异质成本分配模型的公理体系及分配方法[①]

郑立群, 李瑞函, 吴育华
(天津大学管理学院, 天津 300072)

摘要: 在建立成本分配问题数学模型的基础上,提出了异质成本分配模型的公理体系,将异质成本分配规则应满足的公理性质分为基本公理性质、一般公理性质和特殊公理性质三类;通过案例研究,深入分析了产出规模不变性、需求单调性、比例性和上限性等公理性质的强制性,并对EANS方法、Aumann-Shapley值法、Friedman-Moulin序列方法和Shapley-Shubik方法等典型的异质成本分配方法对公理性质的满足情况进行了全面讨论,通过严格的数学证明,得出了有价值的结论.

关键词: 公理化研究; 异质成本分配模型; 公理体系; 强制性分析
中图分类号: C934 文献标识码: A 文章编号: 1007 - 9807(2003)06 - 0015 - 06

0 引 言

公理化研究是分配理论发展的前沿领域.按分配对象不同,分配问题一般可归为成本分配和剩余分配两大类.在不考虑个体偏好的前提下,成本分配与剩余分配问题是严格等价的.故本文将成本分配作为标准问题进行研究.这类分配问题可描述如下:一组代理人共同使用一项给定的具有可变回报的技术进行生产,每个代理人需要一份特定产出,同时需要分摊部分成本,应如何制定成本分配规则才能实现公平配置?本文用公理化方法对异质分配模型进行分析,对几种主要的异质成本分配规则的公理性质进行深入探讨.

1 成本分配问题的数学模型描述

根据投入与产出的数量与特性,可将成本分配问题分为三类模型[1].

模型1 同质[②]投入与同质产出模型(简称同质模型)

设成本分配总量事先给定,以正数 C 表示; $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 为一组个体的集合; $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 为非负 n 维向量,表示需求、效用和权利等.假设 $\sum_{i=1}^{n} b_i \geq C$,则成本分配问题可表示为求解 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,满足 $\sum x_i = C$,其中,解向量 x 是 B 的函数.一项公共设施建造成本的分配问题即可转化为上述模型,由于模型没有提供关于生产技术方面的更多信息,解决这类问题的关键在于分配的公平性.

在很多情况下,成本分配总量并不是事先给定,而是由成本函数来确定.设 $\Gamma(1,1)$ 为非减连续的成本函数集合,对于 $C\in\Gamma(1,1)$,有 $C: R_+ \to R_+$, $C(0)=0$.设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 是一组个体; $q=\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$ 是一个需求组合; $C\in\Gamma(1,1)$ 是成本(或生产)函数.令 $\sum_{i=1}^{n} q_i = q_N$,应如何在个体之间分配 $C(q_N)$?这一模型可用 (q, C, N) 或 (q, C) 表示.这时的投入与产出显然是同质的.

① 收稿日期: 2001 - 09 - 11; 修订日期: 2002 - 04 - 02.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(79970040).
作者简介: 郑立群(1969 —), 女, 北京人, 博士, 副教授.

② n 种产出或投入为同质是指可以通过表达形式或计量单位的转化,将投入或产出合并为一种.

模型 2　同质投入、n 种异质[①]不可划分产出[②]模型(简称二元需求模型)

设 $\Gamma(N,1)$ 为非减连续成本函数集合,对于 $C \in \Gamma(N,1)$,有 $C: R_+^n \to R_+$, $C(0) = 0$. 设 $N = \{1,2,\cdots,n\}$ 为一组个体集合; $q = \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ 是 n 类异质不可划分货物需求组合; C 是成本(或生产) 函数, $C \in \Gamma(N,1)$. 这时,应如何分配 $C(q_1, q_2, \cdots, q_n)$?在本模型中,由于产出不可划分,需求只能为 0 或 1. 也就是说每个个体需求是独特的,它们可能对总成本有着不同的影响.

模型 3　同质投入、P 种异质可划分产出模型(简称异质模型)

设 $\Gamma(P \cdot N,1)$ 为非减连续成本函数集合,对于 $C \in \Gamma(P \cdot N,1)$,有 $C: R_+^{P \cdot n} \to R_+$, $C(0) = 0$. 设 $N = \{1,2,\cdots,n\}$ 为一组个体集合, $q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 为 P 种异质货物的需求组合. 其中: $q_i = \{q_{1i}, q_{2i}, \cdots, q_{Pi}\}^{\mathrm{T}}$ 的个体 i 对 P 种货物的需求向量, $i = 1,2,\cdots,n$. 这时应如何在个体之间分配 $C(q_1, q_2, \cdots, q_n)$?

实际上,模型 1 可看作模型 3 的一种特例;模型 2 则是在将需求限定为二元的前提下,模型 3 的转换形式. 因此异质模型(模型 3) 是成本分配模型的一般形式,可称之为具有可变需求的公理化成本分配模型,模型信息包括:具有异质可划分产出的成本函数,以及在每一给定产出下的需求组合.

2　异质模型的公理体系分析

2.1　异质模型的公理体系

异质分配规则应满足的公理性质包括三类:第一类是基本公理性质,它们是对分配规则的基本的公平性要求,是各类成本分配模型必须满足的公理,具有强制性,且与成本函数的变化无关;第二类是一般公理性质,是从某一侧面对公平性的解释,往往与成本函数的变化相联系;第三类是特殊公理性质,是在某些特定前提下,分配规则需具备的公理性质. 异质模型的公理体系详见表 1. 表中 $C \in \Gamma(P \cdot N,1)$, $q \in R_+^{P \cdot n}$; $q_i = (q_{1i}, q_{2i}, \cdots, q_{pi})^{\mathrm{T}}$, $i = 1,2,\cdots,n$; $q^l = \sum_{i=1}^{n} q_{li}$, $l = 1,2,\cdots,P$.

表 1　异质成本分配模型的公理体系

公理性质名称		数学描述	解释与说明
基本公理性质	有效性	$\sum_{i=1}^{n} x_i = C\left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)$	表明分配总额应等于总成本,也被视为成本分配的预算平衡等式,具有最高强制性
	非负性	$x_i(q, C) \geq 0$	是所有成本分配方法必须满足的性质之一
	虚设性	如果对于代理人 i,有 $\partial_i C(q) = 0$,则称代理是虚设的. 对于虚设的代理人 i,如果有 $x_i(q, C) = 0$,则称分配规则 X 满足虚设性	如果代理人 i 的需求并未增加成本,则他不应负担任何成本份额
	等价问题等价处理	若 $q_i = q_j$,则 $x_i(q, C) = x_j(q, C)$	如果所有参加人对技术有同等权利,成本分配额仅依赖于需求大小,而与代理人的身份无关. 也可称为亚里士多德公理
	递阶性	对于 $i, j \in N$,若 $q_{li} \leq q_{lj}$, $q_{ki} = q_{kj} (l \neq k)$,则 $x_i(q, C) \leq x_j(q, C)$	这一公理有时也被称为无优势性,它说明代理人的需求越大,成本份额应越大
一般公理性质	需求单调性[2]	当 q_i 增加为 q_i' 时, $x_i(q', C) \geq x_i(q, C)$	说明分配额 $x_i(q, C)$ 应是需求 q_i 的不减函数. 它在投入贡献和产出份额之间体现一个正确的关系
	可分性	若 $C(q) = \sum_{l=1}^{P} C_l(q^l)$,且 $C_l(q^l) = \lambda_l q^l$,则 $x_i(q, C) = \sum_{l=1}^{P} \lambda_l q_{li}$	如果成本函数是可分的,则成本分配额也应是可分的
	投入规模不变性	对于任意 $\lambda \geq 0$,有 $x_i(q, \lambda C) = \lambda x_i(q, C)$	当投入 C 的度量单位发生变化时,成本分配额的度量单位会发生同样变化,不应对成本分配的结果发生本质影响
	产出规模不变性[3]	对于任何 $\lambda > 0$,有 $x_i(q, C) = x_i(\lambda \otimes q, C^{\lambda})$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 其中, $\lambda \otimes q = (\lambda_1 q^1, \lambda_2 q^2, \cdots, \lambda_P q^P)$	当产出 q 的度量单位变化时,对成本分配结果应无任何影响

① n 种产出或投入为异质是指不可能通过表达形式或计量单位的转化,减少产出或投入的种类,即不能合并产出或投入.
② 产出不可划分是指不能将一种产出分配给两个或两个以上代理人,即不能将一种产出分割开,这时对产出的需求只能为 0 或 1.

续表 1

公理性质名称		数学描述	解释与说明
一般公理性质	对称性	若 C 对 q^l 和 q^k 是对称的,则 $x_i(q \mid {}^{l,k}q_{li}, q_{ki}) = x_i(q \mid {}^{l,k}q_{ki}, q_{li})$	若成本函数对货物 l、k 是对称的,则 $x(q, C)$ 对于货物 l、k 也是对称的
	上限性	如果 C 对于 n 个变量是对称的,则 $x_i(q, C) \leq C(q_i e)$ 式中, $e = 1(1, 1, \cdots, 1)$	当成本函数为凸函数时,上限性使得低需求的代理人不必为其他高需求代理人带来的高边际成本负责
	下限性	$x_i(q, C) \geq \frac{1}{n} C(0 \mid {}^i q_i)$	当成本函数为凸函数时,边际成本上升,下限性实际上是为需求较高的代理人规定其至少应负担的成本份额
	可加性	$x_i(q, C_1) + x_i(q, C_2) = x_i(q, C_1 + C_2)$	虽然可加性并不具有显著的强制性,但实际上人们使用和研究的大部分分配规则都满足这一性质
特殊公理性质	一致性	$x_i(q, C) = x_i(q_{N \setminus i}, C_{N \setminus i})$ 其中, $C_{N \setminus i}(q_{N \setminus i}) = C(q) - x_i$	如果 i 之外的代理人集合 $N \setminus i$ 根据相同的规则对剩余成本 $(C(q) - x_i)$ 进行再分配,则在需求不变的前提下,每个代理人的分配额也应不变
	比例性	—	当成本函数为同质函数时,该分配规则等价于平均成本定价规则
	序列性	—	当成本函数为同质函数时,该分配规则等价于序列成本定价规则

2.2　公理性质的强制性分析

基本公理性质具有一级强制性,而一般公理性质和特殊公理性质的强制性存在较大差异.

2.2.1　产出规模不变性(SI) 公理的强制性分析

产出规模不变性公理的意义主要体现在异质模型中. 从产出的性质上分析,异质模型又可分为产出可比与产出不可比两种情况.

产出不可比的典型案例如电话定价案例[4]: 设有 n 类电话呼叫类型,如包括本地呼叫、长途呼叫、峰值呼叫、峰值外呼叫等. 在不同类型的电话呼叫之间没有直接的方式去比较呼叫的数量,换句话说,本地呼叫与长途呼叫等之间没有直接的交换率. 这时用户应分担的成本份额不应依赖于不同呼叫类型的计量单位,即当产出不可比时,产出规模不变性公理是具有强制性的.

产出可比的典型案例如网络延误分配案例[5]: 设一组代理人分享一个网络. q_i 为参加人 i 的传输率,即每秒发出包裹的期望值; x_i 为参加人 i 在队列中包裹的平均数量; d_i 为队列的平均延误. 三者关系为

$$x_i = q_i \cdot d_i \tag{1}$$

类似于排列队中的 $M/M/1$ 模型,假设输入过程服从参数为 q_i 的 Poisson 过程,服务时间服从参数为 μ 的负指数分布. 这时服务规则(如先到先服务,后到先服务或随机服务等) 的选择决定了参加人延误的概率,换句话说,服务规则的选择相当于成本分配规则的选择,为

$$C(q) = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} q_i \Big/ \left(\mu - \sum_{i=1}^{n} q_i \right) \tag{2}$$

在本案例中,每个参加人的需求 q_i 是可比的,但它们来自于不同用户,故是异质的. 在这种情况下,规模不变性公理没有明显的意义,即当不同代理人的需求可比时,产出规模不变性公理不再是强制性的.

2.2.2　需求单调性(DM) 公理的强制性分析

在二元模型中,每个代理人分别与一项货物相联系,这时如果分配规则不满足需求单调性,则某些代理人可能人为地提高其需求,以便降低分担的成本,因此需求单调性是一个强制性的公平性需求,它在投入贡献与产出份额之间体现一个正向关系.

而在异质模型中,如果技术存在大量的用户,对货物的需求是大量个体代理人少量需求的累加时,需求单调性不再是强制性的. 这是因为某一特定货物的总需求是大量“微小”需求的累加,它不受个别需求增减的控制,代理人不能通过增加本身的需求达到降低成本份额的目的,在这种前提下,需求单调性公理的公平性与激励性均不能体现.

2.2.3　比例性公理的强制性分析

在异质模型中,对货物 i 的需求是一定数量个体需求之和. 当个体需求不能被单独监控时,比例性具有明显的强制性. 例如在电话定价案例中,假设仅有一种通话类型(设为本地呼叫),这样来自不同电话机的需求在成本函数中可进行累加.

若依据某种分配规则,使从不同电话机打出的本地通话单位价格不同,则用户可能会到便宜的电话机上打电话,以便降低费用.只有在分配规则满足比例性时,才能避免代理人之间需求的上述转换.

反之,当代理人的需求易于监控,或代理人的需求各不相同(二元模型,即货物 i 由特殊代理人 i 消费) 时,比例性不是强制的.

2.2.4　上限性公理的强制性分析

在同质模型中,上限性有一定的强制性;在异质模型中,如果产出不同但可比,且成本函数对于所有变量是对称的,则上限性公理仍有其特殊意义.例如在网络延误分配案例中,上限性可以保护小用户的利益不被损害,这不仅反映了公平性,而且有激励作用:当用户等待时间的上限不依赖于其他用户需求时,用户退出队列的可能性会降低.

3　异质成本分配方法对公理性质的满足情况

3.1　典型的异质成本分配方法

典型的异质成本分配方法有 EANS 方法、Shapley-Shubik 方法、Aumann-Shapley 值法和 Friedman-Moulin 序列方法等.

3.1.1　EANS 方法

EANS 方法就是非可分成本的平等分配法,它是一种传统的经验主义方法.代理人的可分成本 SC_i 是指其边际成本,一般认为,SC_i 应是代理人 i 的理想分摊成本.

$$SC_i = C(N) - C(N \setminus i) \tag{3}$$

式中:SC_i ——代理人 i 的可分成本;

$C(N)$ ——代理人集合 $N = \{1,2,\cdots,n\}$ 的总成本;

$C(N \setminus i)$ ——代理人集合 $N \setminus i = \{1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\}$ 的总成本.

当 $\sum_{i=1}^{n} SC_i = C(N)$ 时,每个代理人均可达到其理想分配值 SC_i.然而当 $\sum_{i=1}^{n} SC_i < C(N)$ 时,每个代理人除去分摊 SC_i 之外,再需分摊 $C(N) - \sum_{i=1}^{n} SC_i$ 的一部分.称

$$NSC = C(N) - \sum_{i=1}^{n} SC_i = C(N) - \sum_{i=1}^{n}[C(N) - C(N \setminus i)] \tag{4}$$

为非可分成本.EANS 法的思想是让每个代理人平等分摊 NSC,其定义式如下

$$x_i^e = SC_i + \frac{1}{n} NSC = \frac{1}{n}\left[C(N) + \sum_{j=1}^{n} C(N \setminus j)\right] - C(N \setminus i) \tag{5}$$

式(5) 是下列等式的唯一解

$$\begin{cases} x_i - SC_i = x_j - SC_j & (\forall i, j \in N) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = C(N) \end{cases} \tag{6}$$

3.1.2　Shapley-Shubik(S-S) 方法

Shapley 曾经证明:对于对策 $\langle N, C\rangle$,只存在一种函数满足加法性、有效性和对称性公理,即 Shapley 值[6].将 Shapley 值用于成本分配问题,得到 Shapley-Shubik[7] 方法如下

$$x_i^{ss}(q, C) = \sum_{s: i \in S \subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[C(q_s) - C(q_s \setminus i)] \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

它实质上是把 Shapley 值由分配对策问题引伸到更普遍、更一般化的函数范畴[8].

3.1.3　Aumann-Shapley(A-S) 定价公式

Aumann-Shapley 定价公式[9,10] 是基于无原子对策理论提出的.当存在 P 种异质可划分产出时,A-S 定价公式针对异质模型的表达式为

$$x_i^{as}(q, C) = \sum_{i=1}^{P}\left[q_i^r \cdot \int_0^1 \partial_r C(tq)\,\mathrm{d}t\right] = \sum_{i=1}^{p}\left[q_i^r \cdot P_r(q, C)\right] \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{8}$$

式中:q_i^r ——第 i 个代理人对货物 r 的需求量;

$P_r(q, C)$ ——第 r 种货物的单价.

A-S 机制的直观解释如下:假设 n 种产品共同耗费成本 $f(\alpha)$,在生产过程中,每次生产一个 α_i 的无穷小量,由此产生的边际生产成本应由第 i 种产品来负担,则每一单位第 i 种产品的平均边际成本就是 A-S 价格.

A-S 定价公式与 Shapley 值的内在联系是[11]:假设给定成本函数 f 和需求向量 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$,将每一用户需求 α_i 分成 K 维需求 q_i / K,并将

每一小部分需求看作一个独立需求;然后计算 $n \cdot K$ 个参加者的合作对策的 Shapley 值,当 K 趋向无穷时,就可推导出 A-S 定价公式.

3.1.4　Friedman-Moulin(F-M) 序列方法

F-M 序列方法[12] 是序列成本定价方法[13] 向异质模型的扩展,可以表示为

$$x_i^{fm}(q, C) = \int_0^1 \partial_i C((te) \wedge q)\, \mathrm{d}t \qquad (9)$$

式中: $e = (1, 1, \cdots, 1)$;

$(x \wedge y) = (\min\{x_1, y_1\}, \min\{x_2, y_2\}, \cdots, \min\{x_n, y_n\})$;

C 为无固定成本的成本函数.

3.2　异质成本分配规则的公理性质分析

经作者严格的数学证明,得出异质成本分配方法对公理性质的满足情况如表 2 所示. 证明过程略.

表 2　异质成本分配方法对公理性质的满足情况

分配方法	基本公理性质					特殊公理性质		
	有效性	非负性	虚设性	等价问题等价处理	递阶性	一致性	比例性	序列性
EANS 法	○	×	×	○	○	○	×	×
S-S 法	○	○	○	○	○	×	×	×
A-S 法	○	○	○	○	○	×	○	×
F-M 序列方法	○	○	○	○	○	×	×	○
分配方法	一般公理性质							
	需求单调性	可分性	投入规模不变性	产出规模不变性	对称性	下限性	上限性	可加性
EANS 法	○	○	○	○	○	×	×	○
S-S 法	○	○	○	○	○	○	×	○
A-S 法	×	○	○	○	○	○	×	○
F-M 序列方法	○	○	○	×	○	×	○	○

4　结论

从表 2 的分析结果可以得出结论:

1) 关于 EANS 法公理性质的讨论

本文所论及的四种异质成本分配方法中,仅有 EANS 法满足一致性. 在多阶段成本分配对策中,应用 EANS 法有很大优势. 另一方面, EANS 法不满足非负性和虚设性,这使 EANS 法存在较大局限. 为此在使用该方法时,必须保证所有需求非零,并对成本函数均有影响,以避免虚设性的影响.

2) 关于 S-S 法的公理性质讨论

S-S 法满足所有基本公理性质和除上限性之外的一般公理性质,说明 S-S 法具有强大的公理性质. 但对于低需求代理人,有可能被分配较多成本份额. 这是因为,作为一种随机顺序值,S-S 法是进行加权平均计算,这很可能增大低需求者的成本份额.

S-S 法不满足一致性,说明 S-S 法不适用于多阶段成本分配对策. S-S 法同样不满足比例性或序列性,也就是说 S-S 法不是平均成本定价或序列成本定价向多元模型的拓展,这使得 S-S 法不能具备上述两种方法的一些特性.

3) 关于 A-S 法的公理性质讨论

A-S 法作为 S-S 法的极限情况,与 S-S 法的公理性质有一定相似之处,如 A-S 法同样不满足一致性和上限性. 与 S-S 法不同的是,A-S 法不满足需求单调性;在同质的情况下,它等价于平均成本定价. 其中,不满足需求单调性是 A-S 法的一大缺陷,这使得它在某些情况下有失公平性.

4) 关于 F-M 法的公理性质讨论

与 A-S 法相反,F-M 法不满足产出规模不变性、下限性和比例性,却满足序列性、需求单调性和上限性. 其中,不满足产出规模不变性是 F-M 法的一大缺陷,这说明 F-M 序列方法必须依赖产出单位的比较才能得出分配额,当各种产出的性

质和计量单位不同时,分配额并不可信.

在解决不同的异质分配问题时,应具体分析该问题的公理要求,根据上述结论,选择合适的分配方法.

参 考 文 献:

[1]郑立群, 吴育华, 夏 庆. 同质成本分配方法及其公理性质研究[J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 2001, 34(5): 591—595

[2]Moulin H. Axioms of Cooperative Decision Making, Monographs of the Econometric Society[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. 155—198

[3]Moulin H. Uniform externalities: Two axioms for fair allocation[J]. Journal of Public Economics, 1990, 43(3): 305—326

[4] Billera L, Heath D, Raanan J. Internal telephone billing rates: A novel application of non atomic game theory[J]. Operations Research, 1978, 26(5): 956—965

[5]Clarke D, Shenker S, Zhang L. Supporting real-time applications in a integrated services packet network: Architecture and mechanism[J]. Computer Communication Review, 1992, 22(1): 14—26

[6]Aumann, Shapley L. Values of Non Atomic Games[M]. Princeton: Princeton University Press, 1974. 104—156

[7]Chung Y. A new axiomatization of the shapley[J]. Value Games and Economic Behavior, 1989, 11(5): 119—130

[8]金 锐, 韩文秀. 多人多准则非常和合作型对策研究[J]. 管理科学学报, 1999, 2(1): 32—36

[9]郑立群, 吴育华, 夏 庆. Aumann-Shapley 定价机制在分配问题中的应用[J]. 系统工程学报, 2001, 16(2): 133—137

[10]Moulin H. On additive methods to share joint costs[J]. Japanese Economic Review, 1995b, 46(4): 303—332

[11]Samet D, Tauman Y, Zang I. An application of the Aumann-Shapley prices for cost allocation in transportation problems[J]. Operation Research, 1984, 9(1): 25—42

[12]Kolpin V. Multi-product serial cost sharing: An incompatibility with additivity axiom[J]. Journal of Economic Theory, 1996, 69(4): 227—233

[13] Moulin H. Serial cost-sharing of excludable public goods[J]. Review of Economics Studies, 1994, 61(2): 305—325

Axiomatic analysis of heterogeneous cost sharing model and its methods

ZHENG Li-qun, LI Rui-han, WU Yu-hua

School of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, China

Abstract: Based on setting up the mathematic models of the cost sharing problems, the axiomatic system of the heterogeneous cost sharing model is put forward. The axiomatic characters of heterogeneous cost sharing methods fall into three categories: the basic characters, the general characters and the special characters. The necessity of invariance of output scale, demand monotonicity, proportionality and upper bound is discussed by studying some cases. The characters of four typical heterogeneous cost sharing methods —the EANS method, the Aumann-Shapley pricing, the Friedman-Moulin serial cost pricing and the Shapley-Shubik method —are proven.

Key words: axiomatic analysis; heterogeneous cost sharing model; axiomatic system; necessity analysis