混合指标层次模糊决策法研究①

张文红[1]，陈森发[2]

(1. 南京大学商学院，南京 210093；2. 东南大学经济管理学院，南京 210096)

摘要：应用层次分析的思想和模糊模式识别方法，在引入模糊一致判断矩阵的基础上，提出了混合指标层次模糊决策方法. 方法的主要特点是综合考虑了评价系统中的定性和定量指标，并提出了“表现度”的概念，使之更加客观真实地反映实际状况. 然后通过模糊模式识别方法，得到系统的局部和整体发展水平评价. 最后通过案例分析，表明该方法在实际运用中是有效的，具有实际应用价值.

关键词：层次分析；模糊决策；模糊一致；模糊模式识别

中图分类号：C934　　文献标识码：A　　文章编号：1007 - 9807(2005)01 - 0007 - 05

0　引　言

在评价和决策问题中，有一类是混合指标评价问题，其评价指标有定性的、定量的，而且是多层次的、模糊的. 目前主要的方法是把定性指标用可准确表达的定量指标表示，但常常不能完整地表达指标的综合信息；或者对一些定性指标由专家评分决定[1]，但由于个人的主观性，使得结论与实际情况存在一定的差异，如层次分析法(AHP)[2]、模糊综合评判法等[3,4]. 本文提出一种混合指标层次模糊决策方法，将影响系统的定性指标与定量指标综合考虑，并提出“表现度”概念，更客观真实地反映实际状况，然后引入模糊一致判断矩阵，利用模糊模式识别方法，得到系统的局部和整体发展水平评价.

1　混合指标层次模糊决策模型

考虑三层次(多层次可类推)混合指标评价体系的一般形式如图 1 所示.

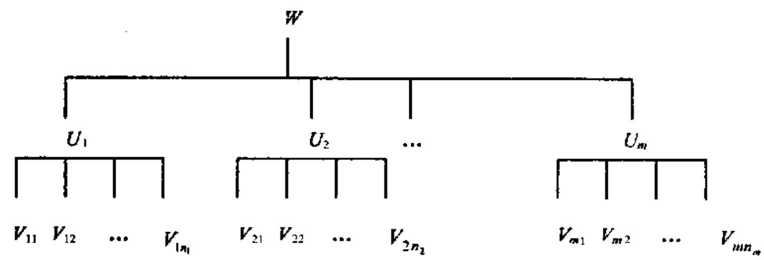

图 1　混合指标评价问题指标体系

Fig. 1 Index system on the hybrid index

根据层次分析法，这是一个由多个评价指标按属性不同分组，每组作为一个层次，按照最高层(目标 W)、中间层(一级评价指标 U_i，$i = 1, 2, \cdots, m$)和最低层(二级评价指标 V_{ij}，$i = 1, 2, \cdots, m$；$j = 1, 2, \cdots, n_i$)的形式排列起来的三层次评价指标体系.

---

① 收稿日期：2003 - 06 - 09；修订日期：2004 - 09 - 28.
基金项目：江苏省环保厅科技资助项目(2002071).
作者简介：张文红(1975 —)，女，南京人，博士，讲师.

U 代表一级评价指标 U_i 所组成的集合,记为 $U = \{U_1, U_2, \cdots, U_m\}$; $V_i (i = 1,2,\cdots, m)$ 代表二级评价指标 V_{ij} 所组成的集合,记为 $V_i = \{V_{i1}, V_{i2}, \cdots, V_{in_i}\}$. V_i 中有一些是定性的,一些是定量的. 不失一般性,它们都能在一个确定的表现值上取得最优值(这里设表现值越大越优越的指标为正指标,反之为负指标). 假定正指标的表现值的两个标准为:"理想值"$B^+ = \{b_1^+, b_2^+, \cdots\}$;"不理想值"$B^- = \{b_1^-, b_2^-, \cdots\}$(负指标相反). B^+、B^- 可以通过历史数据和人的主观判断事先决定.

1.1 混合指标 V_{ij} 的处理

定义 1 对每个指标 $V_{ij} \in V_i$,定义一个映射 $\phi_{ij}(x): D \to [0,1]$. $\phi_{ij}(x) \in [0,1]$ 表示每一个系统 $x \in D$ 中的实际指标值 $y_j(x)$ 与正(负)指标 V_{ij} 中的理想值 $b_{ij}^+ (b_{ij}^-)$ 的接近程度,称为表现度.

通过模糊集的定义,可以发现 $\phi_{ij}(x)$ 是一个模糊子集,它描述了在系统空间 D 上,指标 V_{ij} 的发展程度这样一个模糊的概念.

1.1.1 定量指标

对每一个定量指标 V_{ij}, $y_j(x) (\forall x \in D)$ 表示系统 x 的实际值.

对 V_{ij},定义表现度映射 $\phi_{ij}: D \to [0,1]$ 为

$$\phi_{ij}(x) = \begin{cases} \dfrac{y_j(x) - b_{ij}^-}{b_{ij}^+ - b_{ij}^-} & V_{ij} \text{ 为正目标} \\ \dfrac{b_{ij}^+ - y_j(x)}{b_{ij}^+ - b_{ij}^-} & V_{ij} \text{ 为负目标} \end{cases}$$

$$i = 1,2,\cdots, m; j = 1,2,\cdots, n_i \qquad (1)$$

通常令 $b_{ij}^+ = \max_{x \in D}\{y_j(x)\}$, $b_{ij}^- = \min_{x \in D}\{y_j(x)\}$, $i = 1,2,\cdots, m; j = 1,2,\cdots, n_i$.

1.1.2 定性指标

令模糊语言值集 $L = \{EG, VG, G, F, P, VP, EP\}$,这里 EG = extremely good, VG = very good, G = good, F = fair, P = poor, VP = very poor, EP = extremely poor. 定性指标中系统 x 的模糊语言值用模糊数表示[5,6]. 模糊数一些文献大都用三角模糊数[7],梯形模糊数的隶属函数的形状比三角模糊数复杂,且三角函数是它的特例,故梯形模糊数更能反映系统的不确定性,表达决策者的主观性. 本文用 $[0,1]$ 中的梯形函数来刻画模糊数 $A = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

定义 2 如果模糊数 A 的隶属函数 $f_{\tilde A}: R \to [0,1]$ 为

$$f_{\tilde A}(x) = \begin{cases} f_{\tilde A}^L(x) = \dfrac{(x - \alpha)}{(\beta - \alpha)} & \alpha \le x \le \beta \\ 1 & \beta \le x \le \gamma \\ f_{\tilde A}^R(x) = \dfrac{(\delta - x)}{(\delta - \gamma)} & \gamma \le x \le \delta \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \qquad (2)$$

则称 A 为梯形模糊数,记做 $A = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

L 中的模糊语言值分别被刻画成如下的梯形模糊数(见图 2): $EG = (0.8, 0.9, 1, 1)$, $VG = (0.65, 0.75, 0.85, 0.95)$, $G = (0.5, 0.6, 0.7, 0.8)$, $F = (0.35, 0.45, 0.55, 0.65)$, $P = (0.2, 0.3, 0.4, 0.5)$, $VP = (0.05, 0.15, 0.25, 0.35)$, $EP = (0.0, 0.0, 0.1, 0.2)$.

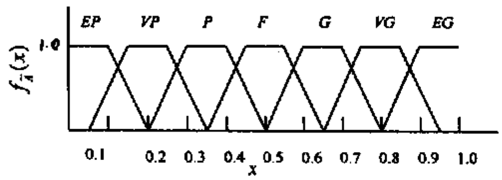

图 2 模糊语言值的梯形隶属函数

Fig. 2 Membership function of trapezia

本文用模糊数的总期望值得到定性指标的表现度评价[8].

定义 3 令 A 是有左隶属函数 $f_{\tilde A}^L$ 和右隶属函数 $f_{\tilde A}^R$ 的一个模糊数,带有重视指标 $\alpha \in [0,1]$ 的 A 的总期望值定义为

$$E_\alpha(A) = \alpha E_R(A) + (1 - \alpha) E_L(A) \qquad (3)$$

这里, $E_R(A)$ 和 $E_L(A)$ 为 A 的右和左期望值,定义如下

$$E_R(A) = \int_\alpha^\beta x f_{\tilde A}^R(x) \,\mathrm{d}x$$

$$E_L(A) = \int_\gamma^\delta x f_{\tilde A}^L(x) \,\mathrm{d}x \qquad (4)$$

系数 $\alpha \in [0,1]$ 反映了管理者的乐观程度. α 越大,乐观程度越高(通常令 $\alpha = 0.5$). 对一个梯形模糊数 $A = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$,容易确定

$$E_L(A) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \; E_R(A) = \frac{1}{2}(\gamma + \delta) \qquad (5)$$

对定性指标 V_{ij},运用乐观值 α 定义其表现度函数 $\phi_{ij}: D \to [0,1]$

$$\phi_{ij}(x) = E_\alpha(y_j(x)) \qquad \forall x \in D \qquad (6)$$

其中, $y_j(x)$ 是 x 在定性指标 V_{ij} 下取得的模糊语言值(用相应的 $[0,1]$ 上的模糊数刻画).

1.2 层次转换规则

1.2.1 指标重要程度模糊子集

各种决策方法都用到指标重要程度模糊子集

$$w_i = (w_{i1}, w_{i2}, w_{in_i}),\ w_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} = 1,\ i = 1,2,\cdots,m \tag{7}$$

w_i 主要由 AHP 的判断矩阵等方法[2,9] 求出. 但判断矩阵的一致性指标难以达到, 且与人决策思维的一致性存在差异, 所以通过模糊一致关系引入模糊一致判断矩阵 R 去求解 w_i, 使判断的一致性问题得到解决. 求解 w_i 步骤如下:

1) 建立优选关系矩阵 $\mathrm{F} = (f_{pq})_{n_i \times n_i}$

$$f_{pq} = \begin{cases} 0.5 & S_{ip} = S_{iq} \\ 1.0 & S_{ip} > S_{iq} \quad (p,q = 1,2,\cdots,n_i) \\ 0.0 & S_{ip} < S_{iq} \end{cases} \tag{8}$$

这里, S_{ip} 和 S_{iq} 分别表示指标 V_{ip} 和 V_{iq} 的相对重要程度, 由管理者事先给出.

2) 建立模糊一致判断矩阵 $\mathrm{R} = (r_{pq})_{n_i \times n_i}$

$$r_p = \sum_{k=1}^{n_i} f_{pk} \quad p = 1,2,\cdots,n_i\ (F\ \text{按行求和}) \tag{9}$$

$$r_{pq} = \frac{r_p - r_q}{2n_i} + 0.5 \tag{10}$$

由文献[10] 知, R 满足模糊一致关系.

3) 计算 R 的最大特征值, 对应特征向量归一化后就是 w_i.

1.2.2 综合评价映射

定义中间层 U_i 的评价映射 $u_i(x): D \to [0,1]\ (i = 1,2,\cdots,m)$, 用层次分析法等决策方法一般定义为加权平均模型

$$u_i(x) = \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}\phi_{ij}(x) \tag{11}$$

代替一般的加权求和方法, 本文用模糊模式识别方法[11] 导出一种求和方法. 由模糊识别的观点, 系统空间 D 可分为几个类, 彼此之间有模糊的界限, 如"好"、"一般"、"坏"等. 这些类形成了 D 的一个模糊划分. D 中的每个元素均用一个确定的隶属度与这些类最佳匹配. $\forall x \in D$, 它对 $V_i = \{V_{i1}, V_{i2},\cdots,V_{in_i}\}$ 的表现度用一个 n_i 维向量表示

$$\mathrm{r}_i(x) = (\phi_{i1}(x), \phi_{i2}(x),\cdots,\phi_{in_i}(x))$$

把 D 参照 V_i 的表现度分为 C 个类, 称为 $P_K = (P_{K1}, P_{K2},\cdots,P_{Kn_i})\ (K = 1,2,\cdots,C)$. 设 $x \in D$, 用隶属度 $u_i = (u_{i1}(x), u_{i2}(x),\cdots,u_{iC}(x))$ 与 C 个类分别匹配. 这里, $u_{iK}(x) \in [0,1]$, 是 x 在第 K 类中的隶属度, 满足

$$\sum_{K=1}^{C} u_{iK}(x) = 1 \quad (\forall x \in D) \tag{12}$$

根据表现度评价, 引入表现函数

$$J(\{u_{iK}(x)\}) = \sum_{x \in D}\sum_{K=1}^{C} (u_{iK}(x)\ \| w \cdot (r_i(x) - P_K) \|)^2 \tag{13}$$

这里: $\|\cdot\|$ 是 R^{n_i} 空间中的内积诱导范数[12], $\| w \cdot (\mathrm{r}_i(x) - P_K) \|$ 代表 x 到第 K 个类的距离; $J(\{u_{iK}(x)\})$ 是 x 到分类模型的加权距离的总平方和, 显然, $J(\{u_{iK}(x)\})$ 越小, 匹配效果越好.

定理 1 构建分类模型 $P_K = (P_{K1}, P_{K2},\cdots,P_{Kn_i})\ (K = 1,2,\cdots,C), (i = 1,2,\cdots,m)$. 给定向量 $\mathrm{w}_i = (w_{i1}, w_{i2},\cdots,w_{in_i}), w_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} = 1$. 若对所有的 $(K = 1,2,\cdots,C)$, 都满足 $\| w_i \cdot (r_i(x) - P_K) \| > 0$, 则 $u_i = (u_{i1}(x), u_{i2}(x),\cdots,u_{iC}(x))$ 给出了 $J(\{u_{iK}(x)\})$ 的最小值的充要条件是

$$u_{iK}(x) = \frac{1}{\sum_{t=1}^{C}\left(\frac{\| w_{ij} \cdot (r_i(x) - P_K) \|^2}{\| w_{ij} \cdot (r_i(x) - P_t) \|^2}\right)} \quad (K = 1,2,\cdots,C) \tag{14}$$

证明　见文献[13].

本文考虑 $C = 2$, 即 D 被分为"理想"和"不理想"两大类, 根据 $B_i^+ = (b_{i1}^+, b_{i2}^+,\cdots,b_{in_i}^+)$ 和 $B_i^- = (b_{i1}^-, b_{i2}^-,\cdots,b_{in_i}^-)$, 相应的类分为 $P_1 = (1,1,\cdots,1)$, $P_2 = (0,0,\cdots,0)$. 由定理 1 知, 对 $J(\{u_K(x)\})$ 取最小时, x 到"理想"类 P_1 的最优匹配隶属度 $u_i(x)\ (i = 1,2,\cdots,m)$ 为

$$u_i(x) = \frac{1}{\sum_{t=1}^{2}\left(\frac{\| w_{ij} \cdot (r_i(x) - P_1) \|^2}{\| w_{ij} \cdot (r_i(x) - P_t) \|^2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{j=1}^{n_i}[w_{ij}(1 - \phi_{ij}(x))]^2}{\sum_{j=1}^{n_i}(w_{ij}\phi_{ij}(x))^2}} \tag{15}$$

(用 Euclidean 距离代替 ‖ ‖)

$u_i : D \to [0,1]$ 就是本文构造的综合评价映射. 由 $u_i(x)$ 的定义可知, $u_i(x)$ 的值越大, x 越接近 U_i 的"理想"值. 由 u_i, 可得到中间层 U_i 的评价值. 再把 $u_i(x)$ 当作中间层 U_i 的表现度 $\phi_i(x)$, 重复以上方法, 最终得到每个系统的整体综合评价 $w(x)$.

1.3 综合评价方法

对每个系统 $x \in D$, 得到在指标评价体系中的整体综合评价 $w(x)$, 由此可得到 D 中的模糊最优方案 $x^*: w(x^*) = \max_{x \in D} w(x)$. 或者可以用此方法根据 x 的取值不同, 确定一系列的评价等级, 如"特别好"、"好"、"一般"等, 与 $w(x)$ 对比, 判定该系统的发展程度, 并可以进一步找出系统在哪些指标上需要改进.

2 应用实例

把本文提出的方法应用到生态工业系统的综合评价上, 指标层次模型如图 3 示. 考虑 3 个工业系统, 测得实际数据如表 1 示. 专家判断得到的优选关系矩阵 D、D_1、D_2、D_3 如下文示. 计算出的权重 w 见表 1. 通过模糊综合评判法(加权平均运算) 和本文提出的方法, 分别得到决策结果如表 2 和表 3 所示.

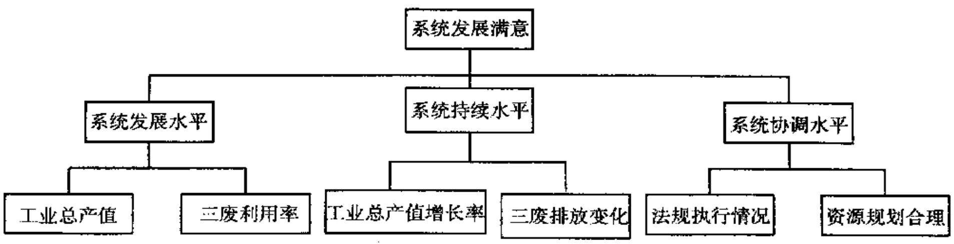

图 3 生态工业系统指标层次模型

Fig. 3 Index model on the eco-industrial system

表 1 3 个系统的实际值和和权重 w

Table 1 Actual values and weight w about three systems

	V_{11}/ 千元	V_{12}/ %	V_{21}/ %	V_{22}/ %	V_{31}	V_{32}	U_1	U_2	U_3
系统 1	2	0.35	0.37	0.25	G	G			
系统 2	2.5	0.35	0.45	0.3	VG	F			
系统 3	2.75	0.22	0.37	0.25	F	VG			
理想值	5	0.5	0.6	0.5	VG	VG			
不理想值	0	0	0	0	EP	EP			
w	0.633 975	0.366 025	0.633 975	0.366 025	0.5	0.5	0.21	0.45	0.34

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

由表 2 可知, 系统 1 和系统 3 的综合评价值相等, 即系统 1 和系统 3 无法分出高低, 但实际上, 它们的发展水平是有优劣高低之分的. 表 3 不仅考虑了每个指标值的大小, 还利用模糊模式识别方法综合考虑了每个指标与理想之间的距离, 使之更加客观真实地反映系统的实际发展水平, 结果发现系统 3 优于系统 1.

表 3 中对每个具体的指标 V_{ij}, 定义了一个映射 $\phi_{ij}(x) : D \to [0,1]$, 表示对每一个系统 $x \in D$, 实际指标值 $y_{ij}(x)$ 与正(负) 指标 V_{ij} 中的理想值 $b^+_{ij}(b^-_{ij})$ 的接近程度, 即表现度. 所以本文的方法不仅可以评价系统的整体发展水平, 也可以评价每个指标的发展水平. 如系统 2 中中间层 U_1 的指标值与理想值距离最远, U_2 的指标值与理想值距离最近. 所以本文方法比层次分析法等评价方法更具有实际指导意义.

本文采用了模糊一致判断矩阵, 使层次分析法中的判断一致性问题得到了妥善解决. 可以验

证(验证过程略) ,本文方法优于目前应用较广泛的层次分析法和模糊综合评判法等.

表 2　模糊加权平均的综合评价值

Table 2 Syntheses evaluation in fuzzy weighted means

	U_1	U_2	U_3	w
系统 1	0.510	0.574	0.650	0.586
系统 2	0.573	0.695	0.650	0.654
系统 3	0.510	0.574	0.650	0.586

表 3　模糊模式识别的综合评价值

Table 3 Syntheses evaluation in fuzzy pattern recognition

	U_1	U_2	U_3	w
系统 1	0.453	0.668	0.775	0.802
系统 2	0.596	0.855	0.754	0.926
系统 3	0.545	0.668	0.754	0.814

3　结　论

本文提出了一种混合指标层次模糊决策方法,将混合指标系统中的定性指标与定量指标综合考虑,通过提出的表现度的概念,使之更加客观真实地反映实际状况.最后通过模糊模式识别方法,得到系统的综合评价.通过多个实际例子的评价过程(限于篇幅,文中只列出一个实例) ,表明该方法优于目前应用较广泛的层次分析法和模糊综合评判法.该方法充分反映了决策者从整体着眼,进行综合评价的策略,在实际中是有效的可以应用的.

参 考 文 献:

[1]张　跃, 邹寿平. 模糊数学方法及应用[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1992.
Zhang Yue, Zou Shou-ping. Fuzzy Mathematics Methods and Application[M]. Beijing: Coal Industry Publishing Company, 1992. (in Chinese)

[2]Saaty T L. Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process[M]. Pittsburgh, PA: RWS Publications, 1988.

[3]冯德益, 楼世博, 林命周, 等. 模糊数学方法及应用[M]. 北京: 地震出版社, 1985.
Feng De-yi, Lou Shi-bo, Lin Ming-zhou, *et al*. Fuzzy Mathematics Methods and Application[M]. Beijing: Earthquake Publishing Company, 1985. (in Chinese)

[4]汤兵勇, 王文杰, 郑　飞. 现代模糊管理数学方法[M]. 上海: 中国纺织大学出版社, 1999.
Tang Bing-yong, Wang Wen-jie, Zheng Fei. The Modern Fuzzy Management Mathematics Methods[M]. Shanghai: China Spin University Publishing Company, 1999. (in Chinese)

[5]Dubois D, Prade H. Fuzzy Sets System[M]. New York: Theory and Applications, Academic Press, 1978.

[6]Dubois D, Prade H. Operations on fuzzy numbers[J]. Internet J. Systems Sci., 1978, 9: 613—626.

[7]Loargonen Van, Pedrycz W. A Fuzzy extension of Saaty's priority theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1983, 11(1): 299—241.

[8]Liou T S, Wang M J. Ranking fuzzy numbers with integral value[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 50: 247—255.

[9]Hwang C L, Yoon K S. Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications[M]. Berlin: Springer, 1981.

[10]Yao M, Zhang S. Fuzzy consistent matrix and its application[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 1997, 8(1): 57—64.

[11]郭桂荣. 模糊模式识别[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1993.
Guo Gui-rong. Fuzzy Patten Recognition[M]. Changsha: National Defence Science and Technology University Publishing Company, 1993. (in Chinese)

[12]张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 1995.
Zhang Gongqing, Lin Yuan-qu. Functional Analysis Teaching Materials[M]. Beijing: Beijing University Publishing Company, 1995. (in Chinese)

[13]Li Lushu, Lai K K. Fuzzy dynamic programming approach to hybrid multiobjective multistage decision-making problems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 117: 13—25.

(下转第 41 页)

$$\xi_2(Y_2^P) = \left(\frac{Y_2^P}{Y_2^F}\right)\frac{\beta}{\beta-1}\frac{kID_{10}}{D_{11}-D_{01}} - kI + \frac{\beta}{\beta-1}\frac{D_{11}-D_{10}}{D_{11}-D_{01}}Ik^{\beta}\left(\frac{Y_2^P}{Y_2^F}\right)^{\beta} - \left(\frac{Y_2^P}{Y_2^F}\right)\cdot \frac{\beta}{\beta-1}\frac{kID_{01}}{D_{11}-D_{01}}e^{(r-\mu)\delta} - \frac{kI}{\beta-1}\left(\frac{Y_2^P}{Y_2^F}\right)^{\beta} = 0 \quad (D3)$$

令 $Z = (Y_2^P/Y_2^F)$，化简，得

$$G(Z,k,\delta) = Z\frac{\beta}{\beta-1}\frac{D_{10}-D_{01}e^{(r-\mu)\delta}}{D_{11}-D_{01}} - 1 + \frac{\beta}{\beta-1}\frac{D_{11}-D_{10}}{D_{11}-D_{01}}k^{\beta-1}Z^{\beta} - \frac{1}{\beta-1}Z^{\beta} = 0 \quad (D4)$$

$$G_Z(Z,k,\delta) = \frac{\beta}{\beta-1}\frac{D_{10}-D_{01}e^{(r-\mu)\delta}}{D_{11}-D_{01}} + \frac{\beta^2}{\beta-1}\cdot\frac{D_{11}-D_{10}}{D_{11}-D_{01}}k^{\beta-1}Z^{\beta-1} - \frac{\beta}{\beta-1}Z^{\beta-1} \quad (D5)$$

因为 $Z = Y_2^P/Y_2^F \leq Y_1^{OPT}/Y_2^F < 1$，由式(7)、式(14)得

$$Z \leq \frac{D_{11}-D_{01}}{k(D_{10}-D_{00})} \quad (D6)$$

代式(D6)入式(D5)，化简，得

$$G_Z(Z,k,\delta) \geq \frac{\beta}{\beta-1}\left(\frac{D_{10}-D_{01}e^{(r-\mu)\delta}}{D_{11}-D_{01}} - Z^{\beta-1}\right) - \frac{\beta^2}{\beta-1}\frac{D_{10}-D_{11}}{D_{11}-D_{01}}\left(\frac{D_{11}-D_{01}}{D_{10}-D_{00}}\right)^{\beta} \quad (D7)$$

只要先动优势足够大，即 $D_{10}-D_{00} \gg D_{11}-D_{01}$，式(D7)不等号右边第 2 项接近零. 根据定理 1，抢先均衡中，$0 < \delta < \delta_1^*$，则 $D_{10}-D_{01}e^{(r-\mu)\delta} > D_{11}-D_{01}$，又 $Z < 1$，故

$$G_Z > 0 \quad (D8)$$

$$G_{\delta}(Z,k,\delta) = Z\frac{\beta}{\beta-1}\frac{-D_{01}(r-\mu)e^{(r-\mu)\delta}}{D_{11}-D_{01}} < 0 \quad (D9)$$

$$G_k(Z,k,\delta) = -\beta\frac{D_{10}-D_{11}}{D_{11}-D_{01}}k^{\beta-2}Z^{\beta} < 0 \quad (D10)$$

根据隐函数求导定理

$$\frac{\partial Z}{\partial \delta} = -\frac{G_{\delta}}{G_Z},\ \frac{\partial Z}{\partial k} = -\frac{G_k}{G_Z} \quad (D11)$$

综合式(D8)、(D9)、(D10)、(D11)，得

$$\frac{\partial Z}{\partial \delta} > 0,\ \frac{\partial Z}{\partial k} > 0 \quad (D12)$$

再由定理 3，$A = 1/Z$，定理 4 得证.

附录 E

由式(7)、式(14)

$$\frac{Y_2^F}{Y_1^{OPT}} = k\frac{D_{10}-D_{00}}{D_{11}-D_{01}} \quad (E1)$$

由式(E1)可知：序贯均衡中 $A = (Y_2^F/Y_1^{OPT})$ 与 δ 无关，而与 k 成正比，与先动优势 $\left(\frac{D_{10}-D_{00}}{D_{11}-D_{01}}\right)$ 成正比. 再结合定理 3，定理 5 得证.

附录 F

在 $\delta < \min\{\delta_1^*, \delta_2^{**}\}$ 的情况下，当先动优势很大时，$D_{10}-D_{00} \gg D_{11}-D_{01}$，由式(2)有 $D_{11}-D_{01} > D_{11}-D_{00} > 0$，再由式(B5)、(B12)可知，$D_{10}-D_{00}e^{(r-\mu)\delta}$ 和 $D_{11}-D_{00}$ 相比要大的多，则 k^{**} 会很小. 另一方面，由式(2)有 $D_{10}-D_{01} > D_{10}-D_{00} > 0$，再由式(A8)、(A9)可知，$D_{10}-D_{01}e^{(r-\mu)\delta}$ 和 $D_{11}-D_{01}$ 相比要大的多，则 k^* 会很大. 结合定理 1、定理 2，推论 1 得证.

(上接第 11 页)

Research on hybrid index hierarchy fuzzy decision-making method

ZHANG Wen-hong[1]，*CHEN Sen-fa*[2]

1. Business School, Nanjing University, Nanjing 210093, China;
2. School of Economics and Management, Southeast University, Nanjing 210096, China

Abstract: The hybrid index hierarchy fuzzy decision-making method is proposed on the basis of the idea of hierarchy analysis, the fuzzy pattern recognition technique and the fuzzy consistent matrix. The main characteristics of this method stress on the methodology of fuzzy evaluation for hybrid index systems, in which the qualitative and quantitative indexes are synthetically considered. After getting the expression evaluations for each index, using the fuzzy pattern recognition technique, a global evaluation for all indexes is developed to get. Finally, an illustrative example is given to clarify the effectiveness of the developed approach.

Key words: hierarchy analysis; fuzzy decision; fuzzy consistent; fuzzy pattern recognition