

# 基于 $x/Q$ 的库存控制中安全库存的优选策略

张慧颖<sup>1</sup>, 寇纪淞<sup>1</sup>, 李天生<sup>2</sup>, 赵先德<sup>2</sup>

(1. 天津大学管理学院, 天津 300072; 2. 香港中文大学决策科学与管理经济学系)

**摘要:** 研究了单项目库存控制问题中的安全库存选择策略, 评论了安全库存的决定要素, 讨论了基于以上要素的成本构成。进一步讨论了安全库存策略在理论和实践应用中的矛盾, 提出了一种实践中容易操作的安全库存的直观求解方法, 以利于管理者实际运用, 有效克服运作环境的不确定性。

**关键词:** 库存控制; 安全库存; 优选策略

**中图分类号:** F2

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1007-9807(2004)06-0046-06

## 0 引言

库存策略问题是一个古典问题, 但始终是物流过程的重要组成部分。Wisniewski 1991年做过的一项调查, 涉及苏格兰、英格兰和丹麦等地区的私营公司<sup>[1]</sup>, 结果表明66%的反馈单位非常关注库存控制技术, 其中的75%承认他们在使用这些技术。安全库存是针对需求不确定性的对策, 而不确定性来自于几方面: 市场需求的波动; 原材料供应的延迟和短缺; 生产运作系统的障碍; 前述多种因素的混合作用。无论何种原因, 管理实践中归结为面对需求变数, 采用安全库存对策。

在关于安全库存的研究中, 多数只从订货周期的角度涉及如何满足服务水平, 而不讨论成本目标<sup>[2~4]</sup>。考虑到成本最小化, 求解安全库存的精确过程非常复杂, 直接影响实践中的操作性。对管理者而言, 需要一种简洁、直观的算法快速求解安全库存量, 同时近似满足成本最小化和服务水平的要求。经济订货批量(EOQ)模型仍然是许多商用软件包里使用的方法, 尽管其精确性存在许多问题。Poul Alström<sup>[5]</sup>曾经研究了EOQ/ $x$ 的值对 $(R, Q)$ 问题的影响, 其简化求解是在忽略提前期内的缺货而降低了服务水平的条件下得出的, 不考虑缺货成本, 并且只讨论了晚交货的情况。

不确定性在生产计划中的影响曾有很多学者进行研究<sup>[6~8]</sup>, 库存问题也多有研究, 但是较多集中于多级库存策略<sup>[9]</sup>。事实上, 对于企业的管理过程来说, 库存的管理多是经验管理, 很少用到科学理论。一方面由于理论过于完美和偏狭, 难以应对实际中的复杂情况, 另一方面, 理论求解过于繁杂, 不易使用。本文希望从EOQ入手, 推导出 $Q$ 的逼近求解式, 进而讨论 $x/Q$ 对 $(R, Q)$ 的影响, 更全面系统地研究该问题, 并且给出对于安全库存量简化计算的贡献。

## 1 问题假设

理论模型为单项目库存模型, 提前期的需求为已知正态分布的连续型随机变量, 各周期内需求分布不变, 周期是从订货到达开始, 到下一次订货到达为止的时间间隔。计划周期为一年, 订货为成批供应(即一次全部交货, 供应率无限), 允许缺货。年(计划周期)期望需求 $D$ 是已知的。当库存水平降到订货点(reorder point, ROP), 则发生订货, 批量为 $Q$ 。所订货物将在定常的提前期后到达, 预测误差服从正态分布, 提前期内需求量预测值有一个已知的均值 $X_{LT}$ 和标准差 $\sigma_{X, LT}$ 。每发生一次订货的固定成本为 $C_{Setup}$ , 单件持有成本为 $H$

元/a, 单件缺货成本为  $c_1$  元/a. 总管理费为订货费、库存保管费和缺货费三项费用之和.

## 2 安全库存的决定要素

### 2.1 服务水平

库存系统的服务水平是表征其系统运作表现的重要因素. 在许多文献中, 确定安全库存量的主要目标是满足既定的服务水平, 而不是成本最小化的结果. 服务水平的定义有多种方式, 因而安全库存的决策也有不同. Aucamp<sup>[10]</sup>指出, 最常用的关于服务水平的定义为:

1) 按照订货周期定义, 服务水平表示为在正常时段对应的订货周期总数中, 不发生缺货的周期的百分比.

2) 按照需求量定义, 服务水平表示为能满足的需求量占总需求量的百分比.

### 2.2 对应于服务水平的库存策略

针对单项目库存系统, 流行的库存策略为结合经济订货批量 (EOQ) 和再订货点 (ROP) 的安全库存策略, EOQ 指订货批量, 而 ROP 针对不同的服务水平.

#### 2.2.1 针对订货周期服务水平目标 (order service level, OSL)

定义不能满足的订单的概率为 OSOR (order stock out rate).

$$\begin{aligned} OSL &= 1 - OSOR \\ ROP &= X_{LT} + k \cdot \sigma_{X,LT} \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $X_{LT}$  为提前期的平均需求量;  $\sigma_{X,LT}$  为提前期需求量的标准差;  $k$  为安全因子, 提前期需求方差的数量.

#### 2.2.2 针对需求量服务水平目标

定义缺货量百分数 (unit stock out rate, USOR) 和服务水平 (unit service level, USL)

$$USOR = 1 - USL \quad (2)$$

由边际分析得知

$$Q \cdot USOR = \int_k^{\infty} (z - k) f(z) dz \quad (3)$$

其中,  $f(z)$  是提前期需求变量的分布密度. 由此, 令

$$g(k) = \int_k^{\infty} (z - k) f(z) dz \quad (4)$$

$g(k)$  为相对于标准差的短缺期望.

由式(3)有

$$USOR = g(k) \cdot (\sigma_{X,LT} / Q) \quad (5)$$

其中,  $k$  为安全因子. 设安全库存为  $k$  个标准差, 即

$$SS = k \cdot \sigma_{X,LT}$$

由此,  $\sigma_{X,LT} / Q$  与安全因子和服务水平都有关联.

于是, 再订货点

$$ROP = X_{LT} + k \cdot \sigma_{X,LT} \quad (6)$$

#### 2.2.3 两种服务水平的量化关系

以总成本最低为目标进行分析.

目标函数定义: 总成本 (total cost)

$$TC(Q, ROP) = OC + HC + SC$$

其中:  $OC$  表示订货成本 (order cost)

$$OC = C_{\text{setup}} \cdot (D/Q)$$

$HC$  表示持有成本 (holding cost)

$$HC = H \left( \frac{Q}{2} + ROP - X_{LT} \right)$$

$SC$  表示缺货成本 (shortage cost), 可求得每一个订货周期内晚交货量的数学期望为

$$E_S(ROP) = \int_{ROP}^{\infty} (z - ROP) f(z) dz$$

于是  $SC = (D/Q) \cdot E_S(ROP)$

$$\begin{aligned} TC(Q, k) &= C_{\text{setup}} \frac{D}{Q} + \frac{D}{Q} E_S(ROP) + \\ &H \left( \frac{Q}{2} + ROP - X_{LT} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

由式(7)求  $TC$  对  $ROP$  的偏导数

$$\frac{\partial TC(Q, ROP)}{\partial ROP} = \frac{D}{Q} \frac{dE_S(ROP)}{dROP} + H =$$

$$H - \frac{D}{Q} \int_{ROP}^{\infty} f(z) dz = 0$$

$$\int_{ROP}^{\infty} f(z) dz = \frac{HQ}{D} = P(z > ROP) = 1 - OSL$$

可证明, 等效于

$$\int_k^{\infty} f(z) dz = 1 - OSL$$

其中,  $k$  为安全因子.

由此得出关系式如下

$$\int_k^{\infty} f(z) dz = 1 - OSL$$

由式(5)

$$USL = 1 - g(k) \cdot \sigma_{X,LT} / Q \quad (8)$$

利用数值积分算法, 得到图 1、2、3, 充分表达了安全因子和两种服务水平之间的关联 (以下三

图例中的  $Q$  表示  $x_{,LT}/Q$ 。

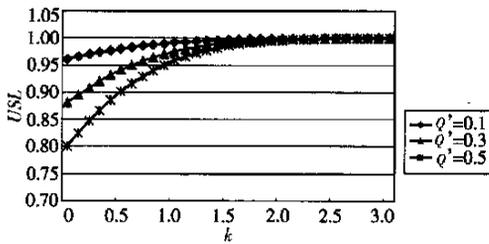


图1 USL 与  $k$  的关系

Fig. 1 Relation between USL and  $k$

图1表示 USL 和安全因子  $k$  的关系,从式(8)可以看出, USL 取决于两个重要参数,即  $k$  和  $x_{,LT}/Q$  的比值,因为  $k$  作为安全因子,代表提前期内的需求标准差的个数.当  $k$  增加, USL 缓慢地趋向于 1.  $x_{,LT}/Q$  标志标准差和订货批量的比率,从图中可以看出,比值比较小的 USL 相对于比值较大时的 USL 要大,可以解释如下,小的比值为提前期里需求的变化相对于订货批量较小,即使发生晚交货情况,缺货百分数也不会很大;反之,如果比值较大,需求的变化比较大,一旦发生货物短缺,短缺百分数会比较高,因而单件服务水平会降低.从图1中还可看出,安全因子  $k$  大于 2,三条曲线快速收敛,当  $k = 2.8$ ,曲线值几乎为 1.随着比值越大,单件服务水平较快地随  $k$  单调增加.

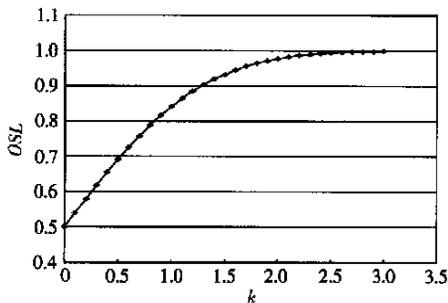


图2 OSL 与  $k$  的关系

Fig. 2 Relation between OSL and  $k$

图2表达了  $k$  和周期服务水平的关系,因为周期服务水平与  $x_{,LT}/Q$  没有关系,曲线比较简单.  $k = 0$ ,意味没有安全库存量,缺货概率为 0.5.  $k$  越大,缺货概率越小.当安全库存量达到  $3 x_{,LT}$ ,周期服务水平达到 0.999,已足够大.从图1和图2可以发现,当  $k > 0$ , OSL 的最小值在 0.5, USL 的最小值在 0.8.在同样  $k$  的条件下,周期服务水平低于单件服务水平.事实上,在单件服务水平难以

估计的情况下,对管理者来说,控制周期服务水平以满足客户需求是比较安全的.

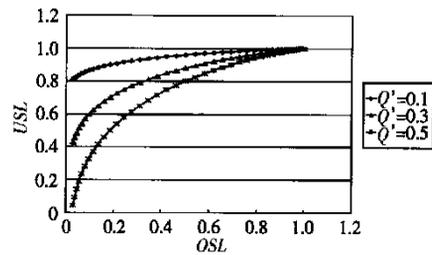


图3 OSL 与 USL 的关系

Fig. 3 Relation between OSL and USL

图3表达了两种服务水平之间的关联.首先,单件服务水平随周期服务水平单调增加,呈现一致性关系.第二,曲线呈现上凸,当周期服务水平  $OSL > 0.5$ ,单件服务水平高于周期服务水平,这一点和图2一致.第三,  $x_{,LT}/Q$  的比值显著地影响着 USL 和 OSL 的关系.比值越小, USL 比 OSL 高得越多,事实上,提前期需求的标准差相对订货批量比较小,如果发生缺货,短缺件数百分数比较低,但是因为订货周期数相对稳定,在每一个周期里,不论缺货多少件,都是一次不满足的订货,因此缺货周期百分数就比较高.

### 3 求解最优的 $Q$ 和 ROP

缺货的发生导致两种情况:晚交货,上一个周期的缺货留做下一个周期首先补充的批量 (backorder);机会损失 (lose sales).无论哪种情况发生,对缺货成本的估计都可以支持边际分析研究,确定适当的服务水平.

按照前述分析,服务水平的测度量  $USOR$  是订货批量  $Q$  的函数,但是为了使整个系统的运作表现最优,需要同时确定  $Q$  和再订货点  $ROP$ .

#### 3.1 晚交货的情形

目标函数定义

总成本 (total cost)

$$TC(Q, ROP) = OC + HC + SC$$

其中:  $OC$  和  $HC$  参照上述的讨论.

$SC$  表示缺货成本 (shortage cost), 可求得每一个订货周期内晚交货量的数学期望为

$$E_S(k) = \int_{x_{,LT}}^{\infty} (Z - k) f(Z) dz = \int_{x_{,LT}}^{\infty} f(Z) dz - k \int_{x_{,LT}}^{\infty} f(Z) dz = 1 - \Phi(k) - k \phi(k)$$

于是  $SC = \frac{D}{Q} \cdot E_S(k)$

$$TC(Q, k) = C_{setup} \frac{D}{Q} + \frac{D}{Q} E_S(k) +$$

$$H\left(\frac{Q}{2} + k_{X,LT}\right) \quad (9)$$

3.1.1 求解步骤

由式(9) 求  $TC$  对  $Q$  的偏导数

$$\frac{\partial TC(Q, k)}{\partial Q} = -\frac{C_{setup}D + D_{X,LT}g(k)}{Q^2} + \frac{H}{2} = 0$$

解得

$$Q^* = \sqrt{\frac{2D(C_{setup} + D_{X,LT}g(k))}{H}} \quad (10)$$

并且已知

$$P(z > ROS) = \frac{HQ}{D} = OSOR \quad (11)$$

式(11) 符合边际分析的结果, 可解释为增加一件额外存储的持有成本等于发生缺货而产生的成本, 由此决定安全库存。

求解过程见图 4。

说明:

1) 搜索算法的初始值  $Q_0 = EOQ$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2D(C_{setup} + E_S(k))}{H}}$$

搜索过程以如下逼近程度结束

$$= \frac{Q_n - Q_{n-1}}{Q_n - Q_0} < 0.05$$

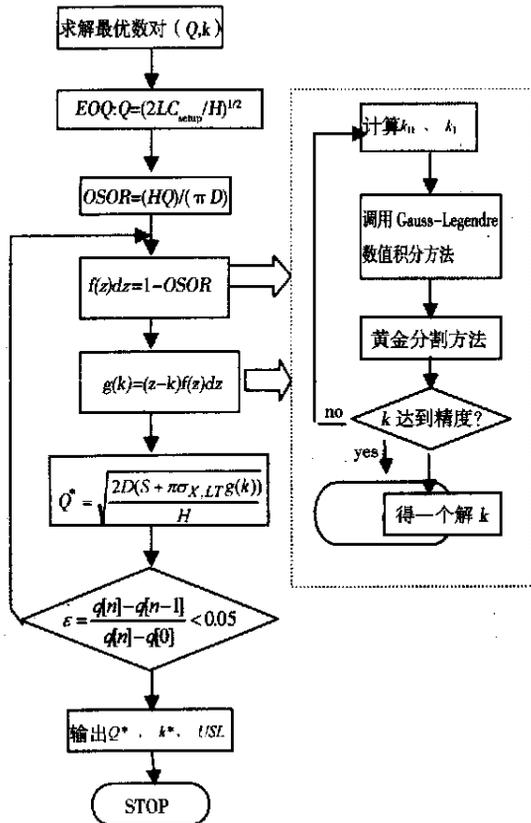


图 4 求解最优组合  $Q^*$  和  $k^*$

Fig.4 Solution of optimal  $Q^*$  and  $k^*$

2) 求解积分方程

$$\int_0^k f(z) dz = \frac{k}{\sqrt{2}} \frac{1}{X,LT} e^{-\frac{(z-X)^2}{2}} dz$$

由于难以求得源函数, 因此考虑 Gauss-Legendre 数值积分方法和黄金分割逼近算法, 比较精确也易于计算机实现. 该流程在 Visual C++ 6.0 实现。

3.1.2 直观求解算法

以一组模拟数据做仿真, 设定某公司在提前期内需求呈正态分布, 平均销售 A 产品 320 台, 标准差为 40 台, 订货提前期为一周, 每次订货费 14 元, 持有成本为每台每年 1.68 元, 缺货成本为每台 2 元<sup>[5]</sup>. 通过调整需求方差, 经过 10 个过程模拟, 分析其中  $k$  与  $\sigma/Q$  的点集, 关系图见图 5。

经回归分析, 得到

$$k = -0.234 \cdot \sigma/Q + 1.943 \quad (12)$$

式(12) 的  $R$  值为 0.997, 具有高拟合度。

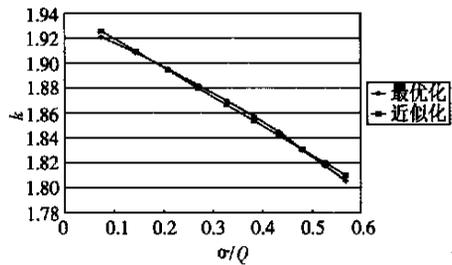


图 5 安全因子与  $\sigma/Q$  的关系

Fig.5 Relation between safety factor and  $\sigma/Q$

3.1.3 近似分析

求解安全因子是基于成本最小目标, 因此有必要分析式(12) 求得的  $k$  产生的成本与最小成本的关系如图 6 所示。

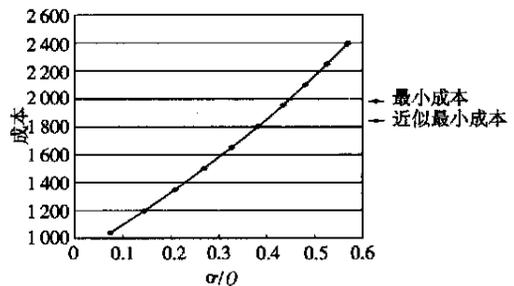


图 6 成本比较

Fig.6 Contrast about costs

可以看出, 当  $\sigma/Q < 0.6$ , 近似解求得的总成本与最小成本非常接近. 由式(12) 求得的  $k$  产生

的服务水平的比较见图 7.

当  $\sigma/Q < 0.6$ , 近似解求得的服务水平与最优解下的服务水平有距离变大的趋势, 但是仍然可控制.

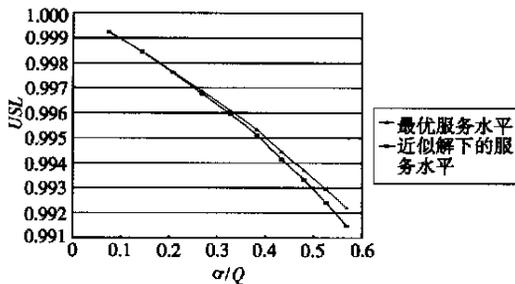


图7 服务水平比较

Fig. 7 Contrast between service levels

### 3.2 机会损失的情形

对于机会损失的情况, 边际成本分析的结果为

$$H(Q/D) = OSOR \cdot (k + H(Q/D)) \quad (13)$$

因而安全库存量  $SS = Z_{OSOR} \cdot \sigma$

计算流程只需要将图 4 中的搜索过程中的 OSOR 改为下式

$$OSOR = \frac{HQ}{HQ + D}$$

#### 3.2.1 仿真结果

仍然使用上例数据, 通过改变提前期需求方差, 10 个过程的模拟结果. 分析其中  $k$  与  $\sigma/Q$  的点集, 关系图见图 8.

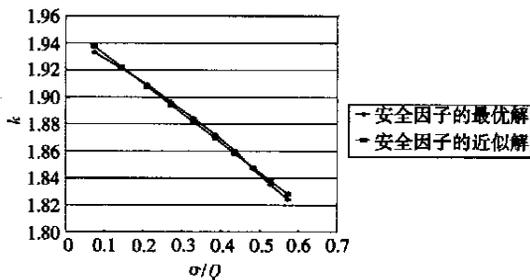


图8 机会损失  $k$  与  $\sigma/Q$  的关系

Fig. 8 Relation between  $k$  and  $\sigma/Q$  under lose sales

经回归分析, 得到

$$k = -0.220 \cdot \sigma/Q + 1.954 \quad (14)$$

式(14)的  $R$  值为 0.997, 具有高拟合度.

#### 3.2.2 近似分析

分析式(14)求得的  $k$  产生的成本与最小成本

的关系, 如图 9 所示.

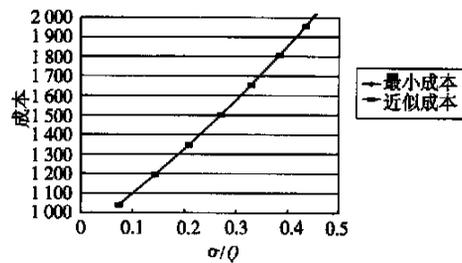


图9 成本比较

Fig. 9 Contrast about costs under lose sales

可以看出, 当  $\sigma/Q < 0.6$ , 近似解求得的最小成本与最小成本非常接近. 由式(14)求得的  $k$  产生的服务水平的比较见图 10.

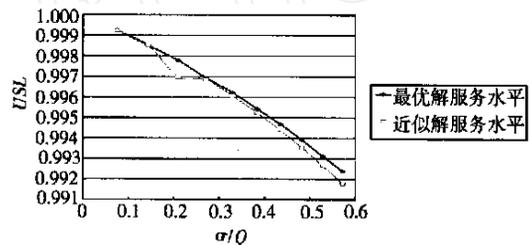


图10 服务水平比较

Fig. 10 Contrast about service levels under lose sale

当  $\sigma/Q < 0.6$ , 近似解求得的服务水平与最优解下的服务水平有距离变大的趋势, 但是仍然可控制.

## 4 结论

本文研究了两种服务水平概念之间的关系, 并给出了随机需求条件下的安全库存因子, 作为  $\sigma/Q$  的函数的近似解法, 通过模拟过程初步了解了近似解法体现在成本与服务水平上与最优解的差异, 当  $\sigma/Q < 0.6$ , 以上误差可以忽略, 因而对于企业决策者来说, 摒弃复杂的精确求解过程, 按照本企业的库存参数, 建立简易求解模型, 通过直观算法快速求得安全库存因子成为可能.

### 参考文献:

[1] Wisniewski M, Jones C, Kristenses K, et al. Does anyone use the techniques we teach? [J]. OR Insight, 1994, 7(2): 2-7.  
 [2] Silver E A, Pyke D F, Peterson R. Inventory Management and Scheduling[M]. New York: Wiley, 1998. 348-349.

- [3] Chase Richard B, Aquilano Nicholas J, Robert Jacobs F. 生产与运作管理制造与服务[M]. 北京:机械工业出版社, 1999.  
Chase Richard B, Aquilano Nicholas J, Robert Jacobs F. Production and Operation Management Manufacture and Service[M]. Beijing: China Machine Press, 1999. (in Chinese)
- [4] 陈荣秋, 马士华. 生产与运作管理[M]. 北京:高等教育出版社, 1999.  
Chen Rongqiu, Ma Shihua. Production and Operation Management[M]. Beijing: Higher Education Press, 1999. (in Chinese)
- [5] Alström Poul. Numerical computation of inventory policies, based on the EOQ/  $x$  value for order-point systems[J]. International Journal of Production Economics, 2001, 71: 235—245.
- [6] 朱道立, 武芳, 等. 随机环境中的生产作业计划问题[J]. 管理科学学报, 2001, 4(5): 50—57.  
Zhu Daoli, Wu Fang, et al. JobShop scheduling in stochastic environment[J]. Journal of Management Sciences in China. 2001, 4(5): 50—57.
- [7] 朱云龙, 于海斌. 面向客户的随机动态生产管理模式研究[J]. 计算机集成制造系统, 2001, 7(3): 14—18.  
Zhu Yunlong, Yu Haibin. Customer-oriented random and dynamic manufacturing management system[J]. Computer Integrated Manufacture System. 2001, 7(3): 14—18. (in Chinese)
- [8] 钟胜, 肖玉明, 等. 不确定市场情况下的厂商行为[J]. 数量经济技术经济研究, 2001, (4): 53—56.  
Zhong Sheng, Xiao Yuming, et al. Behavior of enterprises under uncertain market environment[J]. Research on Quantity Economics and Technical Economics, 2001, (4): 53—56. (in Chinese)
- [9] 彭禄斌, 赵林度. 供应链网状结构中多级库存控制模型[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2002, 32(2): 218—222.  
Peng Lubin, Zhao Lindu. A multi-echelon inventory control model in the network structure of the supply chain[J]. Journal of South east University, 2002, 32(2): 218—222. (in Chinese)
- [10] Aucamp D C. The Evaluation of Safety Stock[J]. Production and Inventory Management, 2nd Quarter, 1986, 27(2): 126—132.
- [11] Silver Edward A. Inventory Management and Production Planning and Scheduling[M]. 3rd edition. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- [12] Mclaughlin C P, Vasag G, Whyback D C. Statistical inventory control in theory and practice[J]. International Journal of Production Economics, 1994, 35(1-3): 161—170.
- [13] Hung Yi-Feng, Chang Ching-Bin. Determining safety stocks for production planning in uncertain manufacturing[J]. International Journal of Production Economics, 1999, 58: 199—208.
- [14] Mølinder. Joint optimization of lot-sizes, safety stocks and safety lead times in an MRP system[J]. International Journal of Production Research, 1997, 35(4): 983—994.

## Optimal decisions of safety stock for individual item inventory systems based on $r/Q$

ZHANG Hui-ying<sup>1</sup>, KOU Ji-song<sup>1</sup>, LEE T S<sup>2</sup>, ZHAO Xian-de<sup>2</sup>

1. School of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, China;
2. Department of Decision Science and Managerial Economics, CUHK, HK, China

**Abstract:** This paper studies the use of safety stock in single-item inventory systems. At first, we studied the relationship of two kinds of service level, and then based on this relationship, by numeric arithmetic, we constructed a search procedure to find the optimal order quantity. The cost implications of using these criteria are thoroughly explored, the major criteria in determining and evaluating safety stock are identified. The issues of discrepancy between the safety stock use in theory and that in practice are addressed. At last we explored an efficient heuristic decision of selecting the safety factor for managers to cope with uncertainties under different user's environment.

**Key words:** inventory control; safety stocks; heuristic decisions