混合判断矩阵排序的线性目标规划法①

徐泽水[1,2], 达庆利[2]
(1. 中国人民解放军理工大学理学院, 南京 210016;
2. 东南大学经济管理学院, 南京 210096)

摘要: 基于互反和互补两类判断矩阵, 给出了混合判断矩阵及完全一致性混合判断矩阵的定义, 介绍了互反判断矩阵与互补判断矩阵之间的转换关系, 提出了混合判断矩阵排序的线性目标规划法. 该法通过建立一个线性目标规划模型可求得混合判断矩阵的排序向量, 具有简洁、实用、易于计算机上实现等特点. 最后进行了算例分析.

关键词: 线性目标规划; 混合判断矩阵; 排序
中图分类号: C934 **文献标识码**: A **文章编号**: 1007-9807(2002)06-0024-05

0 引 言

多属性决策[1,2]是现代决策的一个重要组成部分, 其中, 对给定的备选决策方案进行排序或择优, 是多属性决策的一个重要过程. 决策者(专家)在决策过程中往往需对决策方案进行两两比较, 并构造判断矩阵. 目前人们所研究的判断矩阵的形式一般有两种: 互反判断矩阵[3−10]和互补判断矩阵[10−14]. 关于互反判断矩阵的理论研究已基本成熟(文[15−20]), 有关互补判断矩阵的排序理论与方法也取得了一些进展(文[10, 21−24]). 文[10]还详细研究了互反判断矩阵和互补判断矩阵之间的关系. 然而, 由于客观事物的复杂性, 在决策过程中, 有时会出现同一专家给出不同的判断信息——混合判断信息的情形, 因此, 如何处理这类问题, 是一个具有重要实际应用价值的研究课题, 到目前为止, 有关这方面的研究还是空白. 本文对于同一专家给出不同的判断信息的情形, 给出了混合判断矩阵和完全一致性混合判断矩阵的定义, 提出了混合判断矩阵排序的线性目标规划法. 该法通过建立一个线性目标规划模型求得混合判断矩阵的排序向量, 具有简洁、实用、易于计算机上实现等特点. 最后通过算例说明了方法的可行性和实用性.

1 主要结果

在群组决策中, 设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为方案集, 且记 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$. 考虑专家对决策方案进行两两比较, 并作出判断. 若专家只按互反型标度(见表1)进行赋值, 给出互反判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 它具有如下性质: $a_{ij} > 0$, $a_{ij}a_{ji} = 1$, $a_{ii} = 1$, $i, j \in N$. 若专家只按互补型标度(见表2)进行赋值, 给出互补判断矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$, 它具有如下性质: $b_{ij} > 0$, $b_{ij} + b_{ji} = 1$, $b_{ii} = 0.5$, $i, j \in N$.

表1中, 2, 4, 6, 8 可以取为 1～9 标度相邻的判断中值. 若第 i 元素与第 j 元素的重要性之比为 a_{ij}, 那么第 j 元素与第 i 元素重要性之比为 $a_{ji} = 1/a_{ij}$.

表2中, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 可以取为 0.1～0.9 5 标度相邻的判断中值.

定义1 称 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是完全一致性互反判断矩阵, 若 $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$, $\forall i, j, k \in N$.

定义2 称 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 是完全一致性互补判断

① 收稿日期: 2001-01-18; 修订日期: 2001-11-13.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(79970093).
作者简介: 徐泽水(1968—), 男, 安徽南陵人, 博士生, 副教授.

矩阵, 若 $b_{ij}/b_{ji}=(b_{ik}/b_{ki})(b_{kj}/b_{jk})$, $\forall i,j,k\in N$.

完全一致性互反(补)判断矩阵定义与互反(补)判断矩阵的差异在于:完全一致性互反(补)判断矩阵的所有元素具有传递性,即不仅能体现两个元素之间的重要性关系,而且体现了所有元素之间的重要性关系.

表 1　4 种互反型标度

1～9 标度	指数标度	10/10～18/2 标度	9/9～9/1 标度	含义
1	a^0	10/10	9/9	表示第 i 元素与第 j 元素同样重要
3	a^2	12/8	9/7	表示第 i 元素稍微重要于第 j 元素
5	a^4	14/6	9/5	表示第 i 元素明显重要于第 j 元素
7	a^6	16/4	9/3	表示第 i 元素强烈重要于第 j 元素
9	a^8	18/2	9/1	表示第 i 元素极端重要于第 j 元素

表 2　两种互补型标度

0.1～0.9 5 标度	0.1～0.9 9 标度	含义
0.1	0.1	表示第 j 元素极端重要于第 i 元素
	0.138	表示第 j 元素强烈重要于第 i 元素
0.3	0.325	表示第 j 元素明显重要于第 i 元素
	0.439	表示第 j 元素稍微重要于第 i 元素
0.5	0.5	表示第 i 元素与第 j 元素同样重要
	0.561	表示第 i 元素稍微重要于第 j 元素
0.7	0.675	表示第 i 元素明显重要于第 j 元素
	0.862	表示第 i 元素强烈重要于第 j 元素
0.9	0.9	表示第 i 元素极端重要于第 j 元素

定义 3　称 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 是混合判断矩阵,若该矩阵中既含互反判断信息又有互补判断信息.

定义 4　称 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 是完全一致性混合判断矩阵,若其中的互反判断信息满足 $c_{ij}=c_{ik}c_{kj}$, $\forall i,j,k\in N$, 且互补判断信息满足 $c_{ij}/c_{ji}=(c_{ik}/c_{ki})(c_{kj}/c_{jk})$, $\forall i,j,k\in N$.

引理 1　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是互反判断矩阵,则通过转换公式[10]

$$b_{ij}=a_{ij}/(a_{ij}+1) \tag{1}$$

可得互补判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$.

引理 2　设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是互补判断矩阵,则通过转换公式[10]

$$a_{ij}=b_{ij}/(1-b_{ij}) \tag{2}$$

可得互反判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$

易证下列定理成立.

定理 1　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是互反判断矩阵,则通过转换公式

$$b_{ij}=1/(1+a_{ij}) \tag{3}$$

可得互补判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$.

定理 2　设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是互补判断矩阵,则通过转换公式

$$a_{ij}=b_{ij}/b_{ji} \tag{4}$$

可得互反判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$.

定理 3　若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是完全一致性互反判断矩阵,则通过式(1)、(3)转换得到的判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是完全一致性互补判断矩阵.

定理 4　若 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是完全一致性互补判断矩阵,则通过式(2)、(4)转换得到的判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是完全一致性互反判断矩阵.

若专家在某一准则下对 n 个决策方案进行两两比较,并且构造判断矩阵,那么判断矩阵的排序向量即为 n 个决策方案在该准则下相对权重的向量形式.

设 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$ 是互反判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的排序向量,其中, $u_i>0$, $i\in N$, $\sum_{i=1}^{n}u_i=1$, 则当 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是完全一致性互反

判断矩阵时, 即对于一切 $i,j,k\in N$, $a_{ij}=a_{ik}a_{kj}$ 均成立, 此时有[3,4]

$$a_{ij}=u_i/u_j,\ \forall i,j\in N \tag{5}$$

即 $u_i=a_{ij}u_j$, $\forall i,j\in N$ 把式(5) 代入式(1), 易知

$$b_{ij}=u_i/(u_i+u_j),\ \forall i,j\in N \tag{6}$$

若把式(6) 代入 $b_{ij}/b_{ji}=(b_{ik}/b_{ki})(b_{kj}/b_{jk})$, $\forall i,j,k\in N$, 则等式成立, 即 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 符合定义 2. 故 B 是完全一致性互补判断矩阵. 因此, 若设 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^T$ 是互补判断矩阵 B 的排序向量, 其中, $v_i>0, i\in N$, $\sum_{i=1}^{n}v_i=1$, 则当 B 是完全一致性互补判断矩阵时, 有 $b_{ij}=v_i/(v_i+v_j)$, $\forall i,j\in N$, 即 $(1-b_{ij})v_i=b_{ij}v_j$, $\forall i,j\in N$, 因为 $b_{ij}+b_{ji}=1$, 故 $b_{ji}v_i=b_{ij}v_j$, $\forall i,j\in N$.

对于混合判断矩阵 $C=(c_{ij})_{n\times n}$, 设 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$ 是 C 的排序向量, 其中 $w_i>0$, $i\in N$, $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$, 且令 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 第 i 行中互反判断信息所在列的下标集合为 I_i, 互补判断信息所在列的下标集合为 J_i, $I_i\cup J_i=N$, 则当 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 是完全一致性混合判断矩阵时, 其中的互反判断信息满足 $c_{ij}=w_i/w_j$, $i\in N, j\in I_i$, 即

$$w_i=c_{ij}w_j,\ i\in N, j\in I_i \tag{7}$$

其中的互补判断信息满足 $c_{ij}=w_i/(w_i+w_j)$, $i\in N, j\in J_i$, 即

$$c_{ji}w_i=c_{ij}w_j,\ i\in N, j\in J_i \tag{8}$$

由于决策者在实际决策时所给出的互补判断矩阵往往是非一致性的, 式(7) 和(8) 一般不成立. 为此引入偏差函数 $f_{ij}=|w_i-c_{ij}w_j|$, $i\in N$, $j\in I_i$, 及 $f_{ij}=|c_{ji}w_i-c_{ij}w_j|$, $i\in N, j\in J_i$, 显然, 为了得到合理的排序向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$, 上述偏差函数值总是越小越好, 为此构造下列多目标最优化模型:

MOP

$$\min f_{ij}=|w_i-c_{ij}w_j|,\ i\in N, j\in I_i$$
$$\min f_{ij}=|c_{ji}w_i-c_{ij}w_j|,\ i\in N, j\in J_i$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{n}w_i=1,\ w_i>0,\ i\in N$$

为了求解模型 MOP, 并考虑到所有的目标函数是公平竞争的, 且每个目标函数 f_{ij} 希望达到的期望值为 0, 可将 MOP 转化为下列线性目标规划模型:

LOP

$$\min J=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(s_{ij}d_{ij}^{+}+t_{ij}d_{ij}^{-})$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\ & w_i-c_{ij}w_j-d_{ij}^{+}+d_{ij}^{-}=0,\\ & i\in N, j\in I_i, i\neq j\\ & c_{ji}w_i-c_{ij}w_j-d_{ij}^{+}+d_{ij}^{-}=0,\\ & i\in N, j\in J_i, i\neq j\\ & \sum_{i=1}^{n}w_i=1, w_i>0, i\in N\\ & d_{ij}^{+}\geq 0, d_{ij}^{+}\geq 0, d_{ij}^{+}\cdot d_{ij}^{-}=0,\\ & i,j\in N, i\neq j\end{aligned}$$

其中: d_{ij}^{+} 是 $w_i-c_{ij}w_j$ 高于期望值 0 的上偏差变量; d_{ij}^{-} 是 $w_i-c_{ij}w_j$ 低于期望值 0 的下偏差变量; s_{ij} 和 t_{ij} 分别是 d_{ij}^{+} 和 d_{ij}^{-} 的权系数. 通过求解模型 LOP, 即可得到混合判断矩阵 C 的排序向量 w.

2 算例分析

设对于某一多属性决策问题, 有 4 个备选方案 x_1, x_2, x_3, x_4, 专家对方案进行两两比较, 并用 0.1 ～ 0.9 5 标度和 1 ～ 9 标度进行混合赋值, 给出下列混合判断矩阵

$$C=\begin{bmatrix}1 & 3 & 7 & 0.9\\ 1/3 & 1 & 0.7 & 5\\ 1/7 & 0.3 & 1 & 3\\ 0.1 & 1/5 & 1/3 & 1\end{bmatrix}$$

若取 $s_{ij}=t_{ij}=1$, $i,j=1,2,3,4$, 则利用模型 LOP, 建立下列线性目标规划模型:

$$\min J=\sum_{i=1}^{4}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}(d_{ij}^{+}+d_{ij}^{-})$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & w_1-3w_2-d_{12}^{+}+d_{12}^{-}=0\\ & w_1-7w_3-d_{13}^{+}+d_{13}^{-}=0\\ & 0.1w_1-0.9w_4-d_{14}^{+}+d_{14}^{-}=0\\ & w_2-\frac{1}{3}w_1-d_{21}^{+}+d_{21}^{-}=0\\ & 0.3w_2-0.7w_3-d_{23}^{+}+d_{23}^{-}=0\\ & w_2-5w_4-d_{24}^{+}+d_{24}^{-}=0\\ & w_3-\frac{1}{7}w_1-d_{31}^{+}+d_{31}^{-}=0\\ & 0.7w_3-0.3w_2-d_{32}^{+}+d_{32}^{-}=0\\ & w_3-3w_4-d_{34}^{+}+d_{34}^{-}=0\\ & 0.9w_4-0.1w_1-d_{41}^{+}+d_{41}^{-}=0\\ & w_4-\frac{1}{5}w_2-d_{42}^{+}+d_{42}^{-}=0\end{aligned}$$

$$w_4 - \frac{1}{3} w_3 - d_{43}^{+} + d_{43}^{-} = 0$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1, w_i > 0, i = 1,2,3,4$$

$$d_{ij}^{+} \geq 0, d_{ij}^{-} \geq 0, d_{ij}^{+} \cdot d_{ij}^{-} = 0,$$

$$i, j = 1,2,3,4, i \neq j$$

求解该模型, 得到混合判断矩阵 C 的排序向量为 $w = (0.613\,0, 0.230\,2, 0.108\,2, 0.048\,6)^{T}$. 因此, 相应的方案排序为 $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$.

参 考 文 献:

[1] Hwang C L, Yoon K. Multiple Attribute Decision Making [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981

[2] 陈　珽. 决策分析[M]. 北京: 科学出版社, 1987

[3] Saaty T L. The Analytic Hierarchy Process [M]. New York: McGraw-Hill, 1980

[4] 王莲芬, 许树柏. 层次分析法引论[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1990

[5] 徐泽水. 层次分析新标度法[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(10): 74—77

[6] 徐泽水. 关于层次分析中几种标度的模拟评估[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(7): 58—62

[7] 徐泽水. 综合判断矩阵的一致性及特征值问题研究[J]. 系统工程学报, 2000, 15(3): 258—261

[8] Xu Z S, Wei C P. A consistency improving method in the analytic hierarchy process [J]. European Journal of Operational Research, 1999, 116: 443—449

[9] Xu Z S. On consistency of the weighted geometric mean complex judgement matrix in AHP [J]. European Journal of Operational Research, 2000, 126: 683—687

[10] 徐泽水. AHP 中两类标度的关系研究[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(7): 97—101

[11] Orlovsky S A. Decision-making with a fuzzy preference relation [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, (1): 155—167

[12] Nurmi H. Approaches to collective decision making with fuzzy preference relations [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1981, (6): 249—259

[13] Tanino T. Fuzzy preference orderings in group decision making [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1984, 12: 117—131

[14] Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 97: 33—48

[15] 王应明. 判断矩阵排序方法综述[J]. 决策与决策支持系统, 1995, 5(3): 101—114

[16] Xu Z S. Generalized chi square method for the estimation of weights [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2000, 107: 183—192

[17] 徐泽水. 判断矩阵排序的一类广义最小偏差法(GLDM1)的性质及其标准形[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(1): 50—55

[18] Xu Z S, Lu J J. A new method for calculating priorities in AHP[J]. Journal of Systems Science and Systems Engineering, 1999, 8(2): 179—188

[19] Cogger K O, Yu P L. Eigenweight vectors and least-distance application for revealed preference in pairwise weight ratios[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1985, 46: 483—491

[20] Crawford G, Williams C. A note on the analysis of subjective judgement matrices[J]. Journal of Math. Psychology, 1985, 29: 387—405

[21] 樊治平, 胡国奋. 模糊判断矩阵一致性逼近及排序方法[J]. 运筹与管理, 2000, 9(3): 21—25

[22] 徐泽水. 模糊互补判断矩阵排序的一种算法[J]. 系统工程学报, 2001, 16(4): 311—314

[23] 徐泽水. 模糊互补判断矩阵排序的最小方差法[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(10): 93—96

[24] 徐泽水, 孙在东. 一类不确定型多属性决策问题的排序方法[J]. 管理科学学报, 2002, 5(3): 35—39

Linear-objective programming method for priorities of hybrid judgement matrices

XU Ze-shui[1,2] , *DA Qing-li*[2]

1. Institute of Sciences , PLA University of Science and Technology , Nanjing 210016 ,China ;

2. College of Economics and Management , Southeast University , Nanjing 210096 ,China

Abstract : Based on reciprocal judgement matrix and complementary judgement matrix , this paper first defines two new concepts of hybrid judgement matrix and perfectly consistent hybrid judgement matrix , and then presents the transformation relationship between the reciprocal judgement matrix and the complementary judgement matrix. Furthermore , a linear-objective programming method for priorities of hybrid judgement matrices is also proposed. The method is to set up a linear-objective programming model to obtain the priority vector of hybrid judgement matrix , and is simple , practical and easy to implement on computer. Finally , a numerical example is given to illustrate the developed approach and to demonstrate its feasibility and practicality.

Key words : linear-objective programming ; hybrid judgement matrix ; priority

(上接第 16 页)

Research on formalization method of complicated decision-making problems

YU Chang-rui[1] , *XU Fu-yuan*[1] , *XIANG Yang*[2]

1. College of Management , University of Shanghai for Science and Technology , Shanghai 200093 ,China ;

2. College of Economics and Management , Shandong University of Science and Technology , Taian 271019 , China

Abstract : On the basis of research on reasons of decision-making problems ' complexity , the paper gives out an exact definition of formalization of complicated decision-making problems. Then the paper puts forward a logical framework for formalization method of complicated decision-making problems. The framework is composed of three parts , that is , the representation layer of complicated decision-making problems , the structurization layer of complicated decision-making problems and the integration layer of quantitative analysis models. The paper makes a profound discussion on the key problems arising in each layer.

Key words : decision-making problem ; complexity ; formalization ; qualitative analysis