathrm{diag}[5.3833,\ 4.0375,\ 3.5889,\ 7.1778,\ 6.7292]$$

因此, 由公式(12) 可以预测下一期期末判断矩阵为

$$RA^*S=\begin{bmatrix}1 & 0.1875 & 0.2223 & 0.4445 & 0.3125\\ 5.3338 & 1 & 1.1854 & 2.3708 & 1.6667\\ 4.4994 & 0.8436 & 1 & 2.0000 & 1.4063\\ 2.2497 & 0.4218 & 0.4999 & 1 & 0.7032\\ 3.1999 & 0.6000 & 0.7111 & 1.4222 & 1\end{bmatrix}$$

还可以对上面的矩阵进行一致性检验: $\lambda_{max}=5.0000$, $C.I=0$, $C.R=0$, 即该矩阵为一致性矩阵, 不需要进行一致性调整

需要说明的是, 在此算例中的这一预测结果在忽略其他外部因素时是可靠、准确的 实际运用中可以再加入调整因子矩阵, 对指标的变化加以适当修正

5　结束语

综上所述, 本文主要讲述了以不同时间点的判断矩阵为基础, 利用对数最小二乘法求解出判断矩阵的迁移信息, 并通过得到的迁移矩阵, 预测下一时间点的判断矩阵的方法; 同时, 由于动态判断矩阵描述的困难性, 本文还提出了通过将时间段分割的办法, 拟合新的迁移矩阵, 对判断矩阵作多阶段预测, 从而求解动态判断矩阵的一种新思路

参 考 文 献:

[1]　陈　珽 决策分析[M] 北京: 科学出版社, 1987

[2]　钱颂迪等 运筹学[M] 北京: 清华大学出版社, 1990 461-466

[3]　章志敏, 李德明 层次分析法中最小偏差的性质[J] 系统工程理论与实践, 1996, 16(7): 36-39

[4]　Hwang C L, Yoon K S Multiple attribute decision making[M] Berlin: Spinger-Verlag, 1981

[5]　Vira Chankong, Jocov Heimes Multiobjective decision making, theory and methodology[M] Holland: Elsevier Science Publishing Co. , 1983

[6] Zeleny M. Multiple criteria decision making[M]. New York: McGraw-Hill, 1982
[7] 金良超, 李为柱. 多目标决策的优序法及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 1985, 5(1): 39-41
[8] 陈晓剑, 梁 樑. 系统评价方法及应用[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1993
[9] 侯定丕. 管理科学定量分析引论[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1993
[10] Satty T L. The analytic hierarchy process[M]. New York: McGraw-Hill, 1980
[11] Keeney R L, Raiffa H. Decisions with multiple objectives, preferences and value tradeoffs[M]. New York: John Wiley & Sons, 1976
[12] 仝茂达. 线性系统理论和设计[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1998
[13] 樊治平, 张 权, 马 健. 多属性决策中权重确定的一种集成方法[J]. 管理科学学报, 1998, 1(3): 50-53
[14] Hwang C L, Md Masud A S. Multiple objective decision making, methods and application[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1979

Information extraction and forecasting of judgment matrix variation

WANG Guo-hua, LIANG Liang
Business School, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China

Abstract: In this paper, a method of extracting variational information from judgment matrixes and forecasting the variation is discussed. It is the main idea that we can extract variational information by the method based on the judgment matrixes at different times, and forecast the future judgment matrix at next time. Meanwile, the paper brings forward a new means to forecasting the variation by stages and figuring variable judgment matrix. At the end, the method is explained by an example.

Key words: judgment matrix; information; forecasting