城市应急系统优化选址决策模型和算法①

方　磊[1] , 何建敏[2]
(1. 南开大学国际商学院, 天津 300071; 2. 东南大学经济管理学院, 南京 210096)

摘要: 以往的应急系统选址模型仅仅考虑在一个确定应急限制期下的选址问题. 但是, 在城市规划决策中, 应急限制期和应急服务设施点建立的费用(数目)都相当重要. 针对这个特点, 提出了应急限制期下的应急选址模型, 并提出了基于分支定界方法的应急选址模型的最优解. 该算法利用 FLPS′(k)的最优解为起点, 进而获得 FLPS′($k+1$)的最优解, 大大减少了计算量.

关键词: 应急限制期; 选址; 模型; 算法
中国分类号: O22　　文献标识码: A　　文章编号: 1007 - 9807(2005)01 - 0012 - 05

0　引　言

在城市规划建设中, 经常需要考虑诸如医疗救护中心、消防中心、110 出警中心等应急服务设施的优化选址问题, 以便一旦某地出现需要服务的紧急事件, 有相应的服务设施点能在规定的时间内到达现场进行服务. 例如, 公安部、建设部颁发的《城市消防站布局和技术装备标准》中要求: 城镇消防站的第一出动必须在起火后 15 min 内到场出水, 称为 15 min 消防(应急限制期). 以往的应急服务设施优化选址模型局限于对应急时间规定一个应急限制期, 然后转化为典型的集合覆盖问题[1～3]. 但是在实际问题中, 常常很难规定一个确定的应急限制期. 同时, 城市的决策者在进行应急系统选址决策时, 如果规定的应急限制期很小, 会导致系统费用大大增大(需要建立大量的应急服务设施点); 规定的应急限制期太大, 会导致人民和国家财产的巨大损失. 因此, 在规划过程中, 应急限制期和系统的费用都相当重要. 本文考虑有意义(即使该模型有可行解)的应急限制期下一系列相关的应急优化选址问题, 通过解决这些问题, 为城市决策者在应急系统选址的决策过程中增加科学的依据.

1　模型

设应急地点集为 $F = \{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$, F_i($i \in I = \{1, 2, \cdots, m\}$) 为应急地点, $S = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ 为可能的应急服务设施点集, S_j($j \in J = \{1, 2, \cdots, n\}$) 为可能的应急服务设施点. t_{ij} 表示从应急服务设施点 S_j 到达应急地点 F_i 之间的最短时间. 对不同的 t_{ij} 值按照升序排列, 记 $\{t_1, t_2, \cdots, t_K\}$. 对所有的应急限制期 $d(k) \in [t_k, t_{k+1})$ (其中, $k = 1, 2, \cdots, K-1$), 定义

$$A^k = (a_{ij}^k)$$

其中

$$a_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{如果 } t_{ij} \le d_k \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

对于规定的应急限制期 $d(k) \in [t_k, t_{k+1})$, 选址模型 FLP(k) 如下

$$\min \quad z(k) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k x_j \ge 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$x_j \in [0, 1] \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

其中

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{如果在 } S_j \text{ 处建立应急服务设施} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

---

① 收稿日期: 2002 - 09 - 20; 修订日期: 2003 - 09 - 04.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70401014).
作者简介: 方　磊(1976 —), 男, 安徽巢湖人, 博士, 讲师.

c_j 表示在 S_j 处建立应急服务设施的费用.

下面讨论使上述选址模型有可行解的 d_k 值.

上述一系列选址模型中, 如果 $F = S$, 则 $d_{jj} = 0\ (j = 1,2,\cdots,n)$. 因此, 对所以应急限制期 $d_1, d_2, \cdots, d_{K-1}$, 即 FLP$(k)$ $(k = 1,2,\cdots,K-1)$ 都有可行解. 对于一般情况下的 F、S, 很显然, 应急限制期 $d_k, d_{k+1}, \cdots, d_{K-1}$, 即 FLP$(k)$, FLP$(k+1)$, $\cdots$, FLP$(K-1)$ 才有可行解 (其中, $t_k = \max_{i\in I}\{\min_{j\in J} t_{ij}\}$).

2　算法

首先不考虑整数性约束, 解如下线性规划问题 FLP$'(k)$

$$\min z'(k) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{k} x_j \geq 1 \quad (i = 1,2,\cdots,m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

解决上述一系列的 FLP$'(1)$, FLP$'(2)$, $\cdots$, FLP$'(K-1)$ 线性规划问题, 采用对偶单纯形方法, 通过 FLP$'(k)$ 的最优解为起点来获得 FLP$'(k+1)$ 的最优解. 考虑上述线性规划问题 FLP$'(k)$ 的标准式 FLPS$'(k)$

$$\min z'(k) = dv$$

$$\text{s.t.}\ (A^k, -I)\, v = e$$

$$v \geq 0$$

其中

$$d_j = \begin{cases} c_j & j = 1,2,\cdots,n \\ 0 & j = n+1,\cdots,n+m \end{cases}$$

$$v_j = \begin{cases} x_j & j = 1,2,\cdots,n \\ y_{j-n} & j = n+1,\cdots,n+m \end{cases}$$

对标准式的约束条件 $(A^k, -I)\,v = e$ 的两端乘以 -1, $(-A^k, I)\,v = -e$, 得到了初始对偶基可行解, 然后按照对偶单纯形方法进行迭代, 在整个迭代过程中, 始终保持对偶问题的可行性, 即全部检验数 ≥ 0, 而常数列由有负分量逐步变为全部 ≥ 0 (即变为满足原问题的可行性), 最终得到了 FLPS$'(k)$ 的最优解 v^k 和最优目标函数值 $z'(k)$.

由于线性规划问题 FLPS$'(k)$ 和 FLPS$'(k+1)$ 的不同仅仅是系数矩阵 A^k 转化为 A^{k+1}, 根据系数矩阵的定义, 可以推出系数矩阵 A^k 和 A^{k+1} 的关系.

矩阵 A^k 向 A^{k+1} 转化的公式为

$$a_{ij}^{k+1} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } t_{ij} = t_{k+1} \\ a_{ij}^{k} & \text{否则} \end{cases}$$

系数矩阵 A^{k+1} (由 A^k 转化) 中改变的列向量所对应的变量是否在 FLPS$'(k)$ 最优, 可以采用不同方法 (单纯形方法、引进人工变量等), 通过 FLPS$'(k)$ 的最优解 $(v^k, z'(k))$ 得到 FLPS$'(k+1)$ 的最优解 $(v^{k+1}, z'(k+1))$.

如果获得了 FLPS$'(k+1)$ 的最优解 $(v^{k+1}, z'(k+1))$, 下面求 FLP$(k+1)$ 的最优解 $(x_j^*(k+1)\ (j = 1,2,\cdots,n), z^*(k+1))$. 如果

1) $v_j^{k+1} \in \{0,1\}\ (j = 1,2,\cdots,n)$, 则 FLP$(k+1)$ 的最优解 $x_j^*(k+1) = v_j^{k+1}\ (j = 1,2,\cdots,n)$, 最优目标函数值 $z^*(k+1) = z'(k+1)$.

2) v_j^{k+1} 不全部为 0 或 1 的整数 $(j = 1,2,\cdots,n)$, 但是 $[z'(k+1)] = z^*(k)$, 则 FLP$(k+1)$ 的最优解 $x_j^*(k+1) = x_j^*(k)\ (j = 1,2,\cdots,n)$, 最优目标函数值 $z^*(k+1) = z^*(k)$ (其中, $x_j^*(k)\ (j = 1,2,\cdots,n)$、$z^*(k)$ 分别为 FLP(k) 的最优解和最优目标函数值, $[z]$ 表示大于或等于 z 的最小整数).

如果上述两个条件都不满足, 则采用深度优先搜索的分支定界算法, 根据 FLPS$'(k+1)$ 的最优解和最优函数值 $(v^{k+1}, z'(k+1))$, 来求 FLP$(k+1)$ 的最优解 $x_j^*(k+1)\ (j = 1,2,\cdots,n)$ 和最优函数值 $z^*(k+1))$.

定理 1　如果 $v^*(k+1)$ 是 FLPS$'(k+1)$ 的一个最优整数解, 则 $x_j^* \in [0,1]\ (j = 1,2,\cdots,n)$, $y_i^* \in [0, a_i]\ (i = 1,2,\cdots,m)$, (其中, $a_i = \min(m-2, s_i-1)$, s_i 表示 A^{k+1} 第 i 行中 1 的个数[4] (证明见文献[3]).

定理 2　如果 $v(k+1)$ 是 FLPS$'(k+1)$ 的任何一个基可行整数解, 则 $v(k+1)$ 一定可以通过 FLPS$'(k+1)$ 的最优单纯形表中最后一列列向量减去至多前面 n 列列向量的倍数而获得[4] (证明见文献[3]).

根据上述两个定理, $x_j^* \in [0,1]\ (j = 1,2,\cdots,n)$, $y_i^* \in [0, a_i]\ (i = 1,2,\cdots,m)$, 一定可以利用最优单纯形表通过列向量相减而获得. 下面利用深度优先搜索的分支定界算法[5,6] 来搜索 FLPS$'(k+1)$ 的最优整数解.

为了描述算法的方便，引入以下符号和说明：

通过对偶单纯形方法，得到了 FLPS$'(k+1)$ 的最优单纯形表，记为 $T_{(m+1)\times(n+1)}$. $T(i,j)$ 表示最优单纯形表中第 i 行第 j 列的元素. 最优单纯形表中的第 1 到 n 列列向量表示非基变量所对应的列向量，第 $n+1$ 列向量表示基变量的值. 第 $m+1$ 行表示检验数，记为 c_j^*. 对非基变量列按照检验数的升序构造一个队列 $L = \{1,2,\cdots,n\}$，使 $c_1^* \le c_2^* \le \cdots \le c_n^*$，设最优单纯表中第 j 列对应于队列 L 中的 point(j). $T(m+1,n+1)$ 给出了最优目标函数值的相反数，记为下界 $z_L'(k+1) = -T(m+1,n+1)$. 利用贪婪启发式算法[7,8] 得到一个可行解，记其函数值为上界 $z_U'(k+1)$. 从队列 L 中按照次序选择一个非基列 j，如果 $z_L'(k+1) + c_j^* \ge z_u'(k+1)$，则将该列从队列中去掉(相当于赋该变量为 0)[8]. 因为用 $n+1$ 列列向量减去该列列向量一次得不到一个更优解，否则用 $n+1$ 列列向量减去该列列向量一次(相当于赋该变量为 1). 如果这时的单纯形表对应的基变量都是非负整数，则其所对应的解对于 FLP$(k+1)$ 是可行解，记其函数值为 z^*，并令 $z_U'(k+1) = \min\{z_U'(k+1), z^*\}$，然后从队列 L 中去掉 $z_L'(k+1) + c_j^* \ge z_u'(k+1)$ 的列. 如果这里的单纯形表对应的解对于 FLP$(k+1)$ 是非可行解，则将单纯形表的最后一列列向量存储在辅助矩阵 $E_{(m+1)\times n}$ 中. 然后从队列 L 按照次序选择一个非基列，用上述的方法进行分支和搜索. 对于非变量 y_i，根据定理 1，$y_i^* \in [0, q_i]$，因此，将该列列向量复制 q_i 次放入最优单纯形表中(因为在上述分支中每个变量只能赋于 0 或 1). 在搜索树的每个结点上，如果得到了 FLP$(k+1)$ 的一个可行解或其函数值超过 $z_U'(k+1)$[9,10]，则回溯，直到队列 L 为空. 则到目前为止，最好的可行解就是 FLP$(k+1)$ 的最优解.

分支定界算法 Ⅰ[4]：

1) 利用贪婪启发式算法得到 FLP$(k+1)$ 一个可行解，其函数值为 $z_U'(k+1)$，记 $z_L'(k+1) = [-T(m+1,n+1)]$，从 $T_{(m+1)\times(n+1)}$ 去掉 $z_L'(k+1) + c_j^* \ge z_u'(k+1)$ 的列.

2) $E(i,1) = T(i,n+1)$ $(i = 1,2,\cdots,m+1)$，scol = 1，index = 1，acol = point(1).

3) scol = sco1 + 1，$E(i,\text{scol}) = E(i,\text{scol}-1) - T(i,\text{acol})$ $(i = 1,2,\cdots,m)$，save_index(scol) = index，index = index + 1.

4) 如果 $E(i,\text{scol})$ $(i = 1,2,\cdots,m)$ 都是非负整数，把它保存为一个新的可行解，令 $z_U'(k+1) = E(m+1,\text{scol})$. 转 6)，否则转 5).

5) 如果 index > n，转 7). 令 acol = point(index). 如果 $E(m+1,\text{scol}) - T(m+1,\text{acol}) \ge z_U'(k+1)$，转 6). 否则转 2).

6) index = save_index(scol) + 1，scol = scol - 1 如果 scol > 0，转 4). 否则转 7).

7) 打印出到目前为止的最新的可行解，就作为 FLP$(k+1)$ 的最优解.

例　设 FLP$(k+1)$ 选址模型中，A^{k+1} 见表 1，费用矩阵 c = (55, 62, 58, 50, 59, 52, 72, 75). 利用对偶单纯形方法解 FLPS$'(k+1)$ 得到最优单纯形表，见表 2. 其最优函数值是 147.25，故记 $z_L'(k+1) = 148$，利用贪婪启发式算法得到一个可行解，其函数值记为 $z_U'(k+1) = 160$. 在算法 Ⅰ 的第 1 步，因为 $z_U'(k+1) - z_L'(k+1) = 12$，通过排除可得队列 $\{y_2, y_2, x_5\}$ (y_2 列包括两次是根据定理 1 得到的). 在算法的第 2 步，把最优单纯形表的最后一列复制到辅助矩阵的第 1 列，在第 3 步用辅助矩阵的第 1 列减去 y_2 对应的那一列，并把结果放入辅助矩阵的第 2 列，在第 4 步进行检验，发现其列不全部是整数. 因此在第 5 步，转到第 3 步，用辅助矩阵的第 2 列减去 y_2 对应的那一列，并把结果放入辅助矩阵的第 3 列，在第 4 步进行检验，发现其列不全部是整数. 在第 5 步，用辅助矩阵的第 3 列减去 x_5 对应的那一列，得到函数只为 161.75，大于 $z_U'(k+1) = 160$，则转第 6 步. 在第 6 步. 回溯到辅助矩阵的第 2 列，转第 5 步. 在第 5 步，用辅助矩阵的第 2 列减去 x_5 对应的那一列，得到函数只为 160.25，大于 $z_U'(k+1) = 160$，则转第 6 步，回溯到辅助矩阵的第 1 列，转第 5 步. 在第 5 步，转第 3 步，矩阵的第 1 列减去 x_5 对应的那一列，并把结果放入辅助矩阵的第 2 列. 在第 4 步进行检验，发现其列不全部是整数，转第 5 步，发现 index > n，转第 7 步，算法结束，没有找到比第 1 步贪婪启发式算法更好的解，则其解就是 FLP$(k+1)$ 的最优解.

表 1　系数矩阵 A^{k+1}

Table 1 Coefficient matrix A^{k+1}

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

表 2　最优单纯形表

Table 2 Optimal simplex tableau

y_3	x_1	y_2	y_5	y_4	x_5	y_6	y_1		
-0.25	0.25	0.50	-0.25	0.25	0.50	-0.25	-0.75	0.75	x_3
0.25	0.75	-0.50	0.25	-0.25	-0.50	0.25	-0.25	0.25	x_2
-0.25	0.25	-0.50	-0.25	0.25	0.50	-0.25	0.25	0.75	x_6
-0.75	-0.25	0.50	0.25	-0.25	0.50	0.25	-0.25	0.25	x_4
0.25	-0.25	-0.50	-0.75	-0.25	0.50	0.25	0.75	0.25	x_7
0.25	-0.25	0.50	0.25	-0.25	-0.50	-0.75	-0.25	0.25	x_8
12.75	30.25	1.50	34.75	37.25	11.50	37.75	23.25	-147.25	

综合以上各个方面,下面给出一个完整的计算一系列线性规划 FLP(1), FLP(2), …, FLP(K - 1) **的算法 II**:

1) **计算第一个具有可行解的线性规划问题** FLP(k)($d_k \in [t_k, t_{k+1})$)(**其中**, $t_k = \max_{i \in I}\left\{\min_{j \in J} t_{ij}\right\}$.

2) **利用对偶单纯形方法计算其对应的标准式** FLPS′(k), **获得了最优单纯形表和最优解** $v^*(k)$, **如果** $v_j^*(k) \in [0,1]$ ($j = 1, 2, \cdots, n$), **则令** $x_j^*(k) = v_j^*(k)$ ($j = 1, 2, \cdots, n$) **作为** FLP(k) **的最优解. 否则调用分支定界算法求出** FLP(k) **的最优解**.

3) $k = k + 1$, **如果** $k < K - 1$, **转** 4), **否则转** 5).

4) **利用** FLPS′(k - 1) **的最优单纯形表获得** FLPS′(k) **的最优单纯形表**. a) **如果** $v_j^*(k) \in [0, 1]$ ($j = 1, 2, \cdots, n$), **则令** $x_j^*(k) = v_j^*(k)$ ($j = 1, 2, \cdots, n$) **作为** FLP(k) **的最优解**. b) **如果** $[z'(k)] = z^*(k - 1)$, **则令** FLP(k - 1) **的最优解作为** FLP(k) **的最优解. 如果** a) **和** b) **的条件都不满足,则调用分支定界算法求出** FLP(k) **的最优解. 转** 3).

5) **求出了所以有意义的应急期** $d_k \in [t_k, t_{k+1})$ **的线性规划问题** FLP(k) **的最优解,结束**.

3　算例

仿真例子的基本数据最小距离矩阵如表 3 **所示,采用算法 II计算结果见图** 1. **仿真中,取** $F = S$, $m = n = 9$, $c_j = 1$, **因此表** 4 **和图** 1 **中的最优目标函数值事实上是需要建立的应急服务设施点的数目**.

表 3　最短距离矩阵

Table 3 Shortest distance matrix

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 15 & 25 & 10 & 15 & 20 & 10 & 25 \\ 5 & 0 & 10 & 20 & 15 & 20 & 25 & 15 & 25 \\ 15 & 10 & 0 & 10 & 25 & 20 & 25 & 10 & 25 \\ 25 & 20 & 10 & 0 & 20 & 10 & 15 & 20 & 5 \\ 10 & 15 & 25 & 20 & 0 & 10 & 15 & 20 & 25 \\ 15 & 20 & 20 & 10 & 10 & 0 & 5 & 25 & 15 \\ 20 & 25 & 25 & 15 & 15 & 5 & 0 & 30 & 20 \\ 10 & 15 & 10 & 20 & 20 & 25 & 30 & 0 & 15 \\ 25 & 25 & 15 & 5 & 25 & 15 & 20 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

根据算法 II可得下列图形 1 **和运算结果**.

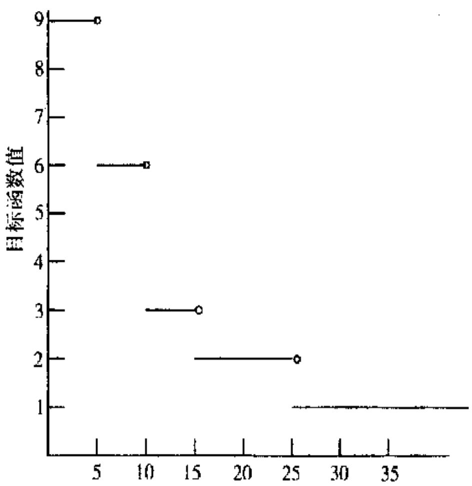

图 1　计算结果

Fig. 1 Calculation result

表 4　运算结果

Table 4 Calculation results

应急期 d_k	最优解	最优目标函数值
[0, 5)	$x_j = 1$ ($j = 1, 2, \cdots, 9$)	9
[5, 10)	$x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_8 = 1$	6
[10, 15)	$x_1 = x_4 = x_6 = 1$	3
[15, 20)	$x_1 = x_4 = 1$	2
[20, 25)	$x_1 = x_4 = 1$	2
[25, 30)	$x_4 = 1$	1
[30, + ∞)	$x_4 = 1$	1

参 考 文 献:

[1] Toregas C, Swan R, Revelle C, *et al*. The location of emergency service facilities[J]. Operations Research, 1971, 19: 1363—1373.

[2] Aly Adel A, White John A. Probabilistic formation of the emergency service location problem[J]. Journal of Operational Research Society, 1978, 29(12): 1167—1179.

[3] Vladimir Marianov, Charles Revelle. The queueing maximal availabiity location problem: A model for the siting of emergency vehicles[J]. European Journal of Operational Research, 1996, 93: 110—120.

[4] Harche F, Thompson GL. The column subtraction algorithm: An exact method for solving weighted set covering, packing and partitioning problems[J]. Computers Ops Res, 1994, 21(6): 689—705.

[5] Balas E, Ho A. Set covering algorithms using cutting planes, heuristics and subgradient optimization: A computional study[J]. Math Programming, 1980, (12): 37—60.

[6] Beasley J E, Cao B. A tree search algorithm for the crew scheduling problems[J]. European Journal of Operational Research, 1996, 94: 517—526.

[7] Balas Egon, Carrera Maria C. A dynamic subgradient-based branch-and-bound procedure for set covering[J]. Operations Research, 1996, 44(6): 875—890.

[8] Wedelin D. An algorithm for large scale 0-1 inter programming with application to airline crew scheduling[J]. Annals of Operations Research, 1995, 57: 283—301.

[9] Beasley E, Cao B. A dynamic programming based algorithm for the crew scheduling problem[J]. Computers of Operations Research, 1998, 25: 567—582.

[10] Fisher Marshall L, Kedia Pradeep. Optimal solution of set covering/partitioning problems using dual heuristics[J]. Management Science, 1990, 36: 674—688.

[11] **方 磊, 何建敏. 应急系统优化选址的模型及其算法**[J]. **系统工程学报**, 2003, 18(1): 49—54.
Fang Lei, He Jian-min. Optimal location model and algorithm of emergency systems[J]. Journal of Systems Engineering, 2003, 18(1): 49—54. (in Chinese)

[12] Brimberg J, Merhez A. Allocation of queueing facilities using a minimax criterion[J]. Location Science, 1997, 5(2): 89—101.

[13] Mesa Juan A, Brian Boffey T. A review of extensive facility location in networks[J]. European Journal of Operations Research, 1996, 95: 592—603.

[14] **刘春林, 何建敏, 盛昭瀚. 应急系统调度问题的模糊规划方法**[J]. **系统工程学报**, 1999, 14(4): 351—355.
Liu Chun-lin, He Jian-min, Sheng Zhao-han. Fuzzy programming for scheduling problem in emergency systems[J]. Journal of Systems Engineering, 1999, 14(4): 351—355. (in Chinese)

Optimal location model and algorithm of urban emergency systems

FANG Lei[1], *HE Jian-min*[2]

1. College of International Business, Nankai University, Tianjin 300071, China;
2. Economic Management School, Southeast University, Nanjing 210096, China

Abstract: Optimal location model in emergency systems often regards location problem of an given deadline. Deadline and cost of emergency system facilities are both important. Considering these characteristics, A model based on all feasible deadlines is given. Regarding a sequence closely related linear-programming problems to be sloved, an algorithm based on a branch and bound method is given. In this manner, we can use the optimal solution of FLPS′(k) as a starting point in the reoptimization to obtain that of FLPS′$(k+1)$ and reduce the calculation workload.

Key words: deadline; location; model; algorithm