多个生产商下的动态古诺模型分析①

张明善[1], 唐小我[2]
(1. 西南民族学院经济与管理学院, 成都 610041; 2. 电子科技大学管理学院, 成都 610054)

摘要: 研究任意多个厂商条件下的一般动态古诺模型, 把两个厂商条件下的古诺模型拓广到一般情形, 并进行动态分析。给出了一般动态古诺模型的数学表达式, 并证明了均衡解的存在性。进一步通过理论分析和计算, 给出了各厂商的均衡产量的计算公式。

关键词: 古诺模型; 均衡条件; 均衡解; 均衡产量
中图分类号: C93 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2002)05-0085-06

0 引 言

寡头垄断市场是指少数厂商完全控制一个行业的市场结构, 是一种普遍存在的市场。1838 年法国经济学家古诺(Augustin Cournot)最早提出了一个数学模型, 用以考察一个行业中仅有两个生产厂商的所谓双头垄断市场的情况, 研究两个厂商条件下的均衡产量问题。该模型后来被称为古诺模型。该模型假定: 寡头市场仅有两个生产厂商, 他们生产同质的产品; 两个厂商的边际成本为零; 两个厂商都掌握市场需求情况, 他们都面临共同的线性需求曲线; 各厂商根据对手采取的行动, 并假定对手继续如此行事, 来作出自己的决策。

古诺模型仅涉及两个生产厂商, 是一种较为极端的情形。而在现实的经济活动中, 普遍存在的是多个生产厂商控制的情形。本文旨在研究这种多个生产厂商条件下的一般动态古诺模型的数学表达式及均衡解。

1 一般动态古诺模型的数学表达式

现假定寡头垄断市场上有 n 个生产厂商, 分别为厂商1, 厂商2, …, 厂商 n。他们共同面临的线性需求曲线方程为

$$P = a - bQ \tag{1}$$

式中: P 和 Q 分别为产品的价格和产量; a 和 b 均为正常量。记市场容量为 d, 则 $d = \frac{a}{b}$.

在分析多个生产厂商条件下的古诺模型时, 其基本假设与两个生产厂商条件下的古诺模型的基本假设条件相同[9, 10], 不同的只是产量调整规则。与两个厂商古诺模型相同, 多个厂商古诺模型也假设每个厂商在确定其产量时, 将产量确定为剩余市场容量的一半, 以获得最大收益。但在多个厂商的条件下, 应规定调整产量的先后顺序。现假定厂商 1 首先调整产量, 其次是厂商 2, 再其次是厂商 3, 依次下去, 最后是厂商 n。设厂商 i 第 m 次调整后的产量为 $Q_i(m)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则得

$$Q_1(m) = \frac{1}{2}[d - \sum_{i=2}^{n} Q_i(m-1)] = \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} Q_i(m-1)$$

$$Q_2(m) = \frac{1}{2}[d - Q_1(m) - \sum_{i=3}^{n} Q_i(m-1)] = \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}Q_1(m) - \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n} Q_i(m-1)$$

……

$$Q_k(m) = \frac{1}{2}[d - \sum_{i=1}^{k-1} Q_i(m) - \sum_{i=k+1}^{n} Q_i(m-1)] =$$

① 收稿日期: 2001-05-28; 修订日期: 2002-03-27.
基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(79725002); 四川省杰出青年科学基金资助项目(川科基[2001]2 号).
作者简介: 张明善(1963-), 博士, 副教授.

$$\frac{1}{2}d - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1}Q_i(m) - \frac{1}{2}\sum_{i=k+1}^{n}Q_i(m-1)$$

……

$$Q_n(m) = \frac{1}{2}\Big[d - \sum_{i=1}^{n-1}Q_i(m)\Big] = \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}Q_i(m)$$

将上述等式写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} Q_1(m) \\ Q_2(m) \\ Q_3(m) \\ \vdots \\ Q_k(m) \\ \vdots \\ Q_n(m) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1(m) \\ Q_2(m) \\ Q_3(m) \\ \vdots \\ Q_k(m) \\ \vdots \\ Q_n(m) \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1(m-1) \\ Q_2(m-1) \\ Q_3(m-1) \\ \vdots \\ Q_k(m-1) \\ \vdots \\ Q_n(m-1) \end{bmatrix} + \frac{d}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

记上式(2) 中等式右端第 1 个矩阵为A, 即

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

再记$Q(m) = [Q_1(m), Q_2(m), \cdots, Q_n(m)]^{\mathrm{T}}$, $B = [1, 1, \cdots, 1]^{\mathrm{T}}$, 则式(2) 可以写成为

$$Q(m) = -\frac{1}{2}\mathrm{A}Q(m) - \frac{1}{2}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}Q(m-1) + \frac{d}{2}B \tag{4}$$

即

$$(I + \frac{1}{2}\mathrm{A})Q(m) = -\frac{1}{2}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}Q(m-1) + \frac{d}{2}B \tag{5}$$

记$\mathrm{C} = I + \frac{1}{2}\mathrm{A}$, 显见C 为可逆矩阵. 从而, 由式(5) 可得

$$\mathrm{C}Q(m) = -\frac{1}{2}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}Q(m-1) + \frac{d}{2}B \tag{6}$$

即

$$Q(m) = -\frac{1}{2}\mathrm{C}^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}Q(m-1) + \frac{d}{2}\mathrm{C}^{-1}B \tag{7}$$

又记$\mathrm{D} = -\frac{1}{2}\mathrm{C}^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$, $E = \frac{d}{2}\mathrm{C}^{-1}B$. 则由式(7) 可得

$$Q(m) = \mathrm{D}Q(m-1) + E \tag{8}$$

式(8) 即为一般动态古诺模型的数学表达式.

以下所要讨论的问题是, 如何判别由式(8) 确定的古诺模型是否存在均衡解, 以及如果存在均衡解, 均衡解是多少.

2　一般动态古诺模型的均衡解的存在性

为了解决古诺模型均衡解的存在性, 先证明下述重要结论.

定理 1　一般动态古诺模型中, 矩阵D 的所有特征值的模小于 1.

证明　设λ为D 的任一特征值, 于是有$|\lambda I - \mathrm{D}| = 0$, 从而可得

$$\Big|\lambda I + \frac{1}{2}\mathrm{C}^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\Big| = 0 \Leftrightarrow \Big|\lambda\mathrm{C} + \frac{1}{2}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\Big| = 0 \Leftrightarrow \Big|\lambda I + \frac{\lambda}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\Big| = 0 \tag{9}$$

即

$$\begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & \lambda & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} & \lambda & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

令上式中左端行列式为$M(\lambda)$, 则利用行列式的性质可得

$$M(\lambda)=\lambda\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \lambda & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\lambda}{2} & \lambda & \cdots & \frac{1}{2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{2} & \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} & \cdots & \lambda\end{vmatrix}=$$

$$\lambda\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\frac{1}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \cdots & \lambda-\frac{1}{2}\end{vmatrix} \tag{11}$$

又令式(11) 中最右端的行列式值为 $A_n(\lambda)$, 则有

$$M(\lambda)=\lambda A_n(\lambda) \tag{12}$$

下面计算 $A_n(\lambda)$.

应用行列式的Laplace 展开式, 有

$$A_n=(\lambda-\frac{1}{2})A_{n-1}+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot$$

$$\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & \cdots & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\frac{1}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \cdots & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=$$

$$(\lambda-\frac{1}{2})A_{n-1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\cdot$$

$$\begin{vmatrix}1 & \lambda-\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & \cdots & 0\\ 1 & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \cdots & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\end{vmatrix} \tag{13}$$

现在计算式(13) 中的最后一个行列式 为方便起见, 该行列式为 $N_{n-1}(\lambda)$, 则

$$N_{n-1}(\lambda)=$$

$$\begin{vmatrix}1 & \lambda-\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & \cdots & 0\\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \cdots & \lambda-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}-\frac{\lambda}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0\\ -\frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & \cdots & 0\\ -\frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \cdots & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=$$

$$(-\frac{\lambda}{2})\begin{vmatrix}1 & \lambda-\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & \cdots & 0\\ 1 & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} & \cdots & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=$$

$$(-\frac{\lambda}{2})N_{n-2}(\lambda) \tag{14}$$

应用上述递推公式, 可得

$$N_{n-1}(\lambda)=(-\frac{\lambda}{2})N_{n-2}(\lambda)=$$

$$(-\frac{\lambda}{2})^2N_{n-3}(\lambda)=\cdots=$$

$$(-\frac{\lambda}{2})^{n-3}N_2(\lambda)=(-\frac{\lambda}{2})^{n-3}\begin{vmatrix}1 & \lambda-\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=$$

$$(-\frac{\lambda}{2})^{n-2} \tag{15}$$

从而, 由式(13) 和式(15) 知

$$A_n=(\lambda-\frac{1}{2})(\lambda-\frac{1}{2})A_{n-1}+$$

$$(-1)^{n+1}\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{\lambda}{2})^{n-2}=$$

$$(\lambda-\frac{1}{2})A_{n-1}+\frac{\lambda^{n-2}}{2^n} \tag{16}$$

递推式(16), 有

$$
\begin{aligned}
A_n = {} & (\lambda - \frac{1}{2})A_{n-1} + \frac{\lambda^{n-2}}{2^n} = \\
& (\lambda - \frac{1}{2})\left[(\lambda - \frac{1}{2})A_{n-2} + \frac{\lambda^{n-3}}{2^{n-1}}\right] + \\
& \frac{\lambda^{n-2}}{2^n} = \cdots = (\lambda - \frac{1}{2})^{n-2}A_2 + \\
& (\lambda - \frac{1}{2})^{n-3}\frac{\lambda}{2^3} + \cdots + (\lambda - \frac{1}{2}) \cdot \\
& \frac{\lambda^{n-3}}{2^{n-1}} + \frac{\lambda^{n-2}}{2^n} = \\
& \frac{(2\lambda - 1)^n - (\lambda)^{n-1}}{2^n(\lambda - 1)}
\end{aligned} \tag{17}
$$

于是, 将上式代入(12) 得

$$M(\lambda) = \lambda A_n(\lambda) = \lambda\frac{(2\lambda - 1)^n - (\lambda)^{n-1}}{2^n(\lambda - 1)} \tag{18}$$

由 $|\lambda I - D| = 0 \Leftrightarrow M(\lambda) = 0$ 知, 当 $\lambda \neq 1$ 时, 有 $M(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda[(2\lambda - 1)^n - (\lambda)^{n-1}] = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ 或

$$(2\lambda - 1)^n = (\lambda)^{n-1} \tag{19}$$

又易知 $\lambda = 1$ 不是特征值. 事实上, 当 $\lambda = 1$ 时, 对 $M(1)$ 应用行列式的性质, 有

$$M(1) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \neq 0$$

由此得证, $\lambda = 1$ 不是 D 的特征值. 于是, 由式(19), 只须证明满足 $(2\lambda - 1)^n = \lambda^{n-1}$ 的根 λ 的模小于 1 即可.

以下分两种情况: 当 λ 为实根时和 λ 为复根时.

1) 当 λ 为实根时. 易知 $\lambda > 0$. 因为若不然, $\lambda < 0$(显然 $\lambda \neq 0$), 则 $(2\lambda - 1) < 0$, 从而 $(2\lambda - 1)^n$ 与 λ^{n-1} 异号. 由此, $(2\lambda - 1)^n \neq \lambda^{n-1}$, 这与式(20) 矛盾.

现在证明 $\lambda < 1$. 反证. 若不然, 假设 $\lambda > 1$(已证 $\lambda \neq 1$), 则 $2\lambda - 1 > \lambda \Rightarrow (2\lambda - 1)^n > \lambda^n > \lambda^{n-1}$, 这也与式(19) 矛盾.

于是, 得证 $0 < \lambda < 1$, 自然地, $|\lambda| < 1$.

2) 当 λ 为复根时. 因式(19) 中的系数均为实数, 故由多项式理论知, 式(19) 的根必共轭成对出现. 于是, $\bar{\lambda}$ 也是式(19) 的根. 即有

$$(2\lambda - 1)^n = \lambda^{n-1} \text{ 且 } (2\bar{\lambda} - 1)^n = \bar{\lambda}^{n-1} \tag{20}$$

设 $\lambda = a + bi(b \neq 0)$, 并将式(20) 中的两式相乘, 得

$$
\begin{aligned}
& [(2\lambda - 1)(2\bar{\lambda} - 1)]^n = (\lambda\bar{\lambda})^{n-1} \Rightarrow [4\lambda\bar{\lambda} - \\
& \quad 2(\lambda + \bar{\lambda}) + 1]^n = (\lambda\bar{\lambda})^{n-1} \Rightarrow \\
& [4(a^2 + b^2) - 4a + 1]^n = (a^2 + b^2)^{n-1}
\end{aligned} \tag{21}
$$

下面用反证法证明, 满足式(21) 最后一个等式的 a、b 必满足 $a^2 + b^2 < 1$, 即 $|\lambda| < 1$. 以下又分两种情况

1) 若 $a^2 + b^2 = 1$, 则

$$
\begin{aligned}
& 4(a^2 + b^2) - 4a + 1 = a^2 + b^2 \Rightarrow \\
& \quad 4 - 4a + 1 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 0
\end{aligned}
$$

与 $b \neq 0$ 矛盾

2) 若 $a^2 + b^2 > 1$, 再分两种情况

i) 当 $a \geq 1$ 时. 由 $a - 1 \geq 0, 3a - 1 \geq 0$ 可知

$$
\begin{aligned}
& (3a - 1)(a - 1) \geq 0 \Rightarrow 3a^2 - 4a + 1 \geq \\
& 0 \Rightarrow 4a^2 - 4a + 1 + 4b^2 \geq a^2 + 4b^2 \Rightarrow \\
& \quad (2a - 1)^2 + 4b^2 \geq a^2 + 4b^2 \Rightarrow \\
& \quad (2a - 1)^2 + 4b^2 \geq a^2 + b^2 > 1
\end{aligned}
$$

于是, 有

$$
\begin{aligned}
& [(2a - 1)^2 + 4b^2]^n \geq [a^2 + b^2]^n > \\
& \quad [a^2 + b^2]^{n-1}
\end{aligned} \tag{22}
$$

这与式(21) 的最后一个等式矛盾

ii) 当 $a < 1$ 时. 因 $a^2 + b^2 > 1$, 故

$$
\begin{aligned}
& 3a^2 - 4a + 1 + 3b^2 = 3(a^2 + b^2) - 4a + 1 > \\
& \quad 3 \times 1 - 4a + 1 = 4 - 4a > 0
\end{aligned} \tag{23}
$$

从而

$$(2a - 1)^2 + 4b^2 > a^2 + b^2 > 1 \tag{24}$$

由此可知,

$$
\begin{aligned}
& [(2a - 1)^2 + 4b^2]^n \geq [a^2 + b^2]^n > \\
& \quad [a^2 + b^2]^{n-1}
\end{aligned} \tag{25}
$$

这也与式(21) 的最后一个等式矛盾

综上所述, 便得证 $|\lambda| < 1$. 由此得证定理 1.

现在证明一般动态古诺模型均衡解的存在性

设厂商 i 的均衡产量为 Q_i, 则 $Q_i = \lim_{m \to \infty} Q_i(m)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 定义均衡解向量为 $Q = [Q_1, Q_2, \cdots, Q_n]^{\mathrm{T}}$, 则有下述结论

定理 2 一般动态古诺模型均衡产量向量为

$$Q = (I - D)^{-1}E \tag{26}$$

证明 由式(8) 经简单推导可得

$$
\begin{aligned}
Q(m) &= D^{m-1}Q(1) + D^{m-2}E + D^{m-3}E + \\
&\quad \cdots + D^{2}E + DE + I = \\
&\quad D^{m-1}Q(1) + \left(\sum_{i=0}^{m-2} D^{i}\right)E
\end{aligned}
\tag{27}
$$

因 D 的特征根的模小于 1, 由矩阵理论知, $\lim\limits_{m\to\infty} D^{m} = 0$(零矩阵), $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{m-2} D^{i} = (I - D)^{-1}E$. 由式(27) 可得

$$
\begin{aligned}
Q &= \lim_{m\to\infty} D^{m-1}Q(1) + \left(\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{m-2} D^{i}\right)E = \\
&\quad (I - D)^{-1}E
\end{aligned}
\tag{28}
$$

由此获得均衡解的存在性

3　一般动态古诺模型均衡解的计算

现在可以从式(5) 导出均衡解的具体计算公式

定理 3　一般动态古诺模型均衡产量向量为

$$
Q = \left[\frac{d}{n+1}, \frac{d}{n+1}, \cdots, \frac{d}{n+1}\right]^{T} \tag{29}
$$

证明　由式(5) 可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\left[\left(I + \frac{1}{2}A\right)Q(m)\right] = \\
&\quad \left(I + \frac{1}{2}A\right)\lim_{m\to\infty} Q(m) = \\
&\quad -\frac{1}{2}A^{T}\lim_{m\to\infty} Q(m-1) + \frac{d}{2}B
\end{aligned}
$$

即

$$
\left(I + \frac{1}{2}A\right)Q = -\frac{1}{2}A^{T}Q + \frac{d}{2}B
$$

也即

$$
\left(I + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^{T}\right)Q = \frac{d}{2}B \tag{30}
$$

记 $M = I + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^{T}$, 则有

$$
MQ = \frac{d}{2}B \tag{31}
$$

经计算可得

$$
M = \begin{bmatrix}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1
\end{bmatrix} \tag{32}
$$

容易求得 M 的逆矩阵为

$$
M^{-1} = \frac{2}{n+1}\begin{bmatrix}
n & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
-1 & n & -1 & \cdots & -1 \\
-1 & -1 & n & \cdots & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-1 & -1 & -1 & \cdots & n
\end{bmatrix} \tag{33}
$$

由式(31) 可得

$$
Q = M^{-1}\frac{d}{2}B = \frac{d}{2}\,\frac{2}{n+1}\cdot
\begin{bmatrix}
n & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
-1 & n & -1 & \cdots & -1 \\
-1 & -1 & n & \cdots & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-1 & -1 & -1 & \cdots & n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
\frac{d}{n+1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\frac{d}{n+1}, \frac{d}{n+1}, \cdots, \frac{d}{n+1}\right]^{T}
$$

由此得证定理 3.

上述定理表明, 在 n 个厂商条件下的动态古诺模型的均衡解只与厂商的数目 n 和市场容量 d 有关, 且各个厂商的均衡产量均为 $\frac{d}{n+1}$, 即都为市场容量的 $\frac{1}{n+1}$. 下面来看一个例子.

例　考虑一个具有 5 个生产厂商的古诺模型. 设市场容量 d 为单位 1, 各厂商的产量记为 $Q_i(m)$. 设第 1 个厂商进入市场时的产量为 $Q_1(1) = 0.5$, 则各厂商的产量变化如表 1 所示.

从表 1 可以看出, 当进行到第 12 次产量调整时, 各厂商的产量 $Q_i(12)$ 已很接近均衡值 $Q_i(\infty) = 0.166\,666\,67$. 此外, 还可以看出各厂商的产量变化与只有两个厂商时的产量变化不同, 不再是一个严格单调变化过程, 而是一个有升有降的过程. 实质上这是多个厂商古诺模型产量变化的基本特征.

4　结束语

本文建立了任意多个厂商条件下的一般动态古诺模型, 把两个厂商条件下的古诺模型拓广到了一般情形, 并进行了动态分析, 给出了一般动态古诺模型的数学表达式, 并从理论上证明了均衡解的存在性. 进一步通过理论分析和计算, 给出了

各厂商的均衡产量的计算公式

表1 5个厂商古诺模型产量变化

m	$Q_1(m)$	$Q_2(m)$	$Q_3(m)$	$Q_4(m)$	$Q_5(m)$
1	0.500 000 00	0.250 000 00	0.125 000 00	0.062 500 00	0.312 500 0
2	0.265 625 00	0.257 812 50	0.191 406 25	0.126 953 12	0.079 101 56
3	0.172 363 28	0.215 087 89	0.203 247 07	0.165 100 10	0.122 100 83
4	0.147 232 06	0.181 159 97	0.192 203 52	0.178 658 1	0.150 376 32
5	0.148 804 19	0.164 982 08	0.178 592 80	0.178 623 31	0.164 499 31
6	0.156 651 75	0.160 816 92	0.169 704 86	0.174 163 58	0.169 331 45
7	0.162 991 60	0.161 904 26	0.165 804 56	0.169 984 07	0.169 657 76
8	0.166 324 68	0.164 114 47	0.164 959 51	0.167 471 79	0.168 564 77
9	0.167 444 73	0.165 779 60	0.165 369 55	0.166 420 67	0.167 492 72
10	0.167 468 73	0.166 624 16	0.165 996 86	0.166 208 77	0.166 850 74
11	0.167 159 74	0.166 891 95	0.166 444 40	0.166 326 58	0.166 588 66
12	0.166 874 20	0.166 883 07	0.166 663 74	0.166 495 16	0.166 541 91
∞	0.166 666 67	0.166 666 67	0.166 666 67	0.166 666 67	0.166 666 67

参 考 文 献:

[1] Karmakar U, Pitbladdo R. Product-line selection, production decisions and allocation of common fixed costs[J]. International Journal of Production Economics, 1994, 34(1): 17- 33

[2] Leleno J M. Adjustment process-based approach for computing a Nash-Cournot equilibrium[J]. Computers & Operations Research, 1994, 21(1): 57- 65

[3] Li Jian-F, Jr Dwight B, Chen Leonard S, *et al*. Cournot competition model with the uniform pollution tariff: An application to NAFTA[J]. International Journal of Environment and Pollution, 1996, 6(1): 50- 56

[4] Otake T, Min K J. Inventory and pricing policies for a duopoly of substitute products[A]. Industrial Engineering Research-Conference Proceedings '1996[C]. IIE, Norcross, GA, USA, 1996. 293- 298

[5] Sim J, Bae M. Comparison of cooperative R&D arrangements among competitive firms[A]. Managing Virtual Enterprises: A Convergence of Communications, Computing, and Energy Technologies IEEE International Engineering Management Conference 1996[C]. Piscataway, NJ, USA, 1996. 616- 626

[6] Smeers Y. Computable equilibrium model and the restructuring of the European electricity and gas market[J]. Energy Journal, 1977, 18(4): 1- 31

[7] Varian H R. Microeconomic Analysis[M]. New York: W W Norton & Company, 1992

[8] 胡振化, 胡东滨. 寡头垄断市场古诺模型的研讨[J]. 中南工业大学学报, 1997, (1): 21- 23

[9] 唐小我. 两个生产厂商条件下的古诺模型研究[J]. 电子科技大学学报, 1997, (1): 13- 16

[10] 唐小我, 陈海蓉. 多个生产厂商条件下的动态模型研究[J]. 电子科技大学学报, 1996, (6): 35- 38

[11] 梁东黎, 刘 东. 微观经济学[M]. 南京: 南京大学出版社, 1991

[12] 高鸿业, 吴易风. 现代西方经济学(下册)[M]. 北京: 经济科学出版社, 1990

Dynamic analysis of Cournot model with multiple firms

ZHANG Ming-shan[1], *TANG Xiao-wo*[2]

1. School of Economics and Management, Southwest University for Nationalities, Chengdu 610041, China;

2. Management College of University of Electronics Science and Technology of China, Chengdu 610054, China

Abstract: The objective of this paper is to generalize the Cournot model with two firms to general dynamic Cournot model with firms more than two. Given the mathematical formula of the general dynamic Cournot model, it is proved that the equilibrium solution of this model always exists, and furthermore, the formula of the equilibrium solution is obtained. These results give contributions to the theory of Cournot model.

Key words: Cournot model; equilibrium condition; equilibrium solution; equilibrium output