可控制设置成本对(Q , r , L)存货模型下瑕疵品的影响①

庄博仁, 戴媛坪
(大华技术学院国际贸易系, 中国台湾 30741)

摘要:推广 Ouyang 等 1999 年提出的到货批量中含有瑕疵品的 (Q, r, L) 存货模型,使该模型更一般化,且更符合实务上的存货管理系统.假设设置成本为一决策变量,并假设前置时间内的需求量符合常态分配条件,发展出一套算法,以决定最适的订购策略.

关键词:存货; 瑕疵品; 设置成本; 前置时间
中图分类号:F203　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1007 - 9807(2003)04 - 0029 - 05

0 引 言

在企业的存货管理决策中,前置时间(lead time)的控制愈来愈受到重视,也是学者深感兴趣的主题之一.传统的经济订购量(EOQ)和经济生产模型(EPQ)中,设置成本(setup cost)一直被视为常数.然而在实务上,设置成本是可以控制的,且可藉由如员工的在职训练、程序的改变或采用新设备来缩减.日本企业运用及时存货管理系统(just-in-time,JIT),在企业竞争优势及财务绩效上都可看到明显的成果.在存货管理文献中,设置成本的缩减,经 Porteus[1]与其后学者(如 Nasri, *et al*[2];Sarker and Coates[3])不断修正,已能接近真实的存货状况.

环顾上述研究,都是将前置时间视为已知且不可控制的常数或随机变量.事实上,诚如 Tersine[4]所言,一般前置时间系由订货准备、订货输送、供货商的前置时间、运送时间及设置时间等 5 种成分组成.在实务管理上,前置时间可藉由付出额外的赶工成本加以控制.由于前置时间的缩短,企业可以降低安全存量,减少库存成本,改善顾客服务水准,提升企业的竞争力.Liao and Shyu[5]提出将前置时间视为唯一决策变量的存货模型.Ben-Daya and Raouf[6]扩充其模型,将订货量也视为决策变量.其后陆续基于此一基础,进一步将请购点也当作是决策变量[7~11].最近,Ouyang 等[8]深入剖析了到货批量中含有瑕疵品的存货模型.上述研究皆为在设置成本固定的情况下,探讨前置时间缩减带来的效益.在国内,有关随机需求量的存货决策(如陶菊春等[12],万上海[13]),及考虑增值税条件下的存货模型(郝春虹[14])等都有不错的研究成果.

本文推广 Ouyang 等的假设,修正并建构一个包含瑕疵品的连续性检查 (Q, A, r, L) 存货模型,祈能提供一个更接近真实,且具实务操作特性的存货管理系统模型,并经过数值范例,验证所提新模型成本确实比过去的存货模型成本较具经济效益.

1 符号说明与假设

1.1 符号说明

D ——每年非瑕疵品的期望需求量
h ——每单位非瑕疵品每年的储存成本
h' ——每单位瑕疵品每年的处理成本
π_1 ——每单位缺货成本
π_2 ——每单位销售损失(lost sales)

① 收稿日期:2002 - 01 - 28; 修订日期:2003 - 05 - 28.
作者简介:庄博仁(1964 —),男,博士,助理教授.

v ——每单位货品的检查成本(inspecting cost)

β ——缺货期间缺货数量容许欠拨(backordered)的比例, $\beta \in [0,1]$

p ——瑕疵率(defective rate), $p \in [0,1]$, 随机变量,且平均数为 M_p,变异数为 V_p

$g(p)$ ——p 几率密度函数(p.d.f.)

σ^2 ——每年前置时间内需求量的变异数

$E(\cdot)$ ——数学期望值

Q ——包括瑕疵品的订购量,决策变量

A ——每次订购的设置成本, 决策变量

r ——请购点,决策变量

L ——前置时间,决策变量

X ——前置时间内的需求量服从常态分配(d.f.) F,平均数 DL,标准差 $\sigma\sqrt{L}$

x^+ ——$\max\{x,0\}$

1.2 假设

1) 以连续检查(continuously reviewed)的方式监视存货水准,当存货量降至请购点 r 时,即发出订单.

2) 请购点 $r = DL + k\sigma\sqrt{L}$,其中: DL 为前置时间内的平均需求量; $k\sigma\sqrt{L}$ 为前置时间内的安全存量(safety stock, SS); k 为安全因子.

3) 前置时间内的作业由 n 个互相独立的成分组成. 第 i 个成分有充分赶工下的最小作业时间 a_i,正常的作业时间 b_i,单位时间的赶工成本 c_i. 为方便讨论,将组成成分重新排列,使得 $c_1 \le c_2 \le \cdots \le c_n$. 赶工时,优先考虑第 1 个成分(有最小的单位时间赶工成本),其次是第 2 个成分,依此类推.

4) 令 $L_0 = \sum_{j=1}^{n} b_j$,并以 L_i 表示成分 $1,2,\cdots,i$ 在充分赶工情形下前置时间的长度,因此 L_i 的数学式为 $L_i = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{i}(b_j - a_j)$, $i = 1,2,\cdots,n$; 且在已知的前置时间 $L \in [L_i, L_{i-1}]$ 下,一个周期的总赶工成本为 $C(L) = c_i(L_{i-1} - L) + \sum_{j=1}^{i-1} c_j \cdot (b_j - a_j)$.

5) 当含有瑕疵率 p 的货品量 Q 到达时,检查所有的订购品(非破坏性检查). 假设不发生错误,则期初有效存货水准降为(即非瑕疵品或可售商品的数量) $Q(1-p)$. 检查发现的瑕疵品予以保留,至下次进货时,退还给供货商.

2 Ouyang 等的模型回顾

Ouyang 等[8] 提出,考虑到货批量中含有瑕疵品的 (Q,r,L) 存货模型,全年期望总成本是由设置成本、非瑕疵品的持有成本、缺货成本、检查成本以及前置时间内的赶工成本组成.

$$EAC(Q,r,L) = \frac{D\{A + C(L) + [\pi_1 + \pi_2(1-\beta)]E(X-r)^+\}}{Q(1-M_p)} + h[r - DL + (1-\beta)E(X-r)^+] + \frac{Q\gamma}{2(1-M_p)} + \frac{vD}{1-M_p} \tag{1}$$

式中: $\frac{D}{Q(1-M_p)}$ 为全年的期望订购次数(详见 Schwaller[15] 或 Shih[16])

$M_p = \int_0^1 pg(p)\,\mathrm{d}p$ 为随机变量 p 的平均数

$E(X-r)^+$ 为周期末的期望缺货数量

$$\gamma = h\int_0^1 (1-p)^2 g(p)\,\mathrm{d}p + 2h\int_0^1 (1-p)g(p)\,\mathrm{d}p = h + 2(h-h)M_p + (h-2h)(M_p^2 + V_p) > 0 \tag{2}$$

前置时间内需求量 X 的几率分配 $F(x)$ 服从常态分配,平均数为 DL,标准差为 $\sigma\sqrt{L}$;请购点为 $r = DL + k\sigma\sqrt{L}$,其中 k 是安全因子,本文用 k 取代 r 作为决策变量. 周期结束的期望缺货量 $E(X-r)^+$ 可改写为

$$E(X-r)^+ = \int_r^\infty (x-r)\,\mathrm{d}F(x) = \int_k^\infty \sigma\sqrt{L}(z-k)\,\mathrm{d}F_z(z) = \sigma\sqrt{L}G(k) > 0$$

其中, $F_z(z)$ 为标准常态变量 z 的几率密度函数. 因此,式(1)可改写为

$$EAC(Q,k,L) = \frac{D\{A + C(L) + [\pi_1 + \pi_2(1-\beta)]\sigma\sqrt{L}G(k)\}}{Q(1-M_p)} + h\sigma\sqrt{L}[k + (1-\beta)G(k)] + \frac{Q\gamma}{2(1-M_p)} + \frac{vD}{1-M_p} \tag{3}$$

3　新模型 ——模型的扩充

将设置成本 A 视为决策变量,尝试求取设置成本和其它相关存货成本(如式(3))总和的最小值. A 限制在 $0 < A \leq A_0$ 范围内,A_0 是投资前的设置成本,即原来的前置成本.

$$EAC(Q,A,k,L) = \eta\Psi(A) + EAC(Q,k,L) \quad (4)$$

其中:η 为每单位资金每年的成本(如利息);$\Psi(A)$ 为对数的投资函数.

$$\Psi(A) = b\ln\left(\frac{A_0}{A}\right), \quad A \in (0,A_0] \quad (5)$$

$1/b$ 为每增加一元的投资在设置成本 A 上可降低的百分比.

Hall[17] 指出,此种类型的投资成本和日本企业界的经验相符,Nasri 等学者[2] 也采用过.

将式(5)和(3)代入式(4)中,求取最小值

$$EAC(Q,A,k,L) = \eta b\ln\left(\frac{A_0}{A}\right) + \frac{D\{A + C(L) + [\pi_1 + \pi_2(1-\beta)]\sigma\sqrt{L}G(k)\}}{Q(1-M_p)} + h\sigma\sqrt{L}[k + (1-\beta)G(k)] + \frac{Q\gamma}{2(1-M_p)} + \frac{vD}{1-M_p}, \quad A \in (0,A_0] \quad (6)$$

为求解此非线性规划的问题,首先忽略 $A \in (0,A_0]$ 的限制,将函数 $EAC(Q,A,k,L)$ 分别对 Q、A、k 和 $L \in [L_i,L_{i-1}]$ 求一阶偏微分

$$\frac{\partial EAC(Q,A,k,L)}{\partial Q} = -\frac{D\{A + C(L) + [\pi_1 + \pi_2(1-\beta)]\sigma\sqrt{L}G(k)\}}{Q^2(1-M_p)} + \frac{\gamma}{2(1-M_p)} \quad (7)$$

$$\frac{\partial EAC(Q,A,k,L)}{\partial A} = -\frac{\eta b}{A} + \frac{D}{Q(1-M_p)} \quad (8)$$

$$\frac{\partial EAC(Q,A,k,L)}{\partial k} = -\frac{D[\pi_1 + \pi_2(1-\beta)]\sigma\sqrt{L}P_z(k)}{Q(1-M_p)} + h\sigma\sqrt{L}[1-(1-\beta)P_z(k)] \quad (9)$$

其中,$P_z(k) = P_z(Z \geq k)$,且

$$\frac{\partial EAC(Q,A,k,L)}{\partial L} = \frac{D[\pi_1 + \pi_2(1-\beta)]\sigma L^{-1/2}G(k)}{2Q(1-M_p)} + \frac{1}{2}h\sigma L^{-1/2}[k + (1-\beta)G(k)] - \frac{Dc_i}{Q(1-M_p)} \quad (10)$$

经检视二阶充分条件,可清楚验证 $EAC(Q,A,k,L)$ 并非是(Q,A,k,L)的凸函数. 对任意给定的(Q,A,k)值,$EAC(Q,A,k,L)$ 为 $L \in [L_i, L_{i-1}]$ 的凹函数,因为

$$\frac{\partial^2 EAC(Q,A,k,L)}{\partial L^2} = -\frac{D[\pi_1 + \pi_2(1-\beta)]\sigma L^{-3/2}G(k)}{4Q(1-M_p)} - \frac{1}{4}h\sigma L^{-3/2}[k + 1(1-\beta)G(k)] < 0$$

因此,给定(Q,A,k)值,最小全年期望总成本必发生在区间$[L_i,L_{i-1}]$的端点上. 对已知的 $L \in [L_i,L_{i-1}]$,分别令式(7)、(8)和(9)等于零,经移项整理可得

$$Q = \left\{\frac{2D\{A + C(L) + [\pi_1 + \pi_2(1-\beta)]\sigma\sqrt{L}G(k)\}}{\gamma}\right\}^{1/2} \quad (11)$$

$$A = \frac{\eta b Q(1-M_p)}{D} \quad (12)$$

$$P_z(k) = \frac{hQ(1-M_p)}{hQ(1-M_p)(1-\beta) + D[\pi_1 + \pi_2(1-\beta)]} \quad (13)$$

由式(11)～(13),很难确切寻求到(Q,A,k)的精确解. 所以,建立算法来帮助求(Q,A,k,L)的最佳解.

步骤 1　对每一个前置时间 L_i,$i = 0,1,2,\cdots,n$,执行 (i) 到 (v).

(i) 设起始值 $A_{i1} = A_0$,且 $k_{i1} = 0$,得 $G(k_{i1}) = 0.3989$ (查表,Silver and Peterson [18: 779—786] 或 Brown [19: 95—103]).

(ii) 将 A_{i1} 和 $G(k_{i1})$ 代入式(11)求 Q_{i1}.

(iii) 将 Q_{i1} 分别代入式(12)和(13),求 A_{i2} 和 $P_z(k_{i2})$.

(iv) 查表(Silver and Peterson[18] 或 Brown[19]),由 $P_z(k_{i2})$ 值决定 k_{i2} 与 $G(k_{i2})$.

(v) 重复(ii)到(iv),直到 Q_i、A_i 和 k_i 收敛.

步骤 2　比较 A_i 和 A_0.

(i) 若 $A_i \leq A_0$，则 A_i 为可行解，然后跳到步骤 3.

(ii) 若 $A_i > A_0$，则 A_i 为不可行解，对给定的 L_i，令 $A_i = A_0$，由式(11) ～ (13) 求出对应的 (Q_i, k_i) 值，重复此程序直到收敛为止(求解程序类似步骤 1)，然后进行步骤 3.

步骤 3　对每一组 (Q_i, A_i, k_i, L_i)，$i = 0,1,2,\cdots,n$，计算其对应的全年期望总成本 $EAC(Q_i, A_i, k_i, L_i)$.

步骤 4　找出 $\min\limits_{i=0,1,2,\cdots,n} EAC(Q_i, A_i, k_i, L_i)$.

若 $EAC(Q^*, A^*, k^*, L^*) = \min\limits_{i=0,1,2,\cdots,n} EAC(Q_i, A_i, k_i, L_i)$，则 (Q^*, A^*, k^*, L^*) 为该模型的最佳解. 此时 $r^* = DL^* + k^* \sigma \sqrt{L^*}$，为最佳请购点.

4　数值范例

为了与 Ouyang 等提出的存货模型比较，沿用其设定的数值资料：$D = 600$ 件/年，$A_0 = \$200$/次，$h = \$20$/(件·年)，$h' = \$10$/(件·年)，$\sigma = 7$ 件/周，$v = \$1.6$/件，$\pi_1 = \$50$/件，$\pi_2 = \$150$/件. 前置时间由 3 个成分组成(见表 1)，瑕疵率 p 的几率呈 Beta 分配，其相关参数 $s = 1$，$t = 4$，即 p 的几率密度函数为

$$\begin{cases} g(p) = 4(1-p)^3, & 0 < p < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

因此，p 的平均数 $M_p = s/(s+t) = 0.2$，变异数 $V_p = st/[(s+t)^2(s+t+1)] = 0.026\,67$. 从式(2) 可求得 $\gamma = 16$. 此外，为缩减设置成本，假设 $\eta = 0.1$ 和 $b = 5\,800$.

表 1　前置时间相关数据资料

前置时间组成成分 i	正常作业时间 b_i/d	充分赶工的作业时间 a_i/d	单位时间的赶工成本 c_i/($·d^{-1})
1	20	6	0.4
2	20	6	1.2
3	16	9	5.0

表 2　最适解的结果比较　(L_i 单位：周)

β	设置成本缩减模型 (Q^*, A^*, r^*, L^*)	设置成本缩减模型 $EAC(\cdot)$	设置成本固定模型 (Q^*, r^*, L^*)	设置成本固定模型 $EAC(\cdot)$	节省/%
0.0	(87, 67.17, 78, 4)	$4,210	(134, 73, 4)	$4,476	5.9
0.5	(76, 58.55, 106, 6)	4,162	(135, 71, 4)	4,427	6.0
0.8	(76, 59.09, 103, 6)	4,105	(135, 68, 4)	4,376	6.2
1.0	(77, 59.81, 99, 6)	4,044	(136, 64, 4)	4,319	6.4

注：节省百分比由 $\{[EAC(Q^*, r^*, L^*) - EAC(Q^*, A^*, r^*, L^*)]/EAC(Q^*, r^*, L^*)\} \times 100\%$ 计算

假设前置时间呈常态分配，缺货期间缺货数量允许欠拨的比例 β 分别为 0，0.5，0.8 和 1 四种，运用算法的求解程序可得表 2 的结果. 为进一步了解设置成本缩减的影响效果，同时列出 Ouyang 等提出设置成本为固定下的存货模型做比较.

表 2 结果显示，本文所提出的新模型确实较 Ouyang 等学者所提出的模型能节省 5.9% 到 6.4% 的总成本. 这明显的节省成本效益归因于设置成本的有效控制.

5　结束语

本文尝试将设置成本视为决策变量，假设前置时间内的需求量服从常态分配，建构了包含瑕疵品的连续性检查 (Q, A, r, L) 的存货模型，来决定最适的存货订购策略. 文中探讨的决策层面，较以往的研究文献有更全盘性的考量，因此能提供管理决策者拟定较为完整的存货管理措施.

参 考 文 献：

[1] Porteus E L. Investing in reduced setups in the EOQ model[J]. Management Sciences, 1985, (31): 998—1010

[2] Nasri F, Affisco J F, Paknejad M J. Setup cost reduction in an inventory model with finite range stochastic lead times[J]. International Journal of Production Research, 1990, (28): 199—212

[3] Sarker B R, Coates E R. Manufacturing setup cost reduction under variable lead times and finite opportunities for investment[J]. International Journal of Production Economics, 1990, (49): 237—247

[4] Tersine R J. Principles of Inventory and Materials Management[M]. New York: North Holland, 1982

[5] Liao C J, Shyu C H. An analytical determination of lead time with normal demand[J]. International Journal of Operations & Production Management, 1991, (11): 72—78

[6] Ben-Daya M, Raouf A. Inventory models involving lead time as decision variable[J]. Journal of the Operational Research Society, 1994, (45): 579—582

[7] Moon I, Choi S. A note on lead time and distributional assumptions in continuous review inventory models[J]. Computers & Operations Research, 1998, (25): 1007—1012

[8] Ouyang L Y, Chuang B R, Wu K S. Optimal inventory policies involving variable lead time with defective items[J]. Journal of the Operational Research Society of India, 1999, (36): 374—389

[9] Ouyang L Y, Chuang B R. A minimax distribution free procedure for stochastic inventory models with a random backorder rate[J]. Journal of the Operations Research Society of Japan, 1999, (42): 342—351

[10] Ouyang L Y, Chuang B R. (Q, R, L) inventory model involving quantity discounts and a stochastic backorder rate[J]. Production Planning & Control, 1999, (10): 426—433

[11] Ouyang L Y, Chuang B R. Stochastic inventory models involving variable lead time with a service level constraint[J]. Yugoslav Journal of Operations Research, 2000, (10): 81—98

[12] 陶菊春,吴建民. 具有随机需求量的存货决策分析方法[J]. 数理统计与管理,1998, 17(4): 28—32

[13] 万上海. 有缺货成本的随机需求量的存货决策[J]. 安徽机电学院学报,1999, 14(3): 19—22

[14] 郝春虹. 对现行存货经济订购批量模型的改进[J]. 商学研究, 1997, (188): 52—55

[15] Schwaller R L. EOQ under inspection costs[J]. Production and Inventory Management Journal, 1998, (Third Quarter): 22—24

[16] Shih W. Optimal inventory policies when stockouts result from defective products[J]. International Journal of Production Research, 1980, (18): 677—686

[17] Hall R W. Zero Inventory[M]. Dow Jones-Irwin, Illinois: Homewood, 1983

[18] Silver E A, Peterson R. Decision Systems for Inventory Management and Production Planning[M]. New York: John Wiley, 1985

[19] Brown R G. Decision Rules for Inventory Managemen[M]. Holt, New York: Rinehart and Winston, 1967

Impact of defective items on (Q, r, L) inventory model involving controllable setup cost

CHUANG Bor-ren, TAI Ai-ping

Department of International Trade, Ta Hwa Institute of Technology, Taiwan 30741, China

Abstract: In a recent paper, Ouyang, *et al*. proposed a (Q, r, L) inventory model with defective items in an arrival lot. The purpose of this study is to generalize Ouyang, *et al*'s model by allowing setup cost as a decision variable in conjunction with order quantity, reorder point and lead time. In this study, we first assume that the lead time demand follows a normal distribution. Then, an algorithm procedure of finding the optimal solution is developed.

Key words: inventory; defective item; setup cost; lead time