亚式期权在依赖时间的参数下的定价①

詹惠蓉, 程乾生
(北京大学数学科学学院, 北京 100871)

摘要: 假定标的资产价格模型中的参数为时间 t 的函数(即无风险利率 $r(t)$, 标的资产的期望收益率 $\mu(t)$, 波动率 $\sigma(t)$ 及红利率 $g(t)$), 利用风险中性定价及随机积分的性质, 得到连续几何平均欧式亚式期权在六种情形下价格的解析公式和一个平价关系, 且通过调整执行价格的形式而得到固定执行价格的连续算术平均欧式亚式期权的渐进公式.

关键词: 亚式期权; 风险中性定价; 平价关系; 几何平均; 算术平均
中图分类号: O211.6; F830.9　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1007 - 9807(2004)06 - 0024 - 06

0 引 言

亚式期权(Asian options)是几种最常见的新型期权中的一种,由于它首先由日本金融市场创造并使用,故被称为亚式期权[1]. 它主要在场外交易,在股票、商品、利率、外汇及能源,尤其是电力工业上有广泛应用. 因它的收益函数与标的资产价格的平均值有关,故又被称为平均期权. 它的种类很多,按平均的类型可分为几何平均和算术平均亚式期权;按交割日的不同可分为欧式和美式的两种;按股价的抽样类型可分为离散型和连续型;按期权有效时间和平均期间的起始时刻的关系可分为平凡的(plain vanilla),远期开始的(forward start)和进展中的(in progress)三种;按执行价格的类型可分为固定执行价格(fixed-strike)和浮动执行价格(floating-strike). 市场上交易的亚式期权大都是算术平均类型的,但其价格并没有解析表达式,通常采用蒙特卡罗模拟[2~4],改进的二叉树[5,6]及 PDE 方法[7~10]来求值或是通过逼近算术平均的分布得到价格的解析渐进公式[11,12]. 值得注意的是,几何平均亚式期权的价格一般有解析公式,由于有类似的性质,故它在算术平均亚式期权的定价中起了重要的作用,如在蒙特卡罗估计中可作为控制变量而大大地减小估计的方差,也可通过它得到算术平均时的渐进公式.

上面的研究都建立在假设标的资产价格模型的参数为常数的前提下,这对短期期权的定价影响不大,但对期限较长的期权,若假设无风险利率和标的资产的收益率、波动率常数显然不合理. 尽管已有文献研究并得到了标的资产服从依赖时间的参数模型下的欧式期权价格的解析公式[1,13~15],但相应的亚式期权的定价目前还没有系统的研究.

本文在标的资产服从依赖时间的参数模型下,利用风险中性定价和随机积分的性质,首先通过调整执行价格的渐进法,得到固定执行价格的连续算术平均的亚式期权价格的渐进公式.

为简单计,下文将依赖时间的参数下的连续几何平均欧式亚式期权简称为期权.

1 固定执行价格期权的定价

假定金融市场仅有两种资产:一种是无风险资产如政府债券和银行存款,且债券价格过程满足方程: $dB_t = r(t)B_t dt$, $B_T = 1$, 其中 $r(t)$ 为无风险利率. 另一种资产是风险资产且其价格过程

① 收稿日期: 2002 - 07 - 17; 修订日期: 2004 - 04 - 01.
作者简介: 詹惠蓉(1976 —), 女, 浙江杭州人, 博士, 北京外国语大学国际商学院讲师.

满足方程

$$\mathrm{d}S_t = S_t[\mu(t) - g(t)]\mathrm{d}t + S_t\sigma(t)\mathrm{d}W_t \quad (1)$$

其中:$\mu(t)$、$\sigma(t)$ 和 $g(t)$ 分别为风险资产的期望收益率、波动率和红利率. $\{W_t, 0 \le t \le T\}$ 是定义在概率空间 (Ω, F, P) 上的标准布朗运动, 其中 $\{F_t, 0 \le t \le T\}$ 为由 $\{W_t, 0 \le t \le T\}$ 产生的自然 σ-域.

假定 $r(t), g(t), \mu(t), \sigma(t) > 0$ 均为非随机函数且满足

$$\int_0^T r(t)\mathrm{d}t < \infty, \int_0^T g(t)\mathrm{d}t < \infty,$$

$$\int_0^T \mu(t)\mathrm{d}t < \infty, \int_0^T \sigma^2(t)\mathrm{d}t < \infty$$

另外假定 $0 \le t_0 \le t \le t_1 \le T$, t 表示期权有效期间的起始时刻, T 表示期权到期时刻. 文中的平凡,远期开始和进展中三种情形意味着平均区间从时刻 t, t_1, t_0 开始. 令 $\theta(s) = \dfrac{\mu(s) - r(s)}{\sigma(s)}$,且假定 $\int_0^T \theta^2(s)\mathrm{d}s < \infty$, 则若令 $W_t^\theta = W_t + \int_0^t \theta(s)\mathrm{d}s$,由 Girsanov 定理可知 W_t^θ 是概率测度 P 的等价概率测度 Q 下的标准布朗运动, 其中 Q 满足

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = \exp\left\{-\int_0^t \theta_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s \cdot \theta_s \mathrm{d}s\right\}$$

且式(1) 变为

$$\mathrm{d}S_t = S_t[r(t) - g(t)]\mathrm{d}t + S_t\sigma(t)\mathrm{d}W_t^\theta \quad (2)$$

因在式(2) 中只出现了独立于风险偏好的变量, 故可用风险中性定价求价格公式. 由式(2) 及 Ito 引理,可得

$$S_T = S_t\exp\left[\int_t^T A(s)\mathrm{d}s + \int_t^T \sigma(s)\mathrm{d}W_s^\theta\right] \quad (3)$$

令

$$a = \exp\left\{\frac{1}{T - t_0}\int_{t_0}^t \ln S_u \mathrm{d}u\right\}, b = \frac{T - t}{T - t_0}$$

$$R = \exp\left[-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s\right],$$

$$A(s) = r(s) - g(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)$$

$$x = \frac{1}{T - t}\int_t^T A(s)(T - s)\mathrm{d}s + \frac{1}{T - t}\int_t^T \sigma(s)(T - s)\mathrm{d}W_s^\theta,$$

$$y = \int_t^T A(s)\mathrm{d}s + \int_t^T \sigma(s)\mathrm{d}W_s^\theta$$

则根据随机积分的性质, 易知 x, y 的期望 μ_x, μ_y 方差 σ_x^2, σ_y^2 分别是

$$\mu_x = \frac{1}{T - t}\int_t^T A(s)(T - s)\mathrm{d}s,$$

$$\mu_y = \int_t^T A(s)\mathrm{d}s$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{(T - t)^2}\int_t^T \sigma^2(s)(T - s)^2\mathrm{d}s,$$

$$\sigma_y^2 = \int_t^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s$$

若将 x, y 中的 t 改为 t_1,则分别得到相应的 x_1, y_1, $\mu_{x_1}, \mu_{y_1}, \sigma_{x_1}^2, \sigma_{y_1}^2$.

令 $\omega = \{1, -1\}$, 其中:$\omega = 1$ 表示看涨期权, $\omega = -1$ 表示看跌期权.

定理 1　1) 在平凡情形下, 固定执行价格期权在 t 时的价格公式为

$$V_1(t, S_t, \mu_x, \sigma_x, K) = \omega R\left[S_t\exp\left(\mu_x + \frac{1}{2}\sigma_x^2\right)N(\omega d_2) - KN(\omega d_1)\right] \quad (4)$$

其中: K 为执行价格, $d_1 = \dfrac{\ln\dfrac{S_t}{K} + \mu_x}{\sigma_x}$, $d_2 = d_1 + \sigma_x$,此处及下文中出现的 $N(\cdot)$、E_θ 分别表示累积分布函数及风险中性期望函数.

2) 看涨看跌期权的平价关系

$$CV_1(t, S_t, \mu_x, \sigma_x, K) + RK = PV_1(t, S_t, \mu_x, \sigma_x, K) + RS_t\exp\left(\mu_x + \frac{1}{2}\sigma_x^2\right) \quad (5)$$

其中: CV_1 和 PV_1 分别表示式(4) 中的 ω 取 1, -1 而得到的看涨和看跌期权的价格.

证明　由式(3) 知,在平凡情形下标的资产价格的连续几何平均值 GA 为

$$\exp\left\{\frac{1}{T - t}\int_t^T \ln S_u \mathrm{d}u\right\} = S_t e^x = S_t\exp\left\{\mu_x + \frac{1}{T - t}\int_t^T \sigma(s)(T - s)\mathrm{d}W_s^\theta\right\}$$

其中:第 2 个等式是通过交换二重积分的积分顺序而得到的,则平凡情形下固定执行价格期权在 T 时的收益函数为

$$f_1 = \{\omega GA - \omega K\}^+ = \left\{\omega S_t\exp\left[\mu_x + \frac{1}{T - t}\int_t^T \sigma(s)(T - s)\mathrm{d}W_s^\theta\right] - \omega K\right\}^+$$

由风险中性定价知

$$V_1(t, S_t, \mu_x, \sigma_x, K) = E_Q[Rf_1] =$$

$$RE_Q\left\{\omega S_t \exp\left[\mu_x + \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma(s) \cdot (T-s)\,\mathrm{d}W_s^\theta\right] - \omega K\right\}^+$$

令 $H = \left\{S_t \exp\left[\mu_x + \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma(s)(T-s)\,\mathrm{d}W_s^\theta\right] \geq K\right\} = \{d_1 + y \geq 0\}$

其中: $y = \dfrac{\frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma(s)(T-s)\,\mathrm{d}W_s^\theta}{\sigma_x}$

$$CV_1(t, S_t, \mu_x, \sigma_x, K) =$$

$$RS_t \int_{-d_1}^{\infty} \exp\left[\mu_x + \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma(s)(T-s)\,\mathrm{d}W_s^\theta\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y - RK\int_{-d_1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y =$$

$$RS_t\mathrm{e}^{\mu_x}\int_{-d_1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{y\sigma_x - \frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y - RKN(d_1) =$$

$$RS_t \exp\left(\mu_x + \frac{1}{2}\sigma_x^2\right)N(d_2) - RKN(d_1) \quad (6)$$

同理可得

$$PV_1(t, S_t, \mu_x, \sigma_x, K) = RKN(-d_1) - RS_t\exp\left(\mu_x + \frac{1}{2}\sigma_x^2\right)N(-d_2) \quad (7)$$

由式(6)(7)可得式(4)(5).

注 当 $r(t)$, $g(t)$, $\sigma(t)$ 为常数时,式(4)即为文献[16] P_{291} 的式(5.16),且当 $g(t) = 0$ 时即为文献[14] P_{291} 的式(30).

定理 2 在远期开始的情形,固定执行价格期权在 t 时的价格公式是

$$V_2 = \omega R\left\{S_t\exp\left[\mu_{x_1} + \frac{\sigma_{x_1}^2}{2} + \int_t^{t_1} A(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_t^{t_1}\sigma^2(s)\,\mathrm{d}s\right]N(\omega d_4) - KN(\omega d_3)\right\} \quad (8)$$

其中

$$d_3 = \frac{\ln\frac{S_t}{k} + \mu_{x_1} + \int_t^{t_1} A(s)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_t^{t_1}\sigma^2(s)\,\mathrm{d}s + \sigma_{x_1}^2}},$$

$$d_4 = d_3 + \sqrt{\int_t^{t_1}\sigma^2(s)\,\mathrm{d}s + \sigma_{x_1}^2}$$

证明 先假定 S_{t_1} 是已知的,由定理 1 可得期权在 t_1 时的价格 $V_1(t_1, S_{t_1}, \mu_{x_1}, \sigma_{x_1}, K)$. 但实际上 S_{t_1} 是将来时刻的价格且服从对数正态分布,故折现的 $V_1(t_1, S_{t_1}, \mu_{x_1}, \sigma_{x_1}, K)$ 的期望值即为 V_2.

令 $z = \ln\dfrac{S_{t_1}}{S_t}$,则 $S_{t_1} = S_t\mathrm{e}^z$,易知

$$z \sim N\left(\int_t^{t_1} A(s)\,\mathrm{d}s, \int_t^{t_1}\sigma^2(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

再设 $u = \dfrac{z - \int_t^{t_1} A(s)\,\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_t^{t_1}\sigma^2(s)\,\mathrm{d}s}}$,则

$$V_2 = \exp\left[-\int_t^{t_1} r(s)\,\mathrm{d}s\right] \cdot E_Q[V_1(t_1, S_{t_1}, \mu_{x_1}, \sigma_{x_1}, K)] =$$

$$\exp\left[-\int_t^{t_1} r(s)\,\mathrm{d}s\right] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} V_1\left(t_1, S_t\mathrm{e}^{u\sqrt{\int_t^{t_1}\sigma^2(s)\,\mathrm{d}s} + \int_t^{t_1}A(s)\,\mathrm{d}s}, K\right)f(u)\,\mathrm{d}u \quad (9)$$

其中: $f(u)$ 是标准正态分布密度函数. 将式(4)代入式(9),再根据文献[17]P 374 的式(13.6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)N(A + Bz)\,\mathrm{d}z = N\left(\frac{A}{\sqrt{1 + B^2}}\right)$$

其中: $f(\cdot)$ 如上, A, B 为实常数,经计算便可得到式(8).

注 当 $t_1 = t$ 时, $V_2 = V_1(t, S_t, \mu_x, \sigma_x, K)$; 当 $r(t)$, $\sigma(t)$ 为常数且 $g(t) = 0$ 时,式(8)即为文献[14]P 290 的式(29)的连续形式.

定理 3 在进展中的情形,固定执行价格期权在 t 时的价格公式为

$$V_3 = \alpha V_1\left(t, S_t^b, b\mu_x, b\sigma_x, \frac{K}{\alpha}\right) \quad (10)$$

证明 因为进展中的期权在到期时的收益函数为

$$f_2 = \left[\omega\exp\left(\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^T \ln S_u\,\mathrm{d}u\right) - \omega K\right]^+ =$$

$$\alpha\left[\omega\exp\left(\frac{b}{T-t}\int_t^T \ln S_u\,\mathrm{d}u\right) - \omega\frac{K}{\alpha}\right]^+ =$$

$$\alpha\left\{\omega S_t^b\exp\left[\frac{1}{T-t}\int_t^T bA(s)(T-s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{T-t}\int_t^T b\sigma(s)(T-s)\,\mathrm{d}W_s^\theta\right] - \omega\frac{K}{\alpha}\right\}^+$$

所以 t 时的期权价格为

$$V_3 = E_Q(Rf_2) = \alpha V_1\left(t, S_t^b, b\mu_x, b\sigma_x, \frac{K}{\alpha}\right)$$

注 当 $t_0 = t$ 时,有 $\alpha = 1$, $b = 1$,则 $V_3 =$

$V_1(t,S_t,\mu_x,\sigma_x,K)$; 当 $r(t)$, $\sigma(t)$ 为常数且 $g(t)=0$ 时,式(10)即为文献[14]P291 的式(34)的连续形式.

2　浮动执行价格期权的定价

定理 4　在平凡情形下,浮动执行价格期权在 t 时的价格公式为

$$V_4(t,S_t,\mu_x,\sigma_x,\mu_y,\sigma_y,\rho)=\omega RS_t\Big[\exp\Big(\mu_y+\frac{\sigma_y^2}{2}\Big)N(\omega d_5)-\exp\Big(\mu_x+\frac{\sigma_x^2}{2}\Big)N(\omega d_6)\Big] \tag{11}$$

其中

$$d_6=\frac{\rho\sigma_x\sigma_y+\mu_y-\mu_x-\sigma_x^2}{\sigma},\quad d_5=d_6+\sigma$$

$$\sigma=\sqrt{\sigma_y^2-2\rho\sigma_x\sigma_y+\sigma_x^2},$$

$$\rho=\frac{\frac{1}{T-t}\int_t^T\sigma^2(s)(T-s)\,\mathrm{d}s}{\sigma_x\sigma_y}$$

证明　先证看涨期权的情形,因为期权在到期时刻 T 时的收益函数为

$$f_3=(S_T-GA)^+=S_t(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^x)^+$$

而 x, y 的联合概率密度函数是

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x\sigma_y}\cdot\exp\Big[-\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{2(1-\rho^2)}\Big]=f(y)f(x\mid y)$$

其中

$$u=\frac{x-\mu_x}{\sigma_x},\quad v=\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$$

$$f(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{v^2}{2}\Big),$$

$$f(x\mid y)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp\Big[-\frac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}\Big]$$

则

$$\begin{aligned}CV_4(t,S_t,\mu_x,\sigma_x,\mu_y,\sigma_y,\rho)&=RS_tE_Q[\max(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^x,0)]=\\ RS_t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y}(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^x)f(y)f(x\mid y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\\ RS_t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y}\mathrm{e}^yf(y)f(x\mid y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&-\\ RS_t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y}\mathrm{e}^xf(y)f(x\mid y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{12}$$

又

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y}\mathrm{e}^yf(y)f(x\mid y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\frac{y-\mu_x}{\sigma_x}}\mathrm{e}^yf(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\Big[-\frac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}\Big]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y=\\ &\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^y\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{v^2}{2}\Big)N\left(\frac{\frac{y-\mu_x}{\sigma_x}-\rho v}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{v\sigma_y+\mu_y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{v^2}{2}\Big)N\left(\frac{\frac{v\sigma_y+\mu_y-\mu_x}{\sigma_x}-\rho v}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\mathrm{d}v=\\ &\exp\Big(\mu_y+\frac{\sigma_y^2}{2}\Big)\int_{-\infty}^{+\infty}f(v-\sigma_y)N\left(\frac{\Big(\frac{\sigma_y}{\sigma_x}-\rho\Big)v+\frac{\mu_y-\mu_x}{\sigma_x}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\mathrm{d}v=\exp\Big(\mu_y+\frac{\sigma_y^2}{2}\Big)N(d_5)\end{aligned}$$

同理易得式(12)的第 2 项为 $\exp\Big(\mu_x+\frac{\sigma_x^2}{2}\Big)N(d_6)$,则看涨期权的价格

$$CV_4(t,S_t,\mu_x,\sigma_x,\mu_y,\sigma_y,\rho)=RS_t\Big[\exp\Big(\mu_y+\frac{\sigma_y^2}{2}\Big)N(d_5)-\exp\Big(\mu_x+\frac{\sigma_x^2}{2}\Big)N(d_6)\Big]$$

而看跌期权的到期收益函数 $f_4=(GA-S_T)^+$,由 x, y 的对称性可得看跌期权的价格:

$$PV_4(t,S_t,\mu_x,\sigma_x,\mu_y,\sigma_y,\rho)=RS_t\Big[\exp\Big(\mu_x+\frac{\sigma_x^2}{2}\Big)N(-d_6)-\exp\Big(\mu_y+\frac{\sigma_y^2}{2}\Big)N(-d_5)\Big]$$

由上述两式可知式(11)成立.

定理 5　在远期开始的情形,浮动执行价格期权在 t 时的价格公式是

$$V_5 = \omega R S_t \exp\left[\int_t^{t_1} A(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_t^{t_1}\sigma^2(s)\,\mathrm{d}s\right]\cdot$$
$$\left[\exp\left(\mu_{Y_1} + \frac{\sigma^2_{Y_1}}{2}\right)N(\omega d_7) - \exp\left(\mu_{x_1} + \frac{\sigma^2_{x_1}}{2}\right)N(\omega d_8)\right] \tag{13}$$

其中,将 ρ 中的 t 换成 t_1 就得到 ρ_1,且 d_7, d_8 分别为用 μ_{x_1}, μ_{Y_1}, $\sigma^2_{x_1}$, $\sigma^2_{Y_1}$, ρ_1 代替 d_5, d_6 中的 μ_x, μ_y, σ^2_x, σ^2_y, ρ 而得到的.

证明 由定理 2 的分析可知

$$V_5 = \exp\left[-\int_t^{t_1} r(s)\,\mathrm{d}s\right]E_Q[V_4(t_1, s_{t_1})] = \omega R E_Q\left\{S_{t_1}\left[\exp\left(\mu_{Y_1} + \frac{\sigma^2_{Y_1}}{2}\right)N(\omega d_7) - \exp\left(\mu_{x_1} + \frac{\sigma^2_{x_1}}{2}\right)N(\omega d_8)\right]\right\}$$

将 $E_Q[S_{t_1}] = \exp\left[\int_t^{t_1} A(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_t^{t_1}\sigma^2(s)\,\mathrm{d}s\right]$ 代入上式则可得到式(13).

注 当 $t_1 = t$ 时, $V_5 = V_4(t, S_t, \mu_x, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y, \rho)$

定理 6 在进展中的情形,浮动执行价格期权在 t 时的价格公式为

$$V_6 = \alpha V_4(t, S_t^b, b\mu_x, b\sigma_x, (c + \mu_y), \sigma_y, \rho)$$

其中: $c = \dfrac{t - t_0}{T - t_0}\ln\dfrac{S_t}{\alpha}$

证明 同定理 3 的证明类似.

注 当 $t_0 = t$ 时,有 $\alpha = 1$, $b = 1$, $c = 0$,则 $V_6 = V_4(t, S_t, \mu_x, \sigma_x, \mu_y, \sigma_y, \rho)$.

3 依赖时间的参数下的固定执行价格的连续算术平均欧式亚式期权的定价

通过调整执行价格,可得到标的资产价格模型的参数为常数时算术平均欧式亚式期权的渐进公式[17],下面通过此法得到了依赖时间的参数下的固定执行价格的连续算术平均欧式亚式期权的价格.

记标的资产价格的连续算术平均值为 $AA = \dfrac{1}{T-t}\int_t^T S(u)\,\mathrm{d}u$,则连续算术平均的欧式亚式期权到期收益函数为

$$f_5 = (\omega AA - \omega K)^+ \tag{14}$$

将式(14) 变形为

$$f_6 = (\omega GA - \omega K')^+ \tag{15}$$

其中: $K' = K + (GA - AA)$,用它的期望值

$$E(K') = K + E(GA - AA) \tag{16}$$

代替式(4) 中的 K 则可得到平凡的算术平均亚式期权的渐进公式. 其中

$$E(GA) = S_t \exp\left(\mu_x + \frac{1}{2}\sigma^2_x\right) \tag{17a}$$

$$E(AA) = \frac{S_t}{T-t}\int_t^T \exp\left\{\int_t^u [r(s) - g(s)]\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}u \tag{17b}$$

可类似地处理远期开始和进展中的情形,但因为此时 GA, AA 的形式略有不同,因而它们的期望值的形式也不同,下面分别是在远期开始的 $E_f(GA)$, $E_f(AA)$ 和进展中的 $E_p(GA)$, $E_p(AA)$

$$E_f(GA) = S_t \exp\left[\mu_{x_1} + \frac{\sigma^2_{x_1}}{2} + \int_t^{t_1} A(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_t^{t_1}\sigma^2(s)\,\mathrm{d}s\right] \tag{18a}$$

$$E_f(AA) = \frac{S_t}{T - t_1}\exp\left\{\int_t^{t_1}[r(s) - g(s)]\mathrm{d}s\right\}\cdot \int_{t_1}^T \exp\left\{\int_{t_1}^u [r(s) - g(s)]\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}u \tag{18b}$$

$$E_p(GA) = \alpha_t^b \exp\left(b\mu_x + \frac{1}{2}b^2\sigma^2_x\right) \tag{19a}$$

$$E_p(AA) = \frac{\int_{t_0}^t S_u\,\mathrm{d}u}{T - t_0} + \frac{S_t}{T - t_0}\cdot \int_t^T \exp\left\{\int_t^u [r(s) - g(s)]\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}u \tag{19b}$$

将式(18)、(19) 代入式(16),将得到的 $E(K')$ 分别代替式(8)、(10) 中的 K,则可得到远期开始和进展中的算术平均亚式期权价格的渐进公式.

4 结论

本文利用风险中性定价及随机积分的性质,得到了标的资产价格服从依赖时间的参数模型下的平凡、远期开始和进展中的连续几何平均欧式亚式期权价格的解析公式和一个平价关系,通过调整执行价格的形式,得到了相应的固定执行价格的连续算术平均亚式期权价格的渐进公式. 因为并没有给

这些参数函数具体的形式,只要它们满足可积的条件即可,故得到的是较为广泛的价格公式,对具体的亚式期权合约,可根据当时市场上无风险利率和标的资产价格变动规律来确定具体的函数形式,从而有效地减小常数参数模型定价带来的偏差,得到更准确的期权价格.不过本文所用的渐进方法只适用于固定执行价格的亚式期权,并不适合浮动执行价格情形,下一步要研究的是如何利用本文的结果得到在依赖时间的参数模型下浮动执行价格的算术平均亚式期权的渐进公式.

参 考 文 献:

[1]叶中行, 林建忠. 数理金融 ——资产定价与金融决策理论[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
Ye Zhongxing, Lin Jianzhong. Mathematical Finance —Asset Pricing and Theory of Financial Decision-Making[M]. Beijing: Scinece Press, 2000. (in Chinese)

[2]Kemma A G Z, Vorst A C F. A pricing method for options based on average asset values[J]. Journal of Banking and Finance, 1990, 14(1): 113 —129.

[3]Lapeyre B, Teman E. Competitive Monte Carlo Methods for Pricing Asian Options[R]. CERMICS, Ecole Nationale des Points et Chaussees, 1999.

[4]Vazquez-Abad F J, Dufresne D. Accelerated simulation for pricing Asian options[J]. Proceedings of the 1998 Winter Simulation Conference, 1998. 1493 —1500.

[5]Hull J, White A. Efficient procedures for valuing European and American path-dependent options[J]. Journal of Derivatives, 1993, Fall: 21 —31.

[6]Ritchken P, Sankarasubramanian L, Vijh A M. The valuation of path dependent contracts on the average[J]. Management Science, 1993, 39(10): 1202 —1213.

[7]Meyer G H. On pricing American and Asian options with PDE methods[J]. Acta Mathematics University Comeniance, 2001, LXX (1): 153 —165.

[8]Dewynne J N, Wilmott P. A note on average rate options with discrete sampling[J]. Siam Journal of Applied Mathematics, 1995, 55(1): 267 —276.

[9]Rogers L C G, Shi R C. The values of an Asian option[J]. Journal of Applied Probability, 1995, 32: 1077—1088.

[10]Vecer J. A new PDE approach for pricing arithmetic average Asian options[J]. The Journal of Computational Finance, 2001, 4 (4): 105 —113.

[11]Levy E. Pricing European average rate currency options[J]. Journal of International Money and Finance, 1992, 11(5): 474 —491.

[12]Turnbull S, Wakeman L. A quick algorithm for pricing European average options[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1991, 26(3): 377 —390.

[13]Wilmott P, Howison S D, Dewynne J N. The Mathematics of Financial Derivatives[M]. Oxford, New York: Cambridge University Press, 1995.

[14]Kwok Y K. Mathematical Models of Financial Derivatives[M]. Singapore: Springer-Verlag Singapore Pte. Ltd. 1998.

[15]薛　红, 彭玉成. 鞅在未定权益定价中的应用[J]. 工程数学学报, 2000, 17(3): 135 —138.
Xue Hong, Peng Yucheng. The application of martingales in contingent claim pricing[J]. Journal of Engineering Mathematics, 2000, 17(3): 135 —138. (in Chinese)

[16]Zhang P G. Exotic Options: A Guide to Second Generation Options[M]. 2nd ed, Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998.

[17]Vorst T. Prices and hedge ratios of average exchange rate options[J]. International Review of Financial Analysis, 1992, 1: 179—193.

(下转第 36 页)

Theoretical model of return policy under demand uncertainty

HE Yong[1], *HE Ju*[2], *YANG De-li*[1]

1. Management School, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. Management School, Modern Logistics Management, Fudan University, Shanghai 200437, China

Abstract: This paper does some research on the return policy under demand uncertainty, models the theory of return policy with risk preference of the retailer and supplier. Based on this theoretical model, a numerical example is employed to analyze the influence of risk preference on decision of the participants in a supply chain. From this paper the decision-maker of the supply chain can make a scientific decision by using this model. At last, according to the situation of China, the problem how Chinese corporations use the return policy properly is discussed.

Key words: supply chain management; return policy; demand uncertainty; risk preference

---

(上接第29页)

Pricing of Asian options with time-dependent parameters

ZHAN Hui-rong, *CHENG Qian-sheng*

School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871, China

Abstract: This paper provides six analytical price formulas and one put-call parity for continuous geometric-average European Asian options using risk-neutral valuation and properties of stochastic integral when the price of underlying asset follows the model with time-dependent parameters, i.e. time-dependent riskless interest rate $r(t)$, and risk asset has time-dependent expected rate of return $\mu(t)$, volatility $\sigma(t)$ and pays time-dependent dividend yield $g(t)$. By adjusting the form of strike price, approximated formulas for fixed-strike continuous arithemtic-average Asian options are also obtained.

Key words: Asian options; risk-neutral valuation; put-call parity; geometric-average; arithmetic-average