

参数互补性目标函数构造方法研究

赵佳宝¹, 潘 韬², 盛昭瀚¹

(1. 南京大学管理科学与工程研究院, 南京 210093; 2. 江苏省电信公司, 南京 210029)

摘要:在业务流程重组中,通过对业务流程价值模型的分析发现,价值模型的决策参数间往往存在互补性.文章探讨表征参数互补相关性函数的性质及方法,对于构造业务流程的价值模型具有重要价值.根据互补理论和超模函数特性,分析超模函数表征参数互补相关性的特性,讨论复合超模函数存在的条件,给出参数互补性目标函数的构造方法和步骤,为决策者分析价值模型提供了一种量化的工具.

关键词:互补; 超模函数; 价值模型; BPR

中图分类号: F22 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007 - 9807(2003)04 - 0017 - 06

0 引言

在业务流程重组^[1-3]的分析设计过程中,决策者从系统全局角度分析企业内外部环境,针对主要目标,对原有的组织、技术、人员和资源等进行改进和调整,设计新的业务流程,从而使企业最终的绩效指标得到显著提高.在定性分析之上,通过量化的模型构造决策问题适合的目标函数,表征决策参数间可能存在的相关性和输入输出关系等,对于揭示决策问题的核心本质,进一步分析和决策具有重要作用和价值.

互补原理^[4,6] (complementarity theory) 最早是由 Edgeworth(1881) 提出,主要用于对经济的分析,近年来 Milgrom^[4,5] 和 Roberts 运用该理论对现代制造企业的经济和营运进行研究,发现成功企业的运作具有产品价格低、产品更新快、定货周期短和低次品率等特点,他们通过对数据的分析比较,发现这些要素存在着互补相关性,即对这些要素一同进行改进提高所获的收益远大于它们各自独立改进之和.在业务流程重组中,包括组织、技术等诸多要素,这些要素往往分成若干层(价值模型),在同层决策参数中往往具有互补相关性,如

果不能对具有互补相关性的参数一致地进行改进,或不能正确地识别、组合它们,必将直接影响最终的绩效,这也是业务流程重组成败的一个关键因素.哈默提出业务流程重组要通过对原有流程进行革命性地变革,从而使绩效指标获得巨大提高.通过互补原理正确认识、分析所有的决策参数,在方案中对于具有相关性的要素采用协同方式,共同朝着正确的方向进行合理的改变,即便在输入指标的数量上没有太大的变化,而最终的输出将会有显著的提高,许多实证验证了这点.

目标函数构造的数学基础是建立在 Topkis 前期对超模函数^[7-9] (supermodular function) 研究的基础上.超模函数是一类定义在格空间上的一般函数,对于函数的形式、连续性和可导性没有限定,通过分析可以发现超模函数对于参数互补性具有良好的表征特性,符合互补原理的思想,是构造互补性目标函数的理想模型.

本文在基于对整个业务流程价值模型的分析之上,从参数可能存在的互补相关性入手,着重研究能够表征互补相关性参数的目标函数的性质、特点和构造方法,以及在此基础之上的目标函数的构造.

1 超模类函数定义及特性

设决策变量参数集中任何两个参数存在偏序关系, $x \preceq x'$ 表示 $(\max(x_1 - x_1'), \dots, \max(x_n - x_n'))$, $x \succeq x'$ 表示 $(\min(x_1 - x_1'), \dots, \min(x_n - x_n'))$

定义 1^[7] 令 $f(x)$ 是一个实值函数, 其定义域 X 为一个子格, $X \subseteq R^n$. 如果对于 $\forall x, \forall x', x'' \in X$, 若下式在 X 空间上成立

$$f(x \vee x') + f(x \wedge x') \geq f(x) + f(x') \quad (1)$$

则称 f 是超模函数 (supermodular function).

若

$$f(x \vee x') + f(x \wedge x') \leq f(x) + f(x') \quad (2)$$

则称 f 为子模函数 (submodular function).

可将超模函数式 (1) 变形, 得下式

$$f(x \vee x') - f(x \wedge x') \geq [f(x) - f(x \wedge x')] + [f(x') - f(x \wedge x')] \quad (3)$$

若 f 是一个增函数, 式 (3) 表示当同时增加所选变量的取值, 函数由 $x \wedge x'$ 到 $x \vee x'$ 的输出大于等于各个变量单独从 $x \wedge x'$ 到 x, x' 的输出之和.

可见, 超模函数可以说明参数互补相关性中增益型的特征, 决策参数最佳组合的输出大于各自 (或子集) 输出之和, 如某些生产函数.

将式 (2) 进行转换变形, 可得

$$f(x \vee x') - f(x \wedge x') \leq [f(x) - f(x \wedge x')] + [f(x') - f(x \wedge x')] \quad (4)$$

若 f 是一个增函数, 式 (4) 表示当同时增加所选变量的取值, 函数由 $x \wedge x'$ 到 $x \vee x'$ 的输出小于等于各个变量单独从 $x \wedge x'$ 到 x, x' 的输出之和, 即子模函数中的参数从最小到最大的付出要小于最小到中间参数付出之和. 可见, 子模函数可以说明参数互补相关性中衰减型的特征, 如成本函数.

2 多层复合目标函数超模性研究

2.1 问题的描述

在多层决策问题的价值模型中, 不同层面上的决策参数不相同, 而通过对参数互补相关性的

分析可知, 在低层具有互补相关性的参数在高层中可能存在或不存在互补相关性. 若低层参数的互补性在高层同样存在, 那么对低层参数和其目标函数构造要有何要求, 这对于研究价值模型中决策参数对于最终输出的影响具有重要意义. 下面研究多层复合目标函数具有超模性的前提与条件.

设有一个多层决策问题的价值模型如图 1, 对应相应指标, 各决策参数子集具有互补相关性, 通过对该目标函数超模性的研究, 说明构造一般决策参数具有互补性的超模性目标函数所具备的性质.

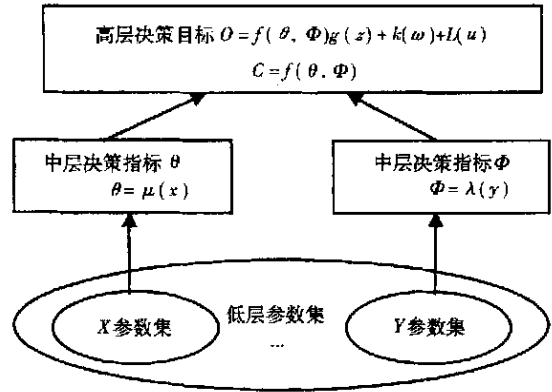


图 1 多层决策问题的价值模型

其中 x, y, u, z 是多维参数集 Z 的子集, 分别对应上层目标是互补相关的; f, g, k 是超模函数.

2.2 互补参数传递性

在参数方案的选取上能够满足链 (chain) 条件, 即所选的方案集方案的参数满足链条件, 其参数对上层指标具有传递性.

定理 1 设 $\mu(x)$ 和 $\lambda(y)$ 是增型实函数, 其中: $x \in X, y \in Y, X \subseteq R^n, Y \subseteq R^m$ 是链; $\mu(x)$ 和 $\lambda(y)$ 的值域为 $\subseteq R^1, \subseteq R^1$; $f(\cdot, \cdot)$ 是函数为增的超模函数, $g(\cdot), k(\cdot), l(\cdot)$ 是函数, 则 f 在 (x, y) 上是超模函数.

证明 $\forall x, \forall x', x'' \in X, \forall y, \forall y', y'' \in Y$, 因为 X, Y 是链, 则可能包括以下四种情况:

- 1) $x \wedge x' = x, x \vee x' = x', y \wedge y' = y, y \vee y' = y'$
- 2) $x \wedge x' = x, x \vee x' = x', y \wedge y' = y', y \vee y' = y$

$$3) x \quad x = x, x \quad x = x, y \quad y = y, \\ y \quad y = y$$

$$4) x \quad x = x, x \quad x = x, y \quad y = y, \\ y \quad y = y$$

对于情况 1)

$$f(\mu(x \quad x), (y \quad y)) + f(\mu(x \quad x), \\ (y \quad y)) = f(\mu(x), (y)) + \\ f(\mu(x), (y))$$

对于情况 2)

$$f(\mu(x \quad x), (y \quad y)) + f(\mu(x \quad x), \\ (y \quad y)) = f(\mu(x), (y)) + \\ f(\mu(x), (y)) \quad f(\mu(x), (y)) + \\ f(\mu(x), (y))$$

情况 3)、情况 4) 与 1)、2) 相同,所以, f 在 (x, y) 上是超模函数,得证.

在参数方案的选取上不能满足链条件的情况通常会发生,如在某个方案中,一些参数的取值要受到限制而不能在该参数的值域中任意选取,或者为了单独衡量单个或部分参数对输出的影响,限定其它参数的取值.在这种情况下,要保证 f 在 (x, y) 上是超模的,则需要对 $\mu(x)$ 和 (y) 的构造进行重构.

定义 2 $f(x)$ 是一个单调递增的实值函数,其定义域 X 为一个子格, $X \subseteq R^n$. 如果对于 $\forall x, \forall x', x \leq x', \alpha > 0$, 若下式在 X 空间上成立 $f(x \quad x) + f(x \quad x) - f(x) - f(x)$ $(f(x) - f(x \quad x))(f(x) - f(x \quad x))$ 则称 $f(x)$ 是强超模函数, α 是强超模系数.

定理 2 设 $\mu(x)$ 和 (y) 是强超模函数,其强超模系数分别为 α_1 和 α_2 , 其中: $x \in X, y \in Y, X \subseteq R^n, Y \subseteq R^m; \mu(x)$ 和 (y) 的值域为 $\subseteq R^1, \subseteq R^1; f(\quad, \quad)$ 是函数为增的超模函数, \quad, \quad . 若对于 $\forall \quad, \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_4, \alpha_1 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4$, 同时 $\alpha_4 + \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \quad \alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)$ 成立,且 $f(\alpha_4, \quad) + f(\alpha_1, \quad) - f(\alpha_3, \quad) - f(\alpha_2, \quad) \geq 0$ (5) 同样若对于 $\forall \quad, \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_4, \alpha_1 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4$, 同时 $\alpha_4 + \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \quad \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)$ 成立,且

$$f(\quad, \alpha_4) + f(\quad, \alpha_1) - f(\quad, \alpha_3) - f(\quad, \alpha_2) \geq 0$$
 (6)

则 f 在 x, y 上是超模的, 同时在 (x, y) 上也是超模的.

证明 1°证明 f 在 x 上是超模的, 对于 $\forall x, \forall x', x \leq x'$

$$\text{设 } \mu(x \quad x) = a, \mu(x \quad x) = d$$

$$\mu(x) = b, \mu(x) = c$$

显然 $d \leq b \leq a, d \leq c \leq a$, 对于 $\forall \quad, \quad$, 如果 μ 在 x 上是强超模的, 则 $a + d - b - c \quad \alpha_1(b - d)(c - d)$, 且式(5) 成立, 所以 f 在 x 上是超模的.

2° f 在 y 上是超模的, 证明如 1° 略.

3°证明 f 在 (x, y) 上是超模的.

因为 f 在 (\quad, \quad) 上是超模的, 对于 (d, b) 和 (c, a) , 有

$$f(c, b) + f(d, d) \geq f(d, b) + f(c, d)$$

同样, 对于 (a, b) 和 (c, a) , 有

$$f(a, a) + f(c, b) \geq f(a, b) + f(c, a)$$

整理可得

$$f(a, a) + f(d, d) - f(b, b) - f(c, c) \\ (f(a, b) + f(d, b) - f(b, b) - f(c, b)) + (f(c, a) + f(c, d) - f(c, b) - f(c, c))$$

显然, 因为 f 分别在 x 和 y 上是超模函数, 所以在右边两个大括号内的数值是正数, 可得

$$f(a, a) + f(d, d) - f(b, b) - f(c, c) \geq 0$$

$$\text{即 } f(\mu(x \quad x), (y \quad y)) +$$

$$f(\mu(x \quad x), (y \quad y))$$

$$f(\mu(x), (y)) + f(\mu(x), (y))$$

所以 f 在 (x, y) 上是超模函数.

定理 2 表明, 如果 $\mu、$ 是强超模函数, 而 $f(\quad, \quad)$ 在 (\quad, \quad) 是超模函数, 如果对于任意 \quad, \quad , $f(\mu(x), \quad)$ 在 x 上是超模的, 对于任意 \quad, \quad , $f(\quad, (y))$ 在 y 上是超模的, 则 $f(\mu(x), (y))$ 在 (x, y) 上是超模的, 这就避免了讨论 $f(\mu(x))$ 的超模性问题.

2.3 复合函数的超模性

定理 3 设 $k(z) = a(z) b(z)$, a 和 b 是在 z 上的增型非负超模函数, 则 k 在 z 上也是超模的.

证明 $\forall z, \forall z', z \leq z', a$ 和 b 是在 z 上的增型非负超模函数, 则有

$$a(z \quad z) \geq a(z) + a(z) - a(z \quad z)$$

$$b(z \quad z) \geq b(z) + b(z) - b(z \quad z)$$

$$k(z \quad z) = a(z \quad z) b(z \quad z)$$

$$(a(z) + a(z) - a(z - z))(b(z) + b(z) - b(z - z))$$

$$\begin{aligned} \text{右式} &= a(z) b(z) + a(z) b(z) - a(z) b(z - z) + a(z) b(z) + \\ & a(z) b(z) - a(z) b(z - z) - a(z - z) b(z) - a(z - z) b(z) + \\ & a(z - z) b(z - z) \end{aligned}$$

上式中 $k(z) = a(z) b(z)$, $k(z) = a(z) b(z)$. 现在讨论下式是否成立,若成立则右式 $k(z) + k(z) - k(z - z)$ 成立.

$$\begin{aligned} &a(z) b(z) - a(z) b(z - z) + a(z) b(z) - a(z) b(z - z) - \\ &a(z - z) b(z) - a(z - z) b(z) + 2 a(z - z) b(z - z) = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

设 $b(z) = b(z - z) + b$, $b(z) = b(z - z) + b$, 显然 b 和 $b = 0$, 将上式化简可得下式

$$\begin{aligned} &a(z) b + a(z) b - a(z - z) b - a(z - z) b = (a(z) - a(z - z)) b + \\ &(a(z) - a(z - z)) b = 0 \end{aligned}$$

所以, k 在 z 上也是超模的, 得证.

设有一个目标函数的描述如下:

$$Q1 \quad \text{设} \quad = f(,) g(z) + k() + L(u),$$

其中, $= \mu(x_1, \dots, x_n)$, $x \in X, X \subseteq R^n$, $= (y_1, \dots, y_m)$, $y \in Y, Y \subseteq R^m$, $z \in Z, Z \subseteq R^{n+m}$, $z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, $C_z, u \subseteq C_z$, 并且 $u = z$, $u = \emptyset$, 其中, $f(,)$, $\mu(x)$, (y) 的定义符合定理 2 的条件, k, L 分别对应于和 u 是增型的超模函数, g 在 z 上是增型超模函数.

定理 4 如 Q1 所述, 则 在 z 上是超模函数.

证明 f 在 (x, y) 上是超模的, $C(z) = f(\mu(x), (y))$, 即 $C(z)$ 在 z 上是增型的超模函数, $C(z) g(z)$ 由定理 3 可知在 z 上也是超模的.

设 $J(, u) = k() + L(u)$, 显然 $J(, u)$ 在 $(, u)$ 上是递增的, k, L 是超模函数, 则有

$$\begin{aligned} &k() + k() = k() + k() \\ &L(u - u) + L(u - u) = L(u) + L(u) \end{aligned}$$

将上两式相加, 即可得 $J(, u - u) + J(, u - u) = J(, u) + J(, u)$.

用 $J(z)$ 代替 $J(, u)$, 可见 $J(z)$ 在 z 上是超模的.

所以, 在 z 上是超模函数, 得证.

通过上述定理的推导证明, 得出了复合超模函数成立的条件与前提.

3 目标函数构造方法及实例

3.1 目标函数构造步骤

在对决策问题的价值模型分析基础上, 针对各个指标, 仔细研究影响该指标的参数及其相关性, 判别指标的函数构造, 通过经验公式和(或)数据拟和方法, 给出目标函数模型, 分析输出函数的特性. 这里的目标函数可能是某个指标的最终函数, 也可以是其某个中间变量的输出函数.

1) 决策问题的价值模型分析

在业务流程重组设计中, 分析决策问题的价值模型是一个十分重要的过程, 这对于明确优化的目标和方向以及变化的尺度具有重要价值. 这是构造各个目标函数的基础.

2) 指标参数结构分析

确定指标的组合层次和参数

在价值模型中, 低层决策变量并不一定是直接作用到决策指标参数, 从低层决策变量到决策指标参数之间, 往往包含若干个层次的多个中间变量, 分析决策指标参数的构成结构及其方式, 明确其包含的中间过程变量以及各中间变量所对应的参数, 明确所选参数值的排序划分和决策指标参数的组合形态.

分析参数间存在的互补相关性

根据管理学、经济学和实证的研究成果以及针对具体业务流程特点, 对参数间可能存在的互补相关性进行分析. 根据其特性按照可能输出值的特点, 分为递增值(增函数)的和递减型(减函数)的, 按照互补性对输出的影响, 分为增益型(超模函数)的和衰减型(子模函数)的.

3) 构造目标函数

针对具体的决策问题, 在对指标参数结构分析的基础上, 确定目标函数的构造形式. 对于具有参数互补性的函数, 根据其参数特性用超模类函数去构造, 同时参照经验公式, 以及可能的输入输出数据, 得出具体的目标函数. 多层次多中间变量的函数要分解成若干个子函数求解.

对于不同类型的目标函数, 其形态和求解方

法各不相同,并没有统一的算法和形式,只有针对具体的目标如生产函数,采用合适的方法如回归分析法、线性规划法等进行拟合。

构造目标函数一般遵循以下原则:

根据经验公式和一般数据统计分析的结果,以及对具体问题的分析判断,给出该函数的构造,注意构造特性与对象的吻合。同时对于决策问题其大多数参数取值可能是离散的,参数间的数据比较是非常重要的,这在函数构造时要充分认识。

通过可能的输入输出集数据,求出函数。数据可能是估算的,或是源于样本(基准)模型的数据。

或者直接给出模型,代入数据分析说明。

4) 目标函数的分析评估

对于求得的目标函数,参照实际的对象进行分析比较,对可能的问题进行调整和重新构造。

3.2 目标函数构造实例

设有一个决策问题,讨论关于改进服务系统的决策,其涉及到将信息技术引入到流程中,这里包含 IT、组织和业务流程的结合与重新设计。此例在此仅为说明目标函数的构造流程,参数间存在的互补相关性分析源自有关重组和 MIS 的文献^[2,10],参数的选取和具体流程的设计(方案集)以及参数取值与范围的确定,限于篇幅不在此详

细说明。

设其中的每个函数均为超模类函数, N, μ 为增型超模函数, O, C_1, C_2 为增型子模函数,在构造上满足定理 4 的条件,模型假设每个决策参数对最终的输出存在直接的影响,具有互补相关性。

$$= k \times N(\mu(a, d, f, g), (b, c, e, h)) - N(\mu(a, d, f, g), (b, c, e, h)) \times O(a, b, c, d, e, f, g, h) - C_1(a, b, c, d, e) - C_2(f, g, h) - I$$

为简化起见,这里只举例说明增型超模函数 $\mu(a, d, f, g)$ 的构造方法。根据参数相关性特点,设 μ 的输出函数 y 为 Cobb-Douglas 型函数,即

$$y = Ax_1 x_2 x_3 x_4$$

通过性质及定理可以容易地验证, y 是增函数,同时也是超模函数。

为便于模型的计算,将决策单元的数据进行处理,将 $\mu(a, d, f, g)$ 中对应的参数取值和输出值进行量化,通过专家评判法用可线性量化比较的数据表示。其中每个参数可以分解成若干个子指标,各自有不同的权重,对照不同的方案得出取值。

设可能的样本数据关系如表 1 所示。

表 1 样本数据表

决策单元								
	样本 1	样本 2	样本 3	样本 4	样本 5	样本 6	样本 7	样本 8
x_1	62	53	24	14	11	24	20	8
x_2	137	76	61	40	43	33	28	32
x_3	317	222	170	100	192	66	66	64
x_4	40	33	35	12	8	15	6	10
y	153	67	52	19	39	25	19	12

这里用线性规划方法求解下面的函数 $y = ALKMN$, 其中 L, K, M, N 为输入; a, d, f, g 为待求的参数。令 $x_0 = \ln y, x_1 = L, x_2 = K, x_3 = M, x_4 = N, x = (1, x_1, x_2, x_3, x_4), c = (\ln A, a, d, f, g)^T$ 。

将其化为以下线性规划问题,将数据代入,求解可得

$$\begin{cases} \min & \sum_{i=1}^n (x\hat{x})_i \\ \text{s. t.} & (x\hat{x})_i \leq x_{0i}, i = 1, \dots, n \\ & \hat{x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\ln y = 0.684 \ln x_1 + 0.4791 \ln x_2 + 0.0001 \ln x_3 + 0.0001 \ln x_4$$

由上式可以看出,决策参数 a, d 对输出的影响最大。当发现模型不能很好拟合实际问题时,需要重新审视模型的构造和参数选值的合理科学性。

同样,对于其它目标函数的求解也是运用类似的步骤,最重要的是函数形式的确定和参数的取值,保证整个输出函数的特性。

在输出模型的基础上,分析模型的特征,可以对单独参数或参数子集对模型的影响进行分析评估,为系统的进一步提高提供定性与定量支持。

4 结束语

本文从业务流程重组包含的系统性特点入手,在对业务流程的价值模型分析基础上,运用决策参数互补性原理以及对超模类函数的研究和扩展,得出具有一般意义的业务流程重组目标函数

的构造形式和方法.包括分析了超模类函数表征参数互补性的特点,讨论了复合函数超模的存在性,包括在链性条件下和非链性条件下低层参数在高层复合目标函数中存在超模性的条件,以及组合目标函数超模性的存在等,最后给出了一般目标函数构造的方法和步骤.其中价值模型的构造,参数相关性分析等问题,不在本文讨论.

参 考 文 献:

- [1] Hammer M. Reengineering work: Don't automate, obliterate[J]. Harvard Business Review, 1990, (July/August): 104—112
- [2] Davenport T H. Process Innovation: Reengineering Work Through Information Technology[M]. Boston, MA: Harvard Business School Press, 1993. 67—86
- [3] 刘运哲,黎志成. 企业重组中几个基本问题的探讨. 管理科学学报, 1998, 3(1): 75—79
- [4] Milgrom P, Roberts J. The economics of modern manufacturing: Technology, strategy, and organization[J]. American Economic Review, 1990, (June): 511—528
- [5] Milgrom P, Roberts J. Complementarities and fit: Strategy, structure, and organizational change in manufacturing[J]. J Econ Theory, 1995, 19: 179—208
- [6] Samuelson P A. Complementarity[J]. Journal of Economic Literature, 1974, (12): 1255—1289
- [7] Topkis D M. Minimizing a submodular function on a lattice[J]. Operations Research, 1978, (April): 305—321
- [8] Topkis D M. Comparative statics of the firm[J]. J Econ Theory, 1995, 67(2): 370—401
- [9] Agliardi E. A generalization of supermodularity[J]. Economics Letters, 2000, 68: 251—254
- [10] Applegate L M. Managing in an information age: Transforming the organization for the 1990s[A]. Information Technology and Emergent Forms of Organization[M]. North Holland: Elsevier, 1994. 96—112

Approaches for objective function constructing with complementarity in parameters

ZHAO Jia-bao¹, PAN Tao², SHENG Zhao-han¹

1. Institute of Management Sciences and Engineering, Nanjing University, Nanjing 210093, China;
2. Jiangsu Telecommunication Corporation, Nanjing 210029, China

Abstract Based on the analysis of business process value model in business process reengineering, there often have the relationship of complementarity among decision variables in a value model. It has a high value for constructing business process value model through the study on the characters and methods which present the complementarity in objective functions. Based on the complementarity theory and the characters of supermodular functions, we studied the basic characters of supermodular functions which can represent the complementarity in parameters and discuss the existence of compounding supermodular functions. At last it provides the basic approach and step for objective functions constructing in parameters with complementarity. Then it provides a quantitative tool for decision-maker in analysis of value model.

Key words complementarity; supermodular function; value modeling; BPR