基于模糊先验概率的期望效用模型①

王　愚, 达庆利, 陈伟达
(东南大学经济管理学院, 南京 210096)

摘要: 提出了关于非确定决策问题中的新的假设, 在此假设前提下, 构造了概率模糊化函数, 结合事件的不确定程度和人的风险态度, 定义了决策人的可信先验概率, 从概率模糊化的角度解释MMEU 模型的多先验概率的形成, 进一步扩展了多先验概率的内涵, 由此建立了基于模糊先验概率的期望效用模型, 该模型可以同时应用于传统决策理论中的风险决策和不确定性决策问题, 对Allais 悖论和Ellsberg 悖论均给出了满意的解释.

关键词: 期望效用理论; Allais 悖论; Ellsberg 悖论; 风险; 不确定
中图分类号: F224.0　　文献标识码: A　　文章编号: 1007-9807(2002)03-0030-05

0　引　言

期望效用模型是现代经济学在风险决策问题上的一种著名的理论模型. 该模型由冯·纽曼和摩根斯坦(Von Neumann and Morgenstern, 1947)以及萨维奇(Savage, 1954)等人, 继承18世纪数学家丹尼尔·伯努利(Bernoulli)对"圣·彼得堡悖论"(St. Petersburg paradox)的解答并进行严格的公理化阐述而形成. 建立在个体偏好理性的一系列严格的公理化假定基础上的期望效用模型是现代决策理论的基石. 不仅如此, 它更被阿罗(Arrow)和德布鲁(Debreu)等人进一步发展, 成为价值理论的核心及市场均衡的前提, 进而构筑起现代微观经济学(新古典意义)宏伟而优美的大厦. 而且, 期望效用模型本身的应用领域亦相当广泛, 正如海叶(Hey, 1979)所说, 可扩展到经济理论的几乎每个分支. 然而, 在圣·彼得堡悖论基础上演化而来的期望效用理论及其内涵的个体偏好思想, 却在实验经济学的一系列选择实验中受到了新的"悖论"的挑战[1, 2].

1　实验经济学中的悖论与期望效用模型的解释

1.1　Allais 悖论

最早的彩票选择由诺贝尔经济学奖获得者、法国经济学家阿莱斯(Allais, 1953)作出. 该彩票选择实验产生了著名的Allais悖论. 实验中, 被试被要求在两组彩票组合中分别进行选择:

S_1= (\$5 000 000, 0; \$1 000 000, 1.0; \$0, 0)
R_1= (\$5 000 000, 0.1; \$1 000 000, 0.89; \$0, 0.01)
S_2= (\$5 000 000, 0; \$1 000 000, 0.11; \$0, 0.89)
R_2= (\$5 000 000, 0.1; \$1 000 000, 0; \$0, 0.90)

根据期望效用模型, 如在S_1与R_1所形成的偏好关系的结果中同时减去0.89u(100), 而在S_2与R_2所形成的偏好关系的结果中同时减去0.89u(0), 两种彩票组合的偏好关系应当是完全一致的. 但实验结果是, 绝大多数被试在S_1与R_1的组合中选择了S_1, 而在S_2与R_2的组合中选择了R_2. 显然, 实验结果是一个悖论, 它至少违背了期望效用理论关于偏好的独立性、传递性以及替代

① 收稿日期: 2001-04-10; 修订日期: 2002-02-25.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(79970093).
作者简介: 王　愚(1971-), 男, 江苏人, 博士生.

性等公理化假定. 值得一提的是, 在这一实验中, 被试大都通晓概率知识, 甚至期望效用模型的创立者之一 Savage 本人也作出了形成悖论的选择. 由于Allais悖论反映的是相同结果的不一致偏好情形, 故亦称"同结果效应"(common-consequence effect). 与同结果效应类似的实验发现还有"同比率效应"(common-ratio effect), 即如果对一组彩票中收益概率进行相同比率的变换, 也会产生不一致的选择[1].

1.2　Ellsberg 悖论

在一个袋中有 30 只红球, 60 只黑球或黄球. 如果有两个选择, 一个是在抽到红球得到 1000 元与抽到黑球得到 1000 元之间的选择; 另一个是在抽不到红球得 1000 元与抽不到黑球得 1000 元之间的选择, 人们通常在两个选择中都选择前者. 这说明人们在前一个选择时对出现黑球的主观概率判断, 小于出现红球的概率, 而在后一个选择时却又对出现黑球的主观概率判断, 大于出现红球的概率. 但很显然上述两种选择情况的不确定性是同一种不确定性, 因为袋中的球并没有发生变化. 这种现象是传统的主观期望效用模型无法解释的, 并且主观概率作为人们在有不确定性时决策的根本依据的假设受到了质疑[2,7].

1.3　期望效用模型的发展

Allais 悖论和 Ellsberg 悖论引发了学者们对期望效用模型的进一步研究, 其中对于 Allais 悖论研究最有代表性的有 Chew 和 MacCrimmon 的权重效用理论(weighted utility theory)、Quiggin 的秩依赖理论(rank-dependent theory)、Kahneman 和 Tversky 的前景理论(prospect theory)以及 Starmer 等的研究. 这些理论采用了诸如隐含期望效用、失望理论、后悔函数等方法, 其中大部分只是为了解释 Allais 悖论, 而另一些已经超越了期望效用理论形成了新的理论[8-10]. 关于 Ellsberg 悖论研究最有代表性的是 Gilboa 和 Schmeidler 提出的最大最小期望效用 (maxmin expected utility), 简称 MMEU; 另外还有一种与其紧密相关的 Choquet 期望效用(Choquet expected utility), 简称 CEU. 这两种期望效用模型都是考虑了决策者的不确定规避, 即相对于较确定的事物, 人们不喜欢更不确定或更含糊的事物, 这两个模型均用于解决类似 Ellsberg 实验的不确定事件的决策问题[12,13].

2　非确定环境下决策问题的新的假设

假设 1　人的主观概率是对某个精确概率模糊化形成的模糊集合.

概率是在理想条件下, 足够多次可重复实验中某随机事件发生的频度, 刻画了事件发生的可能性的大小, 但是在现实生活中, 由于环境的复杂性和不确定性, 事件的发生都会受许多不可知因素影响, 任何事件都不可能在完全一致的条件下多次重复, 因此具有更多不确定性, 理想实验条件下概率的精确性在现实生活中失去了意义. 事实上, 对复杂和不确定环境的适应使得人们习惯于在判断和决策过程中采用模糊的思维方式. 人们在评估一个事件的风险时, 通常会使用一些模糊性语言, 即使对于有确定客观概率风险的事件, 人的选择也可能被偏好、理解或信念等主观因素所左右. 而面对不确定事件, 人们通常会有一个主观直觉上的概率估计, 但是在具体决策过程中仍采用模糊的思维方式. 因此, 人的主观概率可以看作是对某个精确概率模糊化形成的模糊集合, 这个精确概率可能是客观概率, 如彩票选择实验中的概率, 也可能是人的主观判断, 如在 Ellsberg 悖论中认为黑球出现的概率为 0.33.

假设 2　风险事件只是不确定程度略低的不确定事件.

由于在现实生活中并不存在严格的可以用精确概率表示的随机事件, 以及人们模糊化的思维特点, 在决策理论中严格划分的风险事件和不确定事件并没有本质上的不同, 区别仅在于关于事件信息量的多少, 有关文献的研究也表明风险和不确定对决策人决策过程的影响并没有什么显著的差异. 因此, 可以认为在决策人看来风险事件也是不确定事件, 只是不确定程度略低而已.

由以上假设, 风险事件和不确定事件均可认为是非确定性事件, 可以用统一的决策模型求解.

3 MMEU 期望效用模型简介

MMEU 期望效用模型又称为多先验概率期望效用模型,在该模型中,假设决策人对不确定事件的主观概率不唯一,而是一个闭合凸集,而在本文的假设中,决策人对非确定事件的主观概率是一个模糊集合,虽然两者的含义不同,但是在性质上有相似之处,因此有必要对MMEU 作一个简要介绍

对任意拓扑空间 Y, Σ_Ω 为Borel σ代数,有限支集$M(Y)$ 表示Y 上所有测度的集合,(X, Σ_X) 为得益空间,(Ω, Σ_Ω) 为不确定状态空间,F 为所有从Ω到$M(X)$ 的有限可测函数集 $\geq$ 表示行动之间的弱偏好排序关系,严格偏好关系和无关分别用$>$ 和$\sim$ 表示

Gilboa 和 Schmeidler 证明了在Anscombe 和Aumann 公理体系下,对于所有f, $f'\in F$,存在一个映射u:$M(X)\to R$ 和Ω上的一个唯一、非空、闭合和凸的概率测度集合Δ

$$f \geq f' \Leftrightarrow \min_{p\in\Delta}\int_\Omega u\circ f\,\mathrm{d}p \geq \min_{p\in\Delta}\int_\Omega u\circ f'\,\mathrm{d}p$$

式中的积分函数u 是决策者的主观效用函数,即不同的结果对该决策者的效用或偏好的数量化的测度 $f(\omega)$ 和$f'(\omega)$ 分别是在状态为ω, $\omega\in\Omega$的情况下,采用行动 f 和 f' 的结果[12]. Casadesus-Masanell 等人则证明了在 Savage 公理体系下该结论同样成立[14].

4 模糊先验概率期望效用模型

4.1 概率的模糊化

定义1 设U 是由概率组成的论域,在概率论域U 上决策人对于某事件的模糊主观先验概率为一个模糊集$\tilde{B}$,其隶属函数定义为

$$\mu_{\tilde{B}}(p) = \mathrm{e}^{-k(p-p_0)^2}: U \to [0,1],$$
$$p \in U, p_0 \in (0,1)$$

$\mu_{\tilde{B}}(p)$ 表示概率论域中元素p 对$\tilde{B}(p)$ 的隶属度,由定义可知$\tilde{B}$ 是对精确概率p_0 模糊化得到的,其中参数k 表示模糊化程度的大小,也即决策人认为对于非确定事件,包括风险事件和不确定性事件,实际发生概率从 0 到 1 都有可能,只是可能性大小不同而已 事实上,当这种可能性小到一定程度时,在决策人作决策时会被忽略,因此有

定义2 称普通集合B_λ为决策人的可信先验概率

$$B_\lambda = \{p \mid \mu_{\tilde{B}}(p) \geq \lambda, p\in U, \lambda\in[0,1]\}$$

λ与决策人对待风险和不确定性的态度有关,在一般情况下,决策人总是表现出或多或少的风险规避倾向,设x 为决策人的风险规避度,则$\lambda = f(x)$,为简单起见,取$\lambda = 1 - x$,当$\lambda = 1$时决策人是风险中性的,$\lambda = 0$时决策人则是完全风险规避的 应该说明的是,当决策人的类型是风险偏好时,x 则为决策人的风险偏好度,在本文中仅考虑风险规避的情形,对于风险偏好情形的处理与此类似

4.2 模糊先验概率期望效用模型

对任意拓扑空间 Y, Σ_Ω 为Borel σ代数,有限支集$M(Y)$ 表示Y 上所有测度的集合,模糊先验概率期望效用模型采用符号定义与MMEU 期望效用模型相同,只是闭合凸集Δ不是由决策人对事件发生的多先验概率构成的,而是由决策人的可信先验概率B_λ构成,含义不同,但是性质一样 因此有

定理1 在 Savage 公理体系下,对于所有f, $f'\in F$,存在一个映射u:$M(X)\to R$ 和Ω上的一个唯一、非空、闭合和凸的概率测度集合Δ

$$f \geq f' \Leftrightarrow \min_{p\in\Delta}\int_\Omega u\circ f\,\mathrm{d}p \geq \min_{p\in\Delta}\int_\Omega u\circ f'\,\mathrm{d}p$$

证明过程可参见 Casadesus-Masanell[14].

由于本模型中决策人对于风险事件和不确定性事件都进行概率模糊化,只是模糊化的程度不同,即k 的选取不同,因此,本模型可以同时适用于风险决策和不确定性决策

5 举例

5.1 Allais 彩票实验

$\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\$5\ 000\ 000, \$1\ 000\ 000, \$0)$,取$k = 100$, $\lambda = 0.5$

对于S_1,所有状态都是确定的,所以$B_\lambda(\omega_1) = 0$, $B_\lambda(\omega_2) = 1$, $B_\lambda(\omega_3) = 0$

对于R_1,经概率模糊化,得

$$B(\omega_1): \mu(p) = e^{-100(p-0.1)^2},$$
$$B_\lambda(\omega_1) = [0.017, 0.183]$$
$$B(\omega_2): \mu(p) = e^{-100(p-0.89)^2},$$
$$B_\lambda(\omega_2) = [0.807, 0.973]$$
$$B(\omega_3): \mu(p) = e^{-100(p-0.01)^2}, B_\lambda(\omega_3) = [0, 0.183]$$
$$P(S_1) = \min \sum_{k=1}^{n} f(\omega_k) p(\omega_k) = 1\,000\,000$$
$$P(R_1) = \min \sum_{k=1}^{n} f(\omega_k) p(\omega_k) = 892\,000$$

对于S_2, 有

$$B_\lambda(\omega_1) = 0, B_\lambda(\omega_2) = [0.027, 0.193],$$
$$B_\lambda(\omega_3) = [0.807, 0.973]$$
$$P(S_2) = 27\,000$$

对于R_2, 有

$$B_\lambda(\omega_1) = [0.017, 0.183], B_\lambda(\omega_2) = 0,$$
$$B_\lambda(\omega_3) = [0.817, 0.983]$$
$$P(R_2) = 85\,000$$

由上可知, $P(S_1) > P(R_1)$, $P(R_2) > P(S_2)$, 所以决策人会在S_1与R_1的组合中选择S_1, 在S_2与R_2的组合中选择R_2, 与实验结果相符.

5.2　Ellsberg 彩球实验

$\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) =$ (红球, 黑球, 黄球), f_1为抽红球, f_2为抽黑球, f_3为不抽红球, f_4为不抽黑球, 设决策人对于有确定概率事件的模糊化程度低于不确定事件的模糊化程度, 在其模糊化函数中k分别取100和50. 决策人的风险规避程度不变, λ取0.5.

$$B(\omega_1): \mu(p) = e^{-100(p-0.33)^2},$$
$$B_\lambda(\omega_1) = [0.247, 0.413]$$
$$B(\omega_2): \mu(p) = e^{-50(p-0.33)^2},$$
$$B_\lambda(\omega_2) = [0.212, 0.448]$$
$$B(\omega_3): \mu(p) = e^{-50(p-0.33)^2},$$
$$B_\lambda(\omega_3) = [0.212, 0.448]$$
$$B(\omega_2, \omega_3): \mu(p) = e^{-100(p-0.66)^2},$$
$$B_\lambda(\omega_2, \omega_3) = [0.577, 0.743]$$
$$B(\omega_1, \omega_3): \mu(p) = e^{-50(p-0.66)^2},$$
$$B_\lambda(\omega_1, \omega_3) = [0.542, 0.778]$$
$$P(f_1) = 247;\ P(f_2) = 212;\ P(f_3) = 577;$$
$$P(f_4) = 542$$

由上可知, 决策人会在f_1和f_2中选择f_1, 在f_3和f_4中选择f_3, 与实验结果相符.

5.3　说明

考虑到现实中大多数决策人总是表现出或多或少的风险规避倾向, 以上的计算中λ取0.5, 因此结论能够解释具有一般风险规避倾向的决策人在实验中所作选择. 事实上, 实验中并不是所有人都作出同样的选择, 只不过作出与传统期望效用模型结论相背离选择的人更多一些. 在本文所提出的模型中, 以Allais悖论为例, 通过进一步计算可知, 当$\lambda > 0.66$, 也即决策人的风险规避度低到一定程度时, $P(R_1) > P(S_1)$, $P(R_2) > P(S_2)$, 决策人作出的选择将与传统期望效用模型的结论一致, 而大量的经济学实验悖论其实说明了现实中多数人的风险态度.

6　结论

在本文提出的关于非确定决策问题中的新的假设前提下, 建立的基于模糊先验概率的期望效用模型可以同时应用于传统决策理论中的风险决策和不确定性决策问题, 对Allais悖论和Ellsberg悖论均给出了满意的解释, 同时对于彩票选择实验中的同比率效应等其他反常现象也能给出合理的解释, 由于篇幅原因, 没有一一验证. 本文提出的模型还可以进一步拓展到博弈论中, 可以得到更加稳定的均衡解, 这是今后的主要工作.

参 考 文 献:

[1]　蔡志明. 风险决策与个体偏好的实验研究[J]. 复旦学报(社会科学版), 2000, 1: 61-67
[2]　谢识予. 纳什均衡论[M]. 上海: 上海财经大学出版社, 1999. 222-238
[3]　井润田. 关于实验经济学中理性假定的研究[J]. 电子科技大学学报, 1999, 28(6): 591-595
[4]　张维迎. 博弈论与信息经济学[M]. 上海: 上海三联书店, 上海人民出版社, 1996. 182-186
[5]　乌家培. 经济学与管理学的关系[J]. 管理科学学报, 2000, 2(2): 82-83

[6] 李登峰 具有一般信息结构的模糊多属性决策方法[J]. 管理科学学报, 1998, 1(3): 41-44

[7] Ellsberg D. Risk, ambiguity and the savage axioms[J]. Quartely Journal of Economics, 1961, 75: 643-669

[8] Quiggin J. A theory of anticipated utility[J]. Journal of Economic Behavior and Organization, 1982, 3: 323-343

[9] Machina M J. Expected utility analysis without the independence axiom[J]. Econometrica, 1982, 50: 277-323

[10] Kahneman D, Tversky A. Propect theory: an analysis of decision under risk[J]. Econometrica, 1979, 47: 263-291

[11] Anand P. The philosophy of intransitive preference[J]. The Economic Journal, 1993, 103: 337-346

[12] Gilboa I, Schmeidler D. Maxmin expected utility with non unique prior[J]. Journal of Mathematical Economics, 1989, 18: 141-153

[13] Schmeidler D. Subjective probability and expected utility without additivity[J]. Econometrica, 1989, 57: 571-587

[14] Casadesus-Masanell R, Klibanoff P, Ozdenoren E. Maxmin expected utility over savage acts with a set of priors[J]. Journal of Economic Theory, 2000, 92: 33-65

Expected utility model based on fuzzy prior probability

WANG Yu, DA Qing-li, CHEN Wei-da

School of Economics and Management, Southeast University, Nanjing 210096, China

Abstract: In this paper, some new hypotheses about decision-making under uncertainty have been provided. With these hypotheses, and with respect to the degree of event's uncertainty as well as people's risk aversion, a credible prior probability function of decision-maker has been defined. It explains the multi-prior probabilities of MMEU by fuzzy probability, and expands the connotation of the multi-prior probability. Then a expected utility model based on fuzzy prior probability has been developed. This model can be used in the decision-making under uncertainty. Finally, the model has been used to resolve Allais paradox and Ellsberg paradox, and the solutions turn up trumps.

Key words: expected utility theory; Allais paradox; Ellsberg paradox; risk; uncertainty