非对称信息条件下实物期权最优投资问题研究①

黄小原, 庄新田
(东北大学工商管理学院, 沈阳 110004)

摘要: 描述了实物期权投资者和经营者价值函数,分析了不同信息条件下实物期权的最优投资决策. 在非对称信息条件下,实物期权经营者对于项目价值信息隐匿,这是一个具有逆向选择的委托代理问题. 设计了以实物期权投资者利润数学期望最大为目标函数,以投资和数量折扣作为状态方程的最优控制问题. 应用极大值原理推导了实物期权最优投资和数量折扣的求解方案. 最后,进行了实物期权最优投资的仿真实验,验证了实物期权在项目投资问题上的分析结果.

关键词: 实物期权; 非对称信息; 投资; 数量折扣; 委托代理; 逆向选择; 极大值原理
中图分类号: F830.9 文献标识码: A 文章编号: 1007 - 9807(2003)06 - 0028 - 06

0 引 言

实物期权是金融期权理论在实物资产期权上的扩展,本质是实物投资及其管理决策. 实物期权与金融期权的相同之处是两者都具有在未来采取专项行动的决策权利. 其不同之处是流动性问题,实物期权是实物,不具备资金流动性,而金融期权具有资金流动性. 如何把握实物投资的内在价值及其决策,是运用实物期权来处理实物投资决策的关键. 文献[1～3]表明可以利用金融衍生工具 ——定价理论确定实物期权内在价值,把握实物期权投资决策. 实物期权在项目开发及管理决策领域得到了广泛应用,例如初创企业、勘探石油、药物开发、基础设施投资等一系列实物投资问题. 实物期权的理论和应用中,存在实物期权的投资者与经营者之间的委托代理问题. 例如某个建设项目投资者,希望该项目的实物期权利润最大,而该项目的经营者隐匿了某些项目建设中的信息,以图获利. 此时,项目投资者希望设计一个委托代理的激励策略,以保证投资达到一定的利润. 这是典型的期权中的委托代理问题,即非对称信息问题.

非对称信息条件的委托代理问题在经济管理领域广泛存在,并且在金融、会计、市场营销及供应链管理上得到了应用[4～9]. 本文将委托代理理论和模型应用于实物期权问题,设计投资者和经营者的实物期权利润模型,在对称信息条件和非对称信息条件下研究实物期权的最优模型问题.

1 实物期权模型

1.1 期权价值模型

Black-Scholes 方程描述期权价值随实物资产和时间变化的动态过程. 在实物期权过程中,项目的实施决策可以无限期延迟,这意味期权执行的到期日没有边界条件. 当确定边界值时,在边界值上必然涉及投资,即期权投资问题. 无限期延迟决策意味投资期权价值与时间无关. 文献[1～3]讨论了这个问题,给出了与时间无关的期权价值模型,即

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{d^2 f}{ds^2} + (r - \delta) s \frac{df}{ds} - rf(s) = 0 \quad (1)$$

式中: r 是无风险收益率; δ 是支付的固定比率; σ 是项目资产的波动率; s 是项目的价值; $f(s)$ 是投

① 收稿日期: 2002 - 01 - 22; 修订日期: 2003 - 05 - 27.
基金项目: 辽宁省自然科学基金资助项目(9910200208).
作者简介: 黄小原(1947 —) ,男,河南罗山人,教授.

资于价值为 s 的项目的期权价值. 期权价值二阶微分方程的边界，即

$$f(0) = 0 \tag{2}$$

$$f(s^*) = s^* - I \tag{3}$$

$$f'(s^*) = 1 \tag{4}$$

式(2) 表明，如果项目价值 $s = 0$，期权显然 $f(0) = 0$. 式(3)、(4) 中的 s^* 是投资为最优时的项目价值. 式(3) 为价值匹配条件，说明现在投资可获得 $s^* - I$ 的净回报. 式(4) 为平滑粘贴条件. 如果 $f(s^*)$ 不是连续的，而且在临界执行点 s^* 不是平滑的，在不同点实施投资可能更好.

文献[3] 给出了期权价值的二阶微分方程式(1) 的解析解，有

$$f(s) = \frac{(\beta - 1)^{1-\beta} s^{\beta}}{\beta^{\beta} I^{\beta-1}} \tag{5}$$

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{(r - \delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{r - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \tag{6}$$

式(5) 描述了投资为 I 价值为 s 的项目期权价值. 式(6) 是期权价值 $f(s)$ 中参数 β 的描述，该参数涉及无风险收益率 r，支付固定比率 δ 和项目资产波动率 σ.

1.2　实物期权的利润模型

实物期权就是实物项目投资及其管理决策. 实物项目具有投资者和经营者，当投资者作为委托人的时候，项目的经营者就是代理人的角色.

考虑实物期权投资者的利润，即

$$\pi_1 = aI - p \tag{7}$$

$$I - I^0 \geq 0 \tag{8}$$

其中：a 是投资 I 的利润；p 是投资者对于经营者的数量折扣. 式(7) 描述了实物期权最简单的关于投资 I 的线性函数，是投资者的利润描述. 式(8) 表明投资者的投资约束.

实物期权经营者的利润，可以表述为

$$\pi_2 = f(s, I) - I + p \tag{9}$$

其中，实物期权价值为 $f(s, I)$，见式(5). 式(9) 表明实物项目经营者期权价值为收入，减去投资者之投资，再加上得到的数量折扣，为实物项目期权经营者的利润.

1.3　对称信息条件下的实物期权最优投资

考虑对称信息条件下的实物项目投资问题，这一问题的模型是在委托代理框架下，已知实物期权投资者和经营者的全部信息的决策问题. 该问题可以简单表述为

$$\max_{I,p} \pi_1 = aI - p \tag{10}$$

$$\text{s.t.} \quad \arg\max \pi_2 = f(s, I) - I + p \tag{11}$$

注意到上述问题，为了简单，没有将投资者投资约束不等式(8) 引入. 这一问题的实质是在实物期权经营者利润最大的约束条件下，如何使实物期权投资者获得最大利润.

在对称信息条件下，实物期权最优投资和数量折扣问题(10)、(11)，是联合最优问题. 其中，式(11) 中的期权价值 $f(s, I)$ 如式(5)、(6) 所示. 联立实物期权投资者和经营者利润函数式(7)、(9)，有

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = f(s, I) + (a - 1) I \tag{12}$$

上述联合实物期权函数的关于投资 I 一阶导数为 0，即可求出最优投资，即

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}I} = (a - 1) + \frac{\mathrm{d}f(I)}{\mathrm{d}I} = 0 \tag{13}$$

$$I^* = \left[\frac{(\beta - 1)^{2-\beta} s^{\beta}}{(a - 1)\beta^{\beta}}\right]^{1/\beta} \tag{14}$$

实物期权的投资者与经营者相应于项目的委托者与代理者. 根据委托代理理论，在对称信息条件下，作为委托者的实物期权投资者有权选择某些决策使作为代理者的实物期权经营者的利润为零[7～12]. 因此，可以设定

$$\pi_2 = f(I) - I + p = 0 \tag{15}$$

以选择实物期权的最优数量折扣. 此时

$$p^* = - f(I^*) + I^* \tag{16}$$

对称信息条件下的实物期权联合利润最大化的解，即最优投资和数量折扣分别是式(14) 和(16).

2　非对称信息条件下的最优投资

考虑非对称信息条件下实物期权最优投资问题. 在实物期权投资问题中，投资者的利润函数已如式(7) 所述. 投资者的投资不等式(8) 可以认为是一种理性约束. 为了处理问题的方便，将投资者式(8) 理性约束等价变为一个二次型函数，即 $b(I - I^0)^2/2$，这里 b 是权重系数. 于是，投资者利润推广为

$$\pi = \pi_1 - \frac{1}{2} b(I - I^0)^2 \tag{17}$$

式(17) 即投资者的利润推广形式.

在不对称信息条件下，实物期权投资经营活动是典型委托代理问题. 这里实物期权投资者观

察不到经营者对于实物期权关于项目的真实价值 s. 实物期权经营者隐匿了项目的价值 s. 项目的价值不可观测,假设其变动区间已知, $s \in [s_1, s_2]$,其概率密度 $g(s)$ 已知. 在委托代理模型框架中,这是一个逆向选择问题[10~12]. 问题是实物期权投资者如何设计激励合同,使经营者在实物期权问题中尽量给出接近真实的项目价值 $\hat{s}$. 在非对称信息条件下,投资者即委托人是在数学期望条件下要求其利润最大,即 $\max\ E(\boldsymbol{y}_1)$,其中, E 是数学期望. 考虑到投资者观测该项目真实价值区间为 $s \in [s_1, s_2]$,这一问题的描述,即

$$\max\ E(\boldsymbol{y}_1) = \int_{s_1}^{s_2} \Big[\boldsymbol{a} - \frac{1}{2} b(I - I^0)^2 - p \Big] g(s) \mathrm{d}s \tag{18}$$

$$\arg \max_{\hat{s}} \boldsymbol{y}_2 = f(I(\hat{s}), s) - I(\hat{s}) + p(\hat{s}) = \frac{(\beta - 1)^{1-\beta} s^{\beta}}{\beta^{\beta} I(\hat{s})^{\beta-1}} - I(\hat{s}) + p(\hat{s}) \tag{19}$$

式中:第 1 项期权价值 $f(I(\hat{s}), s)$ 中的投资 $I(\hat{s})$ 隐含隐匿信息,而这一隐匿信息是投资者采取激励策略时使经营者给出的接近真实项目价值 s, $f(I(\hat{s}), s)$ 中直接表示的项目价值 s 可以观测,而未被隐匿,是一种显式表示,于是期权价值 $f(\cdot, \cdot)$ 可以写作关于隐匿信息 $\hat{s}$、投资函数 $I(\hat{s})$ 和显式信息 s 联合描述的 $f(I(\hat{s}), s)$ 形式;第 2、3 项 $I(\hat{s})$、$p(\hat{s})$ 为写作信息 $\hat{s}$ 的隐匿形式.

在非对称信息最优投资问题中,式(18) 是实物期权投资者的目标函数,即投资者在数学期望条件下,投资的利润最大. 式(18) 也包括投资者个人理性约束不等式(8),它变成了二次型约束. 这是一个实物期权价值 s 被经营者隐匿的逆向选择问题. 问题的决策变量是实物期权投资 I 和数量折扣 p. 解决这类问题的方法是运用最优控制理论,见文献[4~8].

对于非对称信息实物期权问题(18)、(19),首先,将实物期权经营者的激励相容条件(19),即经营者利润最大化问题转化为一阶条件,式(19) 的一阶条件是对项目价值逼近值 $\hat{s}$ 进行的,而并未对价值的显式信息 s 进行微分处理,即

$$\frac{\mathrm{d}p(\hat{s})}{\mathrm{d}\hat{s}} = - \frac{\mathrm{d}f(I(\hat{s}), s)}{\mathrm{d}\hat{s}} + \frac{\mathrm{d}I(\hat{s})}{\mathrm{d}\hat{s}}$$

写成简化形式

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\hat{s}} = - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\hat{s}} + \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\hat{s}} = \Big[\frac{(\beta - 1)^{2-\beta} s^{\beta}}{\beta^{\beta} I^{\beta}(\hat{s})} + 1 \Big] u$$

$$p(s_1) = p_{s_1} \tag{20}$$

其中, $u \overset{\Delta}{=} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\hat{s}}$ 为投资 I 对于实物期权项目价值 $\hat{s}$ 的微分函数,作为控制变量. 将其写为状态方程,即

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\hat{s}} = u, \quad I(s_1) = I_{s_1} \tag{21}$$

状态方程(20)、(21) 中初始条件值分别为 p_{s_1}, I_{s_1}. 问题变为以实物期权投资者的数量折扣和投资作为状态方程,以投资对于实物期权价值参数一阶微分函数作为控制变量,以实物期权投资者利润数学期望最大化为目标函数的最优控制问题.

文[7~12] 研究了非对称信息下的委托代理问题及其揭示原理. 这里根据揭示原理,分析非对称信息条件下实物期权决策的信息隐匿和信息揭示. 在委托代理问题中,一旦采用激励策略,对本问题而言,就形成了对最优控制问题求解,被隐匿的信息将被揭示,它与可观测的信息是等价的. 对于实物期权问题求解, $\hat{s}$ 和 s 就是等价的. 因此,下面的表述对于项目价值可以统一采用 s 表示.

对于实物期权最优控制问题(18)、(20)、(21),应用极大值原理,有问题的哈密顿函数,即

$$H = - \Big[- p + \boldsymbol{a} - \frac{1}{2} b(I - I^0)^2 \Big] g(s) + \lambda_1 \Big[\frac{(\beta - 1)^{2-\beta} s^{\beta}}{\beta^{\beta} I^{\beta}} + 1 \Big] u + \lambda_2 u \tag{22}$$

其中, λ_1、λ_2 是方程的协态变量.

问题的协态方程

$$- \frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial H}{\partial p} = g(s), \quad \lambda_1(s_2) = 0 \tag{23}$$

$$- \frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial H}{\partial I} = - \boldsymbol{a}g(s) + b(I - I^0) g(s) - \lambda_1 \frac{(\beta - 1)^{2-\beta} s^{\beta} I^{-(\beta+1)}}{\beta^{\beta-1}}, \lambda_2(s_2) = 0 \tag{24}$$

问题的控制方程

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = \lambda_1 \Big[\frac{(\beta - 1)^{2-\beta} s^{\beta}}{\beta^{\beta} I^{\beta}} + 1 \Big] + \lambda_2 \tag{25}$$

由协态方程(23),有

$$\lambda_1(s) = - G(s) \tag{26}$$

其中, $G(s)$ 是以 $g(s)$ 为概率密度关于实物期权项目价值 s 的概率分布函数.

由控制方程(25) 与协态变量 $\lambda_1(s)$ 方程(26),有

$$\lambda_2(s) = - \lambda_1 \Big[\frac{(\beta - 1)^{2-\beta} s^{\beta}}{\beta^{\beta} I^{\beta}} + 1 \Big] = \Big[\frac{(\beta - 1)^{2-\beta} s^{\beta}}{\beta^{\beta} I^{\beta}} + 1 \Big] G(s) \tag{27}$$

对于协态变量 $\lambda_2(s)$ 微分,有

$$\frac{d\lambda_2(s)}{ds} = \frac{(\beta-1)^{2-\beta}s^{\beta-1}}{\beta^{\beta-1}I^{\beta}}G(s) + \left[\frac{(\beta-1)^{2-\beta}s^{\beta}}{\beta^{\beta}I^{\beta}}+1\right]g(s) \qquad (28)$$

考虑协态变量 $\lambda_2(s)$ 微分方程(24),联立式(24)与(28)两方程之右端式,有

$$Z(I) = \frac{(\beta-1)^{2-\beta}s^{\beta-1}}{\beta^{\beta-1}}G(s)I^{-\beta} + \left[\frac{(\beta-1)^{2-\beta}s^{\beta}}{\beta^{\beta}}I^{-\beta}+1\right]g(s) + \frac{(\beta-1)^{2-\beta}s^{\beta}}{\beta^{\beta-1}}G(s)I^{-\beta+1} - ag(s) + b(I-I^0)g(s) \qquad (29)$$

$$Z(I) = 0 \qquad (30)$$

式(29)、(30)就是联立式(24)和(28)的结果. 对于式(30)中 $Z(I) = 0$ 可以通过方程近似求解得到投资之优化值 $I = I^*$.

通过方程(30)求解最优投资 $I = I^*$. 然后,通过状态方程(21)、(20)可以近似求解最优折扣 p.

3　仿真

考虑非对称信息条件下实物期权的仿真实验. 假设实物期权问题中,项目价值 s 服从均匀分布,s 的分布区间是 $s \in [s_1, s_2] = [0.2, 0.6]$,概率密度 $g(s) = 1/(0.6-0.2) = 2.5$, $G(s) = 2.5(s-0.2)$. 取 $I^0 = 0.02$. 实物期权投资的利润式(7)中,根据文献[3],利润参数 $a = 1.2$, $b = 1.3$. 实物期权式(6)中,期权参数 $r = 0.06$, $\delta = 0.04$, $\sigma = 0.07$, 则根据式(6)实物期权参数 $\beta = 5.790\,0$. 依照上述参数,对称信息条件下最优投资依式(14)计算可得 $I^s = 0.081\,8s$. 最优折扣依式(16) $p^s = 0.081\,8s - 1.309\,3 \times 10^{-13} \times s^{10.580\,1}$.

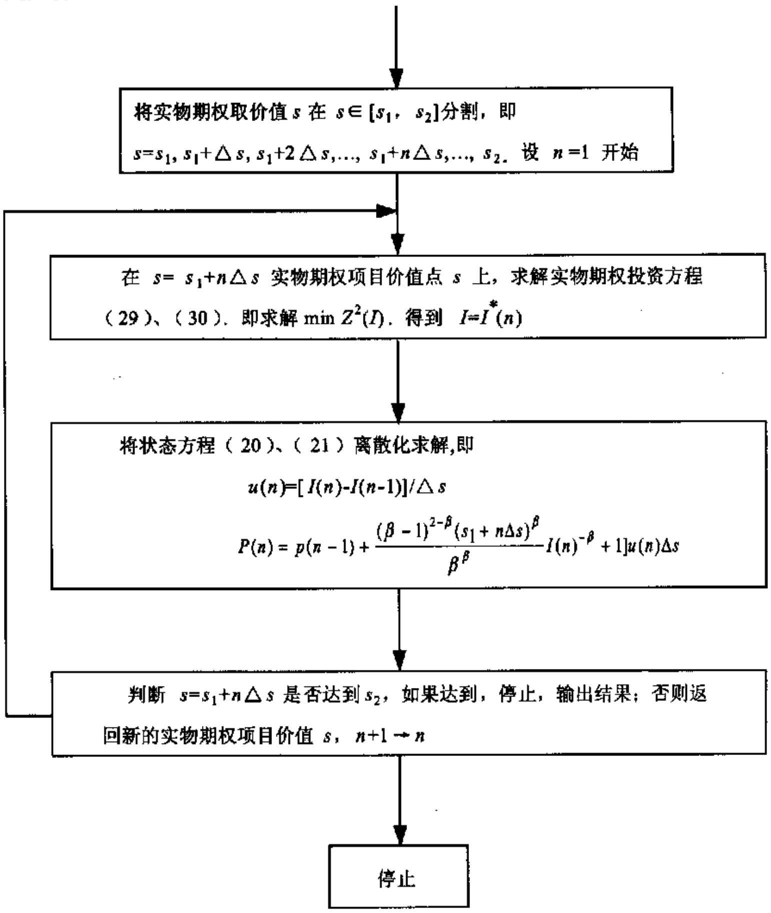

图 1　非对称信息条件下实物期权最优投资计算框图

在非对称信息条件下,实物期权方程(20)、(21)描述了实物期权依项目价值 s 的动态过程.

这里,项目价值 s 是在区间 $s \in [s_1, s_2]$ 上变动的,令 $s = s_1$, $s_1 + \triangle s$, $s_1 + 2\triangle s$, …, $s_1 + n\triangle s$, …,

s_2，$\triangle s = 0.02$. 由于非对称信息条件下，实物期权问题(18)、(20)、(21)没有解析解，只能采取数值求解. 这里的实物期权最优控制问题与传统的最优控制问题数值求解有重要的区别，就是实物期权最优控制问题已经得到了关于投资 I 的代数方程，而无须去求解协态变量的微分方程. 根据实物期权投资 I 的代数方程(29)、(30)，这里运用 MATLAB 语言，采用非线性无约束优化功能函数——fmin 函数求解式(29)、(30)的变形方程，即 $\min\ Z^2(I)$. 计算框图如图 1 所示.

计算结果如图 2～5. 图 2 描述了项目价值 s 与投资 I 的关系，可看出非对称信息条件下的投资大于对称信息条件下的投资，说明作为项目投资者的委托人不掌握信息所付出的代价. 图 3 描述了项目价值 s 与数量折扣 p 的关系，在对称信息条件下，项目价值与数量折扣成正比. 在非对称信息条件下，项目价值与数量折扣成反比. 这说明信息隐匿给作为项目经营者的代理人带来的好处. 图 4 描述了项目价值 s 与投资者利润 Y、经营者利润 Y 的关系，在广义利润意义下，投资者与经营者的利润成正负对称关系. 图 5 描述了项目价值 s 与期权价值 f 成正比关系，但对称信息条件下的期权价值远大于非对称信息条件下的期权价值，表明信息对期权价值的影响作用.

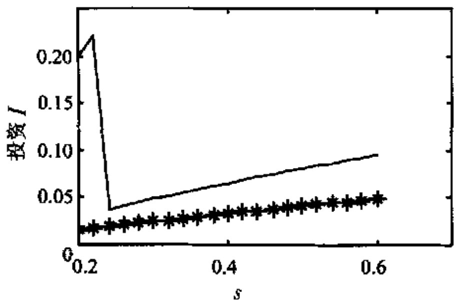

图 2 实物期权投资关系

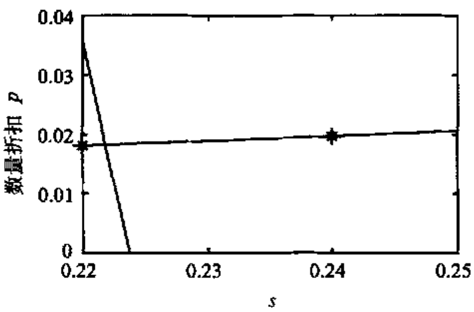

图 3 实物期权数量折扣关系

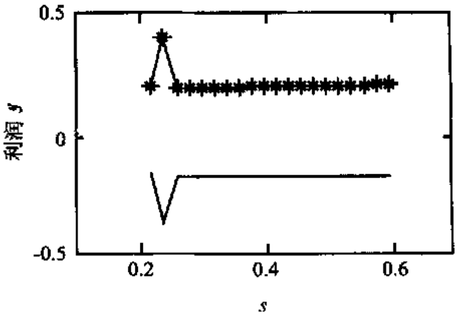

图 4 投资者与经营者利润关系

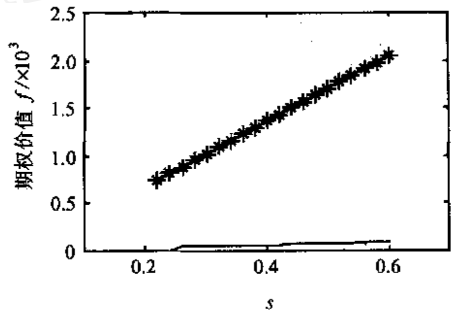

图 5 期权价值关系

图 2、3、5 中，* * * 表示对称信息条件；——表示非对称信息条件. 图 4 中，* * * 表示 Y；——表示 Y.

4 结束语

本文运用金融期权理论研究了实物投资的内在价值及其决策问题，提出实物期权投资者和经营者价值函数. 在非对称信息条件下，实物期权经营者对于项目价值信息隐匿，这是一个具有逆向选择的委托代理问题，应用极大值原理推导了实物期权最优投资和数量折扣的求解方案. 结果表明，可以利用金融衍生工具定价理论确定实物期权内在价值，把握实物期权投资决策.

参 考 文 献：

[1][美]马莎 阿奴拉奴，纳林 库拉蒂拉卡. 实物期权：不确定环境下的战略投资管理[M]. 北京：机械工业出版社，2001. 7—15

[2][美]约翰 赫尔. 期权期货和衍生证券[M]. 北京：华夏出版社，1997. 75—83

[3]Meier H G, Christofides N, Salkin G. Capital budgeting under uncertainty—An integrated approach using contingent claims analysis and integer programming[J]. Operations Research, 2001, 49(2): 196—206

[4]Ann V A. The principal/agent paradigm: Its relevance to various functional fields[J]. European Journal of Operational Research, 1993, 70(1): 83—103

[5]Corbett C J, Groote X D. A supplier's optimal quantity discount policy under asymmetric information[J]. Management Science, 2000, 46(3): 445—450

[6]Gauder G, Pierre L, Long I V. Real investment decisions under adjustment costs and asymmetric information[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1998, 23(1): 71—95

[7]Yeom S, Balachandran K, Ronen J. The role of transfer price for coordination and control within a firm[J]. Review of Quantitative Finance and Accounting, 2000, 14(2): 161—192

[8]Corbett C J, Tang C S. Designing supply contracts: Contract type and information asymmetry[A]. In: Tayur S, Ganeshan R, Michael M. ed. Quantitative Models for Supply Chain Management[M]. Kluwer Academic Publishers, 2000. 269—298

[9]Tsay A A, Nahmias S. Modeling supply chain contracts: A review[A]. In: Tayur S, Ganeshan R, Michael M. ed. Quantitative Models for Supply Chain Management[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000. 299—336

[10]让 - 雅克·拉丰. 激励理论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001. 231—239

[11]让 - 雅克·拉丰, 大卫·马赫帝摩. 激励理论——委托代理模型[M]. 北京: 经济科学出版社, 2002. 32—34

[12]让 - 雅克·拉丰. 激励理论的应用[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001. 78—85

Research of real options optimization investment under asymmetry information

HUANG Xiao-yuan, ZHUANG Xin-tian

School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110004, China

Abstract: The real options are enlargement of the financial options. Its essence is object item investment and policy decision of management. In this paper real options investor and value function of operator are described. The optimization investment policy decision of the real options has been analyzed under different information conditions. The operator of real options hides the item value information under asymmetry information. It is a principal-agent problem having the converse selection. This paper designed that objective function is taken at the biggest mathematical expectation value of investment profit. The optimization control of the state equation is taken at the investment and quantity discount. Using maximal principle the found solution scheme of the real options optimization investment and the quantity discount has been derived. Finally, the emulation experiment in the real options optimization investment was made. The analysis result of real options in the item investment problem is verified.

Key words: real options; asymmetry information; investment; quantity discount; principal-agent; adverse selection; maximal principle