企业间生产与广告投资分配的竞争分析①

张玉林[1,2], 仲伟俊[1], 梅姝娥[1]
(1. 东南大学经济管理学院, 南京 210096; 2. 扬州大学税务学院, 扬州 225002)

摘要: 提出了两企业间进行广告与投资分配决策竞争的一般模型, 对这个一般模型及其特殊形式进行了研究; 证明了模型的Cournot型均衡解的存在性和单调性; 对广告间的影响参数进行了分析; 给出了具体问题均衡解的求解方法; 最后, 通过一个简单例子的分析计算对本文进行了验证.

关键词: 营销; 博弈; 广告; 信息经济; 均衡
中图分类号: F830　　文献标识码: A　　文章编号: 1007-9807(2002)04-0034-05

0 引 言

企业的功能之一是生产和销售商品, 获取效用并力求效用最大化. 在市场竞争日趋激烈的今天, 企业生产的商品要想在市场中销售出去, 一般都要有相应的促销手段. 广告宣传是促销策略中最为常见的手段之一. 尽管日常的产品广告所传递的信息大多是关于产品的软信息, 但广告(特别是经验品的大量广告)还是给消费者传递了一些令人感兴趣的产品信息, 显著地提升了商品的声誉, 影响了消费者对商品的选择[1]. 因而现实中众多的企业都花费大量的资金进行商品的广告宣传.

许多学者对商品的广告进行了研究, 如多夫曼和斯泰勒提出了硬广告的一个简单形式, 将广告重新解释为关于商品的存在的一组信息, 从而影响消费者的需求[2]. 巴特斯研究了一个关于垄断竞争的模型, 认为产品的差异化主要由于消费者只知道有限数目的品牌, 认为垄断竞争均衡导致太多的广告和太少的搜寻[3]. 格罗斯曼和夏皮罗在巴特斯的研究基础上, 分析了寡头垄断相互作用下的信息广告问题, 研究了广告对个人需求弹性的影响, 及广告对可占用性和偷窃生意效应的影响[4]. 在经验商品方面, 贝格威尔考虑了以广告作价表明产品质量的可能性[5]. 法莱尔得到了由于信息的差异化, 即使是低质量的现有产品也可以阻挠高质量的市场进入者[6]. 迪克希特与诺曼对广告影响偏好时的福利进行了分析[7]. 在结合基金项目进行经理信息系统理论研究[10-12]及对某经理信息系统分析与设计时, 我们与经理们都认为, 生产与广告间的不同投资决策对企业的收益影响不同, 希望能找到某种模型进行分析, 帮助决策.

本文考虑的是在总投资一定时, 互为竞争的企业如何在生产和广告费用间进行分配, 使它们各自获取的效用最大. 为简化问题的研究, 把本企业的所有竞争企业抽象为一个虚拟的企业. 本文首先建立关于该问题的两企业进行商品生产与广告投资的模型, 然后利用流行的博弈理论[8]对该模型进行研究, 证明了均衡解的存在性, 分析了广告形式对均衡解的影响, 给出了求解具体均衡解的方法等.

① 收稿日期: 2001-04-18; 修订日期: 2002-04-04.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69774036).
作者简介: 张玉林(1964-), 男, 江苏兴化人, 副教授, 博士生.

1　模型的基本描述

用 $i=1,2$ 表示企业, $B_i>0$, A_i 分别表示第 i 个企业的总投资(常数) 和用于广告的费用, 假设总投资只用于生产和广告, $0\le A_i\le B_i$, 相应的生产投资费用为 (B_i-A_i).

先考虑企业 1 的模型. 设企业 1 的生产费用得到纯贴现值为 $c_1(B_1-A_1)^\alpha$ 的商品. 企业间广告投资对企业 1 销售的影响因子为函数 $f(A_1,A_2)$, 它具有如下性质:

性质 1　$0\le f(A_1,A_2)<1\quad \forall A_1\in[0,B_1], \forall A_2\in[0,B_2]$;

性质 2　$f(0,A_2)=0$;

性质 3　$f_{A_1}(A_1,A_2)\ge 0$, 即 $f(A_1,A_2)$ 关于 A_1 单调递增; $f_{A_2}(A_1,A_2)<0$, 即 $f(A_1,A_2)$ 关于 A_2 单调递减; $f_{A_1A_1}(A_1,A_2)<0$; $f_{A_2A_2}(A_1,A_2)>0$;

性质 4　$\dfrac{f_{A_1}(A_1,A_2)}{f(A_1,A_2)}$ 关于 A_2 单调递增.

其中 $f_{A_1}(A_1,A_2)$, $f_{A_1A_1}(A_1,A_2)$ 分别表示 $f(A_1,A_2)$ 关于 A_1 一阶和二阶偏导数, 其它及后文中类似情况, 含义类似.

性质 2 含义是不做广告则效用为 0; 性质 3 表明随着本企业广告投资的增加影响因子增大; 竞争对手的广告投资增加, 影响因子减小; 广告投资足够大时, 再增大广告投资影响因子的增加不明显(广告的饱和性); 竞争对手的广告投资较本企业的广告投资充分大时, 影响因子下降明显; 性质 4 可理解为影响因子关于本企业广告投资的弹性随着竞争对手广告投资的增加而增长.

两个企业追求的都是贴现净利润(效用) 最大化. 借助于 $f(A_1,A_2)$, 建立企业 1 如下的决策模型

$$\max_{A_1} U_1=c_1 f(A_1,A_2)(B_1-A_1)^\alpha$$
$$\text{s.t.}\quad 0\le A_1\le B_1 \tag{1}$$

常数 $c_1>0$ 代表企业 1 的生产技术水平, 常数 $\alpha>0$ 是相应生产投资的产出弹性.

同样, 企业 2 的决策模型为

$$\max_{A_2} U_2=c_2 g(A_1,A_2)(B_2-A_2)^\beta$$
$$\text{s.t.}\quad 0\le A_2\le B_2 \tag{2}$$

常数 $c_2>0$ 代表企业 2 的生产技术水平, 常数 $\beta>0$ 是相应生产投资的产出弹性.

$g(A_1,A_2)$ 是广告投资对企业 2 销售的影响因子, 具有与 $f(A_1,A_2)$ 类似的性质, 即 $0\le g(A_1,A_2)<1\quad \forall A_1\in[0,B_1], \forall A_2\in[0,B_2]$; $g(A_1,0)=0$; $g_{A_2}(A_1,A_2)\ge 0$, $g_{A_1}(A_1,A_2)<0$, $g_{A_2A_2}(A_1,A_2)<0$, $g_{A_1A_1}(A_1,A_2)>0$, $\dfrac{g_{A_2}(A_1,A_2)}{g(A_1,A_2)}$ 关于 A_1 单调递增.

满足性质要求的 $f(A_1,A_2)$ 与 $g(A_1,A_2)$ 一定存在, 如后文给出的示例函数.

模型(1)、(2) 都是非线性规划模型, 对模型的分析要用到微积分及非线性规划理论方面的相关知识, 可参见文[9].

2　模型的 Cournot 型分析

此时两企业同时行动, 彼此不知道对方采取的策略, 它们的效用函数结构与约束是共同的知识, 是完全信息静态博弈问题. 为求得它们的均衡策略, 先考虑企业 1 的情况.

从式(1) 知, $U_1(A_1,A_2)$ 是关于 A_1 与 A_2 连续的函数并且具有一阶偏导数, 而

$$U_1(0,A_2)=c_1 f(0,A_2)(B_1-0)^\alpha = c_1{}^{*}0^{*}B_1^\alpha=0$$
$$U_1(B_1,A_2)=c_1 f(B_1,A_2)(B_1-B_1)^\alpha = c_1 f(B_1,A_2)^{*}0^\alpha=0$$

因而由微积分学定理知, $\forall A_2\in[0,B_2]$, $\exists A_1^*(A_2)\in(0,B_1)$, 使函数 $U_1(A_1,A_2)$ 在 A_1^* 处取最大值, 并且满足 $\dfrac{\partial U_1(A_1^*,A_2)}{\partial A_1}=0$, 即

$$f_{A_1}(A_1^*,A_2)(B_1-A_1^*)-\alpha f(A_1^*,A_2)=0 \tag{3}$$

定理 1　$A_1^*(A_2)$ 关于 A_2 单调递增.

证明　式(3) 等价于

$$\frac{f_{A_1}(A_1^*,A_2)}{f(A_1^*,A_2)}(B_1-A_1^*)=\alpha,$$

考虑到 α, B_1 均为常数, 及影响因子的性质(4) 知, $\dfrac{f_{A_1}(A_1^*,A_2)}{f(A_1^*,A_2)}$ 关于 A_2 单调递增, 从而 $B_1-A_1^*(A_2)$ 关于 A_2 递减. 因而 $A_1^*(A_2)$ 关于 A_2 单调递增. 得证.

此外, 如果函数 $U_1(A_1, A_2)$ 关于 A_1 是严格凹的(上凸的), 由微积分知识知, 满足式(3) 的极值点唯一, 即 A_1^* 唯一.

再现考虑企业 2 的情况, 分析与企业 1 类似也有 $\forall A_1 \in [0, B_1]$, $\exists A_2^*(A_1) \in (0, B_2)$ 使函数 $U_2(A_1, A_2)$ 在 A_2^* 处取最大值, 并且满足 $\frac{\partial U_2(A_1, A_2^*)}{\partial A_2} = 0$, 即

$$g_{A_2}(A_1, A_2^*)(B_2 - A_2^*) - \beta g(A_1, A_2^*) = 0 \tag{4}$$

定理 2 $A_2^*(A_1)$ 关于 A_1 单调递增.

同样, 如果函数 $U_2(A_1, A_2)$ 关于 A_2 是严格凹的(上凸的), 则 A_2^* 唯一.

定理 1 与定理 2 表明, 随着竞争对手广告投资的增加, 企业的最优广告投资也单调增加.

为进一步讨论, 取如下的函数分别为企业 1 和企业 2 的影响因子. 如不特别指明, 本文后面的所有讨论均是如此.

$$f(A_1, A_2) = \frac{A_1}{A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2}\ (\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0)$$
$$g(A_1, A_2) = \frac{A_2}{\beta_1 A_1 + A_2 + \beta_2}\ (\beta_1 > 0, \beta_2 > 0) \tag{5}$$

其中的 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 可视为竞争对手的广告投资转换化为与本企业广告投资相当的参数. 显然它们均满足前述影响因子的所有性质, 例如 $\frac{f_{A_1}(A_1, A_2)}{f(A_1, A_2)} = \frac{\alpha_1 A_2 + \alpha_2}{A_1(A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2)}$ 关于 A_2 单调递增. 不难证明, $\frac{\partial U_i}{\partial A_i^2} < 0\ (i = 1, 2)$, 因此 $U_1(A_1, A_2)$ 关于 A_1 是严格凹的(上凸的), $U_2(A_1, A_2)$ 关于 A_2 是严格凹的(上凸的), 从而最优反应 $A_1^*(A_2)$ 唯一且单调递增, $A_2^*(A_1)$ 唯一且单调递增. 由

$$f_{A_1}(A_1, A_2) = \frac{\alpha_1 A_2 + \alpha_2}{(A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2)^2}$$
$$g_{A_2}(A_1, A_2) = \frac{\beta_1 A_1 + \beta_2}{(\beta_1 A_1 + A_2 + \beta_2)^2} \tag{6}$$

将式(5)、(6) 分别代入(3) 和(4), 分别得到

$$A_1^*(A_2) = \frac{2B_1}{(\alpha + 1) + \sqrt{(\alpha + 1)^2 + \frac{4\alpha B_1}{(\alpha_1 A_2 + \alpha_2)}}} \tag{7}$$

$$A_2^*(A_1) = \frac{2B_2}{(\beta + 1) + \sqrt{(\beta + 1)^2 + \frac{4\beta B_2}{(\beta_1 A_1 + \beta_2)}}} \tag{8}$$

定理 3 企业间广告竞争的纳什均衡解存在且唯一.

证明 由式(7), 显然有最优反应函数 $A_1^*(A_2)$ 关于 A_2 连续且严格单调递增.

同样由(8) 也有最优反应函数 $A_2^*(A_1)$ 关于 A_1 连续且严格单调递增. 令

$a_0 = A_1^*(0)$, $a_1 = A_1^*(B_2)$, $b_0 = A_2^*(0)$, $b_1 = A_2^*(B_1)$

显然有 $0 < a_0 < a_1 \le B_1$, $0 < b_0 < b_1 \le B_2$

因此最优反应函数 $A_1^*(A_2)$ 与 $A_2^*(A_1)$ 在 $A_1 \in [0, B_1]$, $A_2 \in [0, B_2]$ 必然存在等值点(参见图 1), 即存在纳什均衡解. 再考虑到严格单调递增性, 因而均衡解是唯一的. 证毕

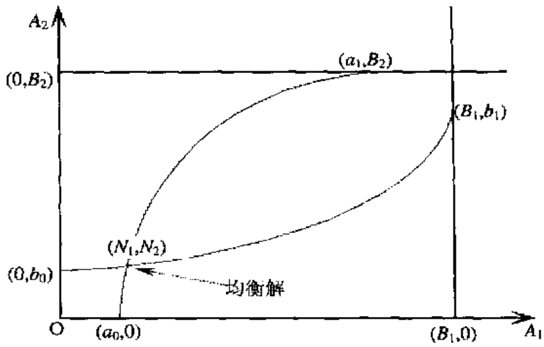

图 1 最优反应函数及均衡解

3 均衡解的确定与参数变化分析

为便于分析, 取 $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, 此时为避免影响因子在(0, 0) 处的奇异性, 可考虑去除此点处的一个小邻域进行考虑(直觉经验是, 如果广告投资太小, 影响因子应该接近于零). 考虑到相类似媒体上进行广告时, 影响因子参数具有对称性, 应有 $\alpha_1 \times \beta_1 = 1$, 即 $\beta_1 = 1/\alpha_1$.

3.1 均衡解的确定

记此时由(7)、(8) 决定的纳什均衡解分别为 $N_1(\alpha_1)$ 与 $N_2(\alpha_1)$, 它们满足如下方程组

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{2B_1}{(\alpha+1)+\sqrt{(\alpha+1)^2+\dfrac{4\alpha B_1}{\alpha_1 N_2}}} \\ N_2 = \dfrac{2B_2}{(\beta+1)+\sqrt{(\beta+1)^2+\dfrac{4\beta B_2\alpha_1}{N_1}}} \end{cases} \tag{9}$$

由前述定理知, 方程组(9) 决定唯一一组解(纳什均衡解). 通过变换得到

$$k_1N_1^3 + k_2N_1^2 + k_3N_1 + k_4 = 0 \tag{10}$$

其中, $k_1 = (1+\alpha)(1+\beta)\dfrac{\alpha}{\alpha_1} - \dfrac{\beta\alpha^3}{\alpha_1^2}$

$$k_2 = B_2(\alpha+1)^2 - \frac{B_1(\beta+1)\alpha}{\alpha_1}$$

$$k_3 = -2B_1B_2(\alpha+1);\ k_4 = B_1^2B_2$$

对具体的两个企业, 参数是给定的, 从而 k_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 也就确定了. 利用迭代算法(如牛顿法等) 容易求得方程(10) 的解, 从而也就确定了问题的Cournot 型纳什均衡解.

3.2　参数变化分析

由 $U_1 = c_1\dfrac{A_1}{A_1+\alpha_1A_2}(B_1-A_1)^\alpha$

$$U_2 = c_2\frac{A_2}{\frac{1}{\alpha_1}A_1 + A_2}(B_2-A_2)^\beta$$

易求得

$$\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_1} = -c_1\frac{A_1A_2}{(A_1+\alpha_1A_2)^2}(B_1-A_1)^\alpha < 0$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_1} = c_2\frac{\frac{A_1A_2}{\alpha_1^2}}{\left(\frac{1}{\alpha_1}A_1+A_2\right)^2}(B_2-A_2)^\beta > 0$$

此外尽管由式(10) 不容易求出 $N_1(\alpha_1)$ 的一般表达式, 但对方程组(9) 两边关于 α_1 求偏导:

$$\frac{\partial N_1(\alpha_1)}{\partial\alpha_1} \geq 0,\ \frac{\partial N_2(\alpha_1)}{\partial\alpha_1} \leq 0.$$

即企业 1 的效用关于 α_1 单调递减, 企业 2 的效用关于 α_1 单调递增, 相应均衡广告投资 $N_1(\alpha_1)$ 关于 α_1 单调递增, $N_2(\alpha_1)$ 关于 α_1 单调递减. 这表明通过创新的广告方式增加广告效率(导致 α_1 减小), 企业 1 即使不增加广告投资, 其效用也会增加; 企业 2 的广告创新, 导致 α_1 增大, 从而相应的效用增加. 这与日常生活中, 资金相对较小的企业, 为了求得较大的效用, 常常花少量的资金进行炒作是一致的.

4　算例分析

假定某两企业生产与广告竞争的效用函数分别为

$$U_1(A_1,A_2) = \frac{A_1}{A_1+A_2}(1-A_1)^\alpha$$

$$U_2(A_1,A_2) = \frac{A_2}{A_1+A_2}(1-A_2)^\beta$$

其中, 常数 $\alpha > 0, \beta > 0$.

$$\frac{\partial U_1(A_1,A_2)}{\partial A_1} = \frac{A_2}{(A_1+A_2)^2}(1-A_1)^\alpha - \frac{A_1}{(A_1+A_2)}\alpha(1-A_1)^{\alpha-1}$$

由 $\dfrac{\partial U_1(A_1,A_2)}{\partial A_1} = 0$, 解得,

$$A_1(A_2) = \frac{2}{(\alpha+1)+\sqrt{(\alpha+1)^2+\dfrac{4\alpha}{A_2}}} \tag{11}$$

显然, 反应函数 $A_1(A_2)$ 关于 A_2 是严格单调递增的.

同样由 $\dfrac{\partial U_2(A_1,A_2)}{\partial A_2} = 0$, 解得

$$A_2(A_1) = \frac{2}{(\beta+1)+\sqrt{(\beta+1)^2+\dfrac{4\beta}{A_1}}} \tag{12}$$

显然, 反应函数 $A_2(A_1)$ 关于 A_1 也是严格单调递增的.

取 $\alpha = \dfrac{1}{2}, \beta = \dfrac{1}{3}$ 由式(11)、(12), 得如下联立方程组

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{4}{3+\sqrt{9+\dfrac{8}{A_2}}} \\ A_2 = \dfrac{3}{2+\sqrt{4+\dfrac{3}{A_1}}} \end{cases} \tag{13}$$

将 A_2 代入 A_1 并化简得

$$11A_1^3 + 19A_1^2 - 36A_1 + 12 = 0 \tag{14}$$

利用迭代算法求方程(14) 的解, 得 $A_1 = 0.515\,231$. 代入方程组(13), 又得 $A_2 = 0.584\,327$. 容易验证, 它们满足方程组(13), 所以它们为本问题的纳什均衡解. 即纳什均衡解为

$$\begin{cases} N_1 = 0.515\,231 \\ N_2 = 0.584\,327 \end{cases} \tag{15}$$

说明　方程(14) 还有两个增根, $A_1 = -2.958\,240$ 与 $A_1 = 0.715\,736$, 前者不满足非负

性; 后者, 容易验证其不满足方程组(13).

5 结论

本文提出了一种两企业间进行广告与投资竞争的一般模型, 利用完全信息静态博弈理论, 对这个一般模型及其后续的较为特殊形式分析后, 得到了若干理论结论 对影响参数进行了初步分析, 这些很好地解释了现实中此类竞争中存在的现象, 对企业的决策有帮助 此外还给出了求具体问题均衡解的方法, 利用该方法的编程实现, 我们在某经理信息系统中进行了运用, 有一定的实用价值 限于篇幅, 本文没有对模型的 Stackeberg 型及Cartel 型博弈进行分析(将在另文中进行探讨). 进一步的工作有, 针对不同的产品市场建立特定的模型; 模型连续投资时的博弈分析等

参 考 文 献:

[1] 泰勒尔/著, 张维迎/总译校 产业组织理论[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1997

[2] Dorfman, R, Steiner P. Optimal advertising and optimal quality[J]. American Economic Review, 1954, 44: 826-836

[3] Butters G. Equilibrium distributions of sales and advertising prices[J]. Review of Economics Studies, 1985, 44: 465 - 491

[4] Grossman G, Shapiro C. Informative advertising with differentiated products[J]. Review of Economic Studies, 1984, 51: 63-82

[5] Bagwell K. Informational product differentiation as barrier to entry[C]. Discussion Paper 129, Studies in Industry, Stanford University, 1985

[6] Farrell J. Moral hazard in quality, entry barriers, and introductory offers[C]. Working Paper 344, Department of Economics, Massachusetts Institute of Technology, 1984

[7] Dixit A, Norman V. Advertising and welfare[J]. Bell Journal of Economics, 1978, 9: 1- 17

[8] 张维迎 博弈论与信息经济学[M]. 上海: 上海人民出版社, 1999

[9] 程理民, 吴 江, 张玉林 运筹学模型与方法教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000

[10] 仲伟俊, 梅姝娥 经理信息系统[J]. 管理科学学报, 1998, 1(1): 87- 92

[11] 仲伟俊, 梅姝娥 信息系统技术对企业竞争力的影响分析[J]. 管理科学学报, 1998, 1(2): 37- 43

[12] 仲伟俊, 梅姝娥 企业核心能力形成过程中信息系统技术的应用[J]. 管理科学学报, 2000, 3(3): 39- 43

Competition analysis between enterprises in allocation of production and advertising investment

ZHANG Yu-lin[1,2], *ZHONG Wei-jun*[1], *MEI Shu-e*[1]

1. School of Economics and Management, Southeast University, Nanjing 210096, China

2. Information Department of Taxation College of Yangzhou University, Yangzhou 225002, China

Abstract: In this paper, a general model about two enterprises to allocate production and advertising investment is set up. The model and its particular forms are studied by using game theory. The existence and monotone of Cournot equilibrium about the model are proven theoretically. One method to find out the equilibrium solution is given. Finally, the results are tested and verified by analyzing a simple problem.

Key words: marketing; games; advertisement; information economy; equilibrium