Nash 均衡、变分不等式和广义均衡问题的关系①

徐 庆, 朱道立, 鲁其辉
(复旦大学管理学院管理科学系, 上海 200433)

摘要: 主要讨论了 Nash 均衡问题(NE)与变分不等式(VI)和广义均衡问题(GEP)的关系. 给出它们之间解的等价关系, 以及与之相应的映射之间单调性的关系. 研究结果为进一步研究 Nash 均衡、广义均衡问题理论及其算法提供了理论依据.

关键词: Nash 均衡; 变分不等式; 广义均衡; 单调性
中图分类号: O221.2 **文献标识码**: A **文章编号**: 1007 - 9807(2005)03 - 0001 - 07

0 引 言

Nash 均衡理论的提出是 20 世纪最重大的科学进展之一[1]. 它对经济学和社会科学的影响巨大, 其影响程度相当于 DNA 的发现对生命科学的影响. 1994 年 Nash 为此得到了诺贝尔经济学奖[2].

近年来, Nash 均衡理论被用来分析很多管理科学问题, 特别是供应链管理问题. Nash 均衡模型是库存管理、供应链管理、技术创新管理等管理科学研究领域的基本模型之一. Cachon[3]在他的供应链分析中的博弈理论综述文章中, 列举了可替代产品的两零售商竞争报童问题, 作为典型的供应链管理的 Nash 均衡模型.

设两个零售商 $i = 1,2$ 同时向市场推销两种同类商品, 他们的库存策略分别为 Q_i、Q_j, 他们的收益函数为 π_i、π_j, 如果零售商 i 发生缺货, 那么所有没有满足的顾客将会转为购买零售商 j 的商品 $(i, j = 1,2)$. 因此, 零售商 i 的总需求为 $D_i + (D_j - Q_j)^+$, 其中 $(x)^+ = \max\{x, 0\}$. 则两个零售商的收益函数为

$$\pi_i(Q_i, Q_j) = E_D[r_i \min(D_i + (D_j - Q_j)^+, Q_i) - c_i Q_i], \quad i, j = 1,2$$

其中: r_i 表示零售商 i 的产品的价格; c_i 表示零售商 i 获得商品的采购价. 那么, 零售商 1、2 的最优订货量的决策问题可表示为以下 Nash 均衡模型

$$\pi_i(Q_i^*, Q_j^*) \geq \pi_i(Q_i, Q_j^*), \quad i, j = 1,2 \quad \forall Q_i$$

Nash 均衡理论解的存在性、理论和算法的研究, 已引起国内外众多学者的极大兴趣, 并得到了很多结果. 研究结果大部分是关于存在性[4,5]和应用. 对于 Nash 问题的解的描述, 对偶理论[6]以及有效的算法相对比较少. 为求解 Nash 均衡问题, 一般的做法是将其转化为: (a) 非线性方程组; (b) 变分不等式问题(VI); (c) 广义均衡问题(generalized equilibrium problem, GEP) 及其对应的变分不等式问题; (d) 优化问题来求解. 因此研究 Nash 均衡问题和这四个问题之间的关系, 以及这些问题间的关系是一个很重要的研究内容. 文献[7]讨论了 Nash 均衡问题, 优化问题, 变分不等式问题之间的关系. 单调性对变分不等式[8~11]和广义均衡问题的算法研究是很重要的.

本文的主要目的是研究在何种条件下, Nash 均衡能用变分不等式表示, 何种条件下能用广义均衡问题来表示, 但不能用变分不等式表示, 并研究三个问题解之间的关系. 本文的分析表明 Nash 均衡转换为 VI 或 GEP 时, 不能保证相应映射和双

① 收稿日期: 2003 - 05 - 19; 修订日期: 2004 - 04 - 14.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70432001); 中国博士后科学基金资助项目.
作者简介: 徐 庆(1962 —), 男, 河南开封人, 博士, 教授.

函数仍保持单调性. 而单调性是研究 VI 和 GEP 的存在性和算法的重要条件之一. 为此, 需要探索其他方法来分析和研究 Nash 均衡问题, 如同伦方法等. 本文的研究结果可为进一步研究 Nash 均衡问题理论及算法提供理论依据.

1 基本定义和引理

Nash 均衡问题是个非合作博弈问题. 考虑一组博弈者, 他们根据某个合理的选择规则来决定对某项活动的选择. Nash 均衡求解是指出这样一个行动集合 $x^* = (x_i^*), i \in I$, 对每个博弈者 $i \in I$ 来说, 在给定其他博弈者选择 x_j^*, 没有比 x_i^* 有更好的选择了.

设 X 为 R^n 上的闭凸子集. 记 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 X 上的向量内积.

考虑 N 人非合作 Nash 均衡问题 (NE), 设凸子集 $X_i \subset R^{n_i}$ 是博弈者 i 的策略集, 博弈者 i 的效用函数为 $f_i : X \to R$, 其中 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$. 记 $I = \{1, \cdots, N\}$, $x_{-i} = (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_N)$, $x = (x_1, \cdots, x_N) = (x_i, x_{-i})$, $X_{-i} = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_N$, $X = X_i \times X_{-i}$.

定义 1 点 $x^* = (x_1^*, \cdots, x_N^*)$ 称为 Nash 均衡点, 如果

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \le f_i(x_i, x_{-i}^*), \quad \forall i \in I, \quad \forall x_i \in X_i \tag{1}$$

Nash 的重大贡献之一是利用 Brouwer 不动点定理证明了 Nash 均衡的存在性. 其中, 效用函数的连续性和拟凸(凹) 性是存在性的重要条件.

定义 2 实值函数 $f : X \mapsto R$ 称为拟凸的 (quasicovex), 如果对任意 $x, y \in X$ 和 $\lambda \in [0,1]$, 有

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \le \max(f(x), f(y))$$

称 f 为伪凸的 (pseudocovex), 如果对任意 $x, y \in X$

$$\langle \nabla f(y), x - y \rangle \ge 0 \text{ 蕴涵 } f(x) \ge f(y) \tag{2}$$

或

$$f(x) < f(y) \text{ 蕴涵 } \langle \nabla f(y), x - y \rangle < 0 \tag{3}$$

变分不等式是研究力学、经济学和交通管理学的重要方法[8]. 20 世纪 90 年代以来, 变分不等式的理论与方法得到了较大的发展. 它也可被用来研究 Nash 均衡问题. 近年来, 广义均衡理论越来越受到学术界的重视, 并用于研究 Nash 均衡. 在变分不等式和广义均衡的理论和方法中, 其映射和双函数的单调性是非常重要的概念.

定义 3 设映射 $F : X \mapsto R^n$. 所谓变分不等式问题是指寻找一点 $x^* \in X$ 使得下式成立:

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \ge 0 \quad \forall x \in X \tag{4}$$

定义 4 设映射 $F : X \to R^n$ (见文献[12]).

1) 称 $F(x)$ 为单调的 (monotone), 如果 $\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \ge 0$, $\forall x, y \in X$;

2) 称 $F(x)$ 为 X 上(以 γ 为模) 强单调的 (strongly monotone), 如果存在常数 $\gamma > 0$ 使得, $\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \ge \gamma \| x - y \|^2$, $\forall x, y \in X$;

3) 称 $F(x)$ 为严格单调的 (strictly monotone), 如果 $\langle F(x) - F(y), x - y \rangle > 0$, $\forall x, y \in X$ 且 $x \ne y$;

4) 称 $F(x)$, 为拟单调的 (quasimonotone), 如果 $\langle F(x), y - x \rangle > 0$ 蕴涵 $\langle F(y), y - x \rangle \ge 0$, $\forall x, y \in X$;

5) 称 $F(x)$ 为伪单调的 (pseudomonotone), 如果 $\forall x, y \in X$, $\langle F(x), y - x \rangle \ge 0$ 蕴涵 $\langle F(y), y - x \rangle \ge 0$, 或 $\langle F(x), y - x \rangle > 0$ 蕴涵 $\langle F(y), y - x \rangle > 0$.

定义 5 称 X 上的双函数 $\phi : X \times X \to R$ 是一个均衡双函数, 如果 $\phi(x, x) = 0$, $\forall x \in X$. 设 ϕ 是一个均衡双函数, 所谓广义均衡问题是指寻找一点 $x^* \in X$ 使下式成立

$$\phi(x^*, y) \ge 0, \quad \forall y \in X \tag{5}$$

定义 6 设双函数 $\phi : X \times X \to R$ (见文献[12,13])

1) 称 $\phi(x, y)$ 为单调的 (monotone), 如果 $\phi(x, y) + \phi(y, x) \le 0$, $\forall x, y \in X$;

2) 称双函数 $\phi(x, y)$ 为(以 β 为模) 强单调的 (strongly monotone), 如果存在常数 $\beta > 0$ 使得, $\phi(x, y) + \phi(y, x) \le - \beta \| x - y \|^2$, $\forall x, y \in X$;

3) 称 $\phi(x, y)$ 为严格单调的 (strictly monotone), 如果 $\phi(x, y) + \phi(y, x) < 0$, $\forall x, y \in X$;

4) 称 $\phi(x, y)$ 为拟单调的 (quasimonotone),

如果 $\phi(x,y) > 0 \Rightarrow \phi(y,x) \leq 0, \forall x, y \in X$;

5) 称 $\phi(x,y)$ 为伪单调的(pseudomonotone), 如果 $\forall x, y \in X, \phi(x,y) \geq 0 \Rightarrow \phi(y,x) \leq 0$ 或 $\phi(x,y) > 0 \Rightarrow \phi(y,x) < 0$.

引理 1　(i) 设 $f: X \to R$ 是 Gateaue 可微的. 若 $x^* \in X$ 满足下列优化问题

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x) \tag{6}$$

则 x^* 也是下列变分不等式的解

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in X \tag{7}$$

这里, $F(x) = \nabla f(x)$.

(ii) 进一步假设 f 是伪凸的, 则式(6) 与(7) 等价[14].

2　Nash 均衡与变分不等式之间的关系

由引理 1 可得到下面定理[7].

定理 1　设对任意的 $i \in I$, 函数 f_i 是 X 上连续可微的. 若 $x^* = (x_i^*, x_{-i}^*)$ 是一个 Nash 均衡点, 则 x^* 也是下列变分不等式的解

$$\text{VI-Nash}(1) \quad \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X \tag{8}$$

其中, $F(x) = \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_N(x)}{\partial x_N}\right)$. 进一步, 设对任意的 $i \in I$ 和任意给定的 $x_{-i} \in X_{-i}$, 函数 $f_i(x_i, x_{-i})$ 关于 x_i 是伪凸的, 则式(8) 也是必要条件.

研究变分不等式的理论(如对偶理论[6], 解集的特性和灵敏度分析) 和变分不等式的全局收敛算法, 一般要求映射 $F(x)$ 具有单调性[8~10]. 但将 Nash 均衡问题转化为变分不等式 VI-Nash(1) 后, 所得到的映射 $F(x)$ 不一定有单调性, 即使效用函数是凸的, 如下例.

例 1　考虑下列两人非合作博弈, 对 $x = (x_1, x_2) \in R \times R$, 设

$$f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^4 - x_1 x_2 + \frac{1}{4}x_2^4$$

显然, 对每个 x_2, 函数 $f_1(\cdot, x_2)$ 是凸的, 对每个 x_1, 函数 $f_2(x_1, \cdot)$ 是凸的, 且(1,1) 和(-1, -1) 为其均衡点. 又可知,

$$F(x) = \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2}\right) = (x_1^3 - x_2, x_2^3 - x_1)$$

那么, 当 $x = (1/2, 1/2)$, $y = (0,0)$ 时

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle < 0$$

所以, $F(x)$ 不是单调的.

为了用变分不等式的工具去研究 Nash 问题, 就必须探索新的研究方法. 为此 Cohen[10] 等通过引入 Nasted Monotonicity 概念研究了一类非单调变分不等式的算法. 另一种可用来求解 Nash 均衡的可行的方法是同伦算法, 文献[15,16] 用同伦算法求解变分不等式, 可得到全局收敛性, 而且不需要映射的单调性条件.

当 Nash 均衡问题中的效用函数 $f_i(x_i, x_{-i})$ 关于 x_i 不是伪凸时, Nash 均衡问题 NE 与变分不等式 VI-Nash(1) 可能不等价. 见例 2.

例 2　设一个 Nash 均衡问题有两个博弈者, 令 $I = \{1,2\}$, $x = (x_1, x_2)$, $X = [0,1] \times [0,1]$. 博弈者 1 的效用函数为

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{若 } x_1 = 0,\ x_2 = 1 \\ -\dfrac{4x_2}{3(1-x_2)^2}x_1^2 & \text{若 } 0 \leq x_1 < \dfrac{1-x_2}{2} \\ -\dfrac{2x_2+6}{3(x_2^2-1)}x_1^2 + \dfrac{x_2^2-2x_2+9}{3(x_2^2-1)}x_1 - \dfrac{x_2-3}{3(x_2+1)} & \text{若 } \dfrac{1-x_2}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

博弈者 1 的效用函数是连续可微的, 见图 1.

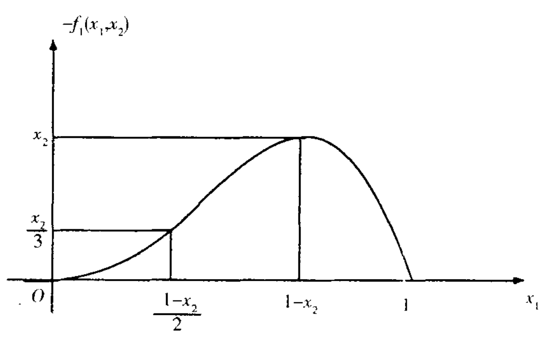

图 1　博弈者 1 的效用函数

Fig. 1 Utility function of player 1

显然, 博弈者 1 的最优解为

$$x_1(x_2) = \arg\min_{x_1} f_1(x_1, x_2) = 1 - x_2$$

设博弈者 2 的效用函数为

$$
f_2(x_1,x_2)=\begin{cases}-\dfrac{x_2}{3(x_1^2-1)}(2(x_1+3)x_2+\\ \quad x_1^2-6x_1-3) & 若\ 0\le x_2\le \dfrac{x_1+1}{2}\\ -\dfrac{4x_1(x_2-1)^2}{3(x_1-1)^2} & 若\ \dfrac{x_1+1}{2}<x_2\le 1\\ 0 & 若\ x_1=1,\ x_2=1\end{cases}
$$

博弈者 2 的效用函数是连续可微的,见图 2.

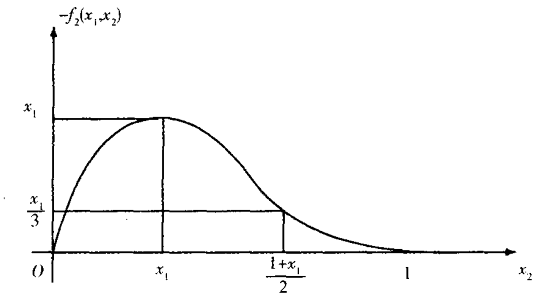

图 2　博弈者 2 的效用函数

Fig. 2 Utility function of player 2

那么有

$$x_2(x_1)=\arg\max_{x_2} f_2(x_1,x_2)=x_1$$

因此,有唯一的 Nash 均衡最优解 $(x_1^*,x_2^*)=(1/2,1/2)$. (见图 3)

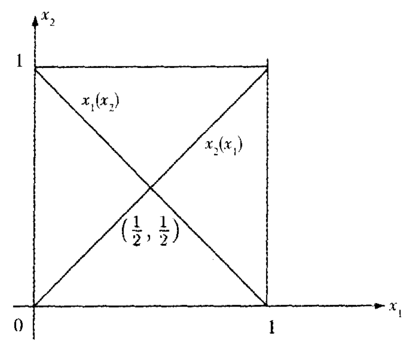

图 3　Nash 均衡的最优解

Fig. 3 Nash equilibrium solution

可以验证,对于这个 Nash 均衡问题的效用函数 $f_i(x_i,x_{-i})$ 关于 x_i 不是伪凸的,因为令 $x_1=1/2$,当 $3/4<x_2\le 1$ 时,$f_2(1/2,x_2)=-\dfrac{8}{3}(x_2-1)^2$;当 $0\le x_2\le 3/4$ 时,$f_2(1/2,x_2)=\dfrac{1}{9}x_2\cdot(28x_2-23)$,当 $3/4<x_2\le 1$ 时,$\nabla f_2(1/2,x_2)=-\dfrac{16}{3}(x_2-1)$;当 $0\le x_2\le 3/4$ 时,$\nabla f_2(1/2,x_2)=\dfrac{1}{9}(56x_2-23)$,所以 $f_2(1/2,1/2)=-1/2<f_2(1/2,1/6)=-\dfrac{55}{172}$ 且 $\nabla f_2(1/2,1/6)^{\mathrm{T}}(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2})=\dfrac{41}{81}>0$ 与定义 2 中伪凸函数定义相矛盾. 故函数 $f_2(0.5,x_2)$ 关于 x_2 不是伪凸的.

又 Nash 均衡问题相应的变分不等式为

$$\langle F(x^*),x-x^*\rangle\ge 0$$
$$\forall\ x\in[0,1]\times[0,1]$$

易验证 $(1/2,1/2)$ 和 $(0,1)$ 是这个变分不等式的最优解. 所以对这个问题,Nash 均衡问题(1) 与变分不等式(8) 不等价.

例 2 说明,对某些 Nash 均衡问题,不能用变分不等式的工具来进行研究.

3　Nash 均衡与广义均衡之间的关系

记双函数 $\Phi(x,\boldsymbol{y})$ 为

$$
\begin{aligned}\Phi(x,\boldsymbol{y})&=\sum_{i=1}^{N}(f_i(x_1,\cdots,x_{i-1},\boldsymbol{y},x_{i+1},\cdots,\\&\quad x_N)-f_i(x_1,\cdots,x_N))=\\&\quad\sum_{i=1}^{N}(f_i(\boldsymbol{y},x_{-i})-f_i(x_i,x_{-i}))\end{aligned}\tag{9}
$$

Nash 均衡问题可转化为以下广义均衡问题

$$\text{GEP-Nash}\quad \Phi(x,\boldsymbol{y})\ge 0,\ \forall\ \boldsymbol{y}\in X\tag{10}$$

下面的定理给出了 Nash 均衡与广义均衡问题的等价关系.

定理 2　$x^*=(x_1^*,\cdots,x_N^*)$ 是 Nash 均衡点当且仅当 x^* 是 GEP-Nash 之解,这里 $\Phi(x,\boldsymbol{y})$ 如式(9) 定义.

证明　因为 $x^*=(x_i^*,x_{-i}^*)$ 是 Nash 均衡点,则

$$f_i(x_i^*,x_{-i}^*)\le f_i(\boldsymbol{y},x_{-i}^*),\ \forall\ \boldsymbol{y}\in X_i$$

即

$$\Phi(x^*,\boldsymbol{y})\ge 0,\quad \forall\ \boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y},\cdots,\boldsymbol{y})\in X$$

反之,设 $x^*=(x_i^*,x_{-i}^*)$ 是 GEP 之解,即

$$\Phi(x^*,\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{N}(f_i(\boldsymbol{y},x_{-i}^*)-f_i(x_i^*,x_{-i}^*))\ge 0$$
$$\forall\ \boldsymbol{y}\in X\tag{11}$$

特别取 $\boldsymbol{y}=(x_i^*,\cdots,x_{i-1}^*,\boldsymbol{y},x_{i+1}^*,\cdots,x_N^*)$,

$\forall y \in X_i$, 则由式(11) 有

$$\sum_{j=1}^{N}(f_j(y, x_{-j}^*) - f_j(x_j^*, x_{-j}^*)) = (f_i(y, x_{-i}^*) - f_i(x_i^*, x_{-i}^*)) + \sum_{j \neq i}(f_j(y, x_{-j}^*) - f_j(x_j^*, x_{-j}^*)) = (f_i(y, x_{-i}^*) - f_i(x_i^*, x_{-i}^*)) \geq 0$$

即

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \leq f_i(y, x_{-i}^*) \quad \forall y \in X_i, \quad i = 1, \cdots, N$$

即 $x^* = (x_i^*, x_{-i}^*)$ 是 Nash 均衡点.　　证毕.

研究广义均衡问题的理论和算法往往要求双函数 $\phi(x, y)$ 的单调性和函数 $\phi(x, \cdot)$ 的凸性或广义凸性. 当效用函数 $f_i(\cdot, x_{-i})$ 是凸函数时, 容易得到下述结论.

命题 1　如果双函数 $\phi(x, y)$ 由式(9) 定义, 若对任意的 $i \in I$, 函数 $f_i(x_i, x_{-i})$ 关于 x_i 是凸的, 则 $\phi(x, y)$ 关于 y 是凸的.

注 1　对于 Nash 均衡问题, 如果每个效用函数 $f_i(x_i, x_{-i})$ 关于 x_i 是凸的, 则由式(9) 定义的双函数 $\phi(x, y)$ 不一定具有单调性. 例如, 考虑例 1 中的 Nash 均衡问题, 由式(9) 得

$$\phi(x, y) = f_1(y_1, x_2) + f_2(x_1, y_2) - f_1(x_1, x_2) - f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{4}y_1^4 + \frac{1}{4}y_2^4 - y_1x_2 - x_1y_2 + 2x_1x_2 - \frac{1}{4}x_1^4 - \frac{1}{4}x_2^4$$

那么

$$\phi(x, y) + \phi(y, x) = (x_2 - y_2)(x_1 - y_1)$$

可以看出对任意的 $x, y \in R^2$, $\phi(x, y) + \phi(y, x) \leq 0$ 不可能恒成立. 因此双函数不是单调的.

4　广义均衡与变分不等式之间的关系

设 $\phi: X \times X \to R$ 且 $\phi(x, y)$ 关于 y 是 Gateaue 可微的. 令

$$G(x) = \nabla\phi_y(x, y)|_{y=x} \text{(或次可微时记为 } \partial\phi_y(x, y)|_{y=x}) \tag{12}$$

定理 3　设 $\phi(x, y)$ 关于 y 是 Gateaue 可微的, 如果 x^* 是 GEP 的解, 即

$$\phi(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in X$$

则 x^* 也是下列变分不等式(VI) 的解

$$\langle G(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in X \tag{13}$$

进一步, 如果对每个 $x \in X$, $\phi(x, y)$ 关于 y 是伪凸的, 则逆命题也成立.

证明　因为 $\phi(x, y)$ 关于 y 是 Gateaue 可微的, 且 x^* 是 GEP 之解, 当 $y \in X$ 时, $x^* + \lambda(y - x^*) = \lambda y + (1 - \lambda)x^* \in X$, $\forall \lambda \in [0,1]$. 那么

$$\langle G(x^*), y - x^* \rangle = \min_{\lambda \to 0^+} \frac{\phi(x^*, x^* + \lambda(y - x^*)) - \phi(x^*, x^*)}{\lambda} \geq 0$$

反之, 设 x^* 是变分不等式(13) 的解, 即 $\langle \nabla\phi_y(x^*, x^*), y - x^* \rangle \geq 0$, $\forall y \in X$. 由于 $\phi(x, y)$ 关于 y 是伪凸的, 则由定义 2 可知

$$\phi(x^*, y) \geq \phi(x^*, x^*) = 0, \quad \forall y \in X$$

即结论成立.　　证毕.

下述例子表明当 $\phi(x, y)$ 关于 y 不是伪凸时, GEP 和 VI(13) 不一定等价.

例 3　设 $X = [0,2]$, 双函数 $\phi: X \times X \mapsto R$ 定义为

$$\phi(x, y) := xy - y^2$$

显然, $x^* = 2$ 为广义均衡问题 $\phi(x, y) \geq 0$, $\forall y \in X$ 的唯一解.

取 $x_0 = 1 \in X$, 函数 $f(y) := \phi(x_0, y) = y - y^2$ 是非伪凸的. 因为对于 $\mu = 2$, $v = 0.2$, 有 $\langle \nabla f(v), \mu - v \rangle > 0$, 但 $f(\mu) < f(v)$.

另一方面, $G(x) = \nabla_y\phi(x, y)|_{y=x} = -x$. 故 $\langle G(x^*), y - x^* \rangle = x^*(x^* - y)$. 显然 $x^* = 0$ 和 $x^* = 2$ 是变分不等式 $\langle G(x^*), y - x^* \rangle \geq 0$, $\forall y \in X$ 的解. 因此, 对本例 GEP 和 VI(13) 不等价.

关于双函数 $\phi(x, y)$ 与映射 $G(x)$ 之间的单调性关系, 文献[12] 中有下述结论.

命题 2　设 $\phi: X \times X \to R$ 是均衡双函数, 且对每个 $x \in X$, $\phi(x, \cdot)$ 是凸的且次可微的. 如果 $\phi(x, y)$ 在 X 上是强单调的(严格单调的, 单调的, 伪单调的, 拟单调的), 则 $G(x)$ 也是强单调的(严格单调的, 单调的, 伪单调的, 拟单调的).

下述例子表明当 $\phi(x, y)$ 关于 y 是伪凸时, 上述命题不一定成立.

例 4　设 $X = [-2, -1]$. 考虑双函数 $\phi: X \times X \mid \to R$,

$$\phi(x, y) := y^3 - x^3.$$

易知对于任意给定的 $x \in X$,函数 $\phi(x, \cdot)$ 在 X 上是伪凸的. 并且双函数 ϕ 是单调的. 但是, $G(x) = \nabla\phi_y(x, y) \mid_{y=x} = 3x^2$,则 $\langle G(x) - G(y), x - y\rangle = 3(x - y)^2(x + y) \leq 0$,那么 $G(x)$ 在 X 上是非单调的.

最后,考虑 Nash 均衡的广义均衡表达式 GEP-Nash,如果双函数 $\phi(x, \cdot)$ (见式(9)) 对第 2 个变量是 Gateaue 可微的和伪凸的,可以得到 Nash 均衡的第 2 种变分不等式的表示方法:

$$\text{VI-Nash}(2) \quad \langle G(x^*), y - x^*\rangle \geq 0 \quad \forall\ y \in X \tag{14}$$

其中, $G(x)$ 和 $\phi(x, y)$ 分别由式(12) 和(9) 给出.

5　Nash 均衡与变分不等式和广义均衡的关系和结论

由以上 2,3,4 节讨论知道当效用函数为伪凸时,Nash 均衡可以转化为 VI-Nash(1) ;Nast 均衡等价于广义均衡问题 GEP-Nash,当双函数 $\phi(x, \cdot)$ 为伪凸时,GEP-Nash 又可转化为 VI-Nash(2) , VI-Nash(1) 与 VI-Nash(2) 之间具有什么关系呢?

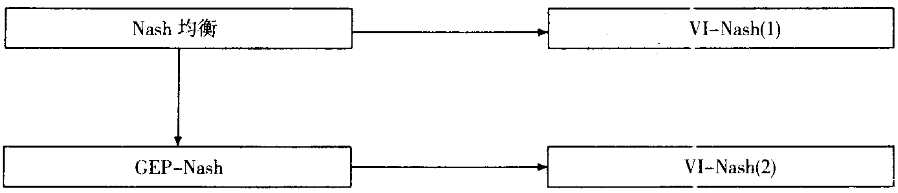

图 4　Nash 均衡与其转换形式的关系

Fig. 4 Relations between Nash equilibrium and its transformations

定理 4　设对任意的 $i \in I$,效用函数 $f_i(x_i, x_{-i})$ 关于 x_i 是可微的,设 $F(x) = \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_N(x)}{\partial x_N}\right)$, $G(x) = \nabla\phi_y(x, y) \mid_{y=x}$,其中 $\phi(x, y)$ 由式(9) 给出,则 $F(x) = G(x)$,即变分不等式 VI-Nash(1) 与 VI-Nash(2) 等价.

证明　因为

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^{N}(f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \cdots, x_N) - f_i(x_1, \cdots, x_N))$$

所以

$$\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y} = \left(\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y_N}\right) = \left(\frac{\partial f_1(y, x_2, \cdots, x_N)}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial f_1(x_1, \cdots, x_{N-1}, y_N)}{\partial y_N}\right)$$

因此有

$$G(x) = \nabla\phi_y(x, y) \mid_{y=x} = \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y} \mid_{y=x} = \left(\frac{\partial f_1(x_1, x_2, \cdots, x_N)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_1(x_1, \cdots, x_{N-1}, x_N)}{\partial x_N}\right)$$

故

$$F(x) = G(x)$$

则结论成立.　　　　证毕.

由定理 1～4 可知,当效用函数是伪凸和双函数 $\phi(x, y)$ 关于 y 是伪凸的时,Nash 均衡的解集与变分不等式 VI-Nash(1) 的解集和广义均衡问题 GEP-Nash 解集相等.

综上可知,Nash 均衡问题中的每个效用函数 $f_i(x_i, x_{-i})$ $(i = 1, \cdots, N)$ 关于 x_i 是凸的,也不能保证相应的映射 $F(x)$ 和双函数 $\phi(x, y)$ 是单调的. 但在凸性的条件下,存在 Nash 均衡. 这表明对非单调变分不等式及广义均衡问题的理论和算法研究对研究 Nash 均衡问题是非常有意义的. 然而,非单调的变分不等式和广义均衡问题的理论和算法的研究成果很少. 初步研究结果表明用同伦算法研究非单调变分不等式问题和广义均衡问题是一种比较重要和可行的研究途径[16].

参 考 文 献:

[1]Nash J. Equilibrium points in n-person games[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences U. S. A, 1950, 36: 48—49.

[2]Kuhn H W, Harsanyi J C, Selten R, Weibull J W, vanDamme E, Nash J F, Hammerstein P. The work of John F Nash[J]. Duke Mathematical Journal, 1995, 81(1): 1—29.

[3]Cachon G P, Netessine S. Game theory in supply chain analysis[A]. Supply Chain Analysis in E-business Era[M]. Boston: Kluwer, 2003.

[4]Baye M R, Tian GQ, Zhou J X. Characterization of the existence of equilibria in games with discontinuous non-quasiconcave payoffs [J]. Review of Economic Studies, 1993, 60: 935—948.

[5]Nishimura K, Friedman J. Existence of Nash equilibrium in n person games without quasi-concavity[J]. International Economic Review, 1981, 22: 637—648.

[6]Zhu D L. Augmented Lagrangian theory, duality and decomposition methods for variational inequlity problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003, 117(1): 195—216.

[7]Cavazzuti E, Pappalardo M, Passacantado M. Nash equilibria, variational inqualities and dynamical system[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2002, 114(3): 491—506.

[8]Harker P T, Pang J S. Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementary problem: A survey of theory, algorithms and applications[J]. Mathematical Programming, 1990, 48: 166—220.

[9]Chen B, Harker P T. A continuation method for monotone variational inequalities[J]. Mathematical Programming, 1995, 69: 237—252.

[10]Cohen G, Chaplais F. Nested monotonicity for variational inequlities over product of spaces and convergence of iterative algorithms [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1988, 59(1): 369—389.

[11]Bianchi M, Schaible S. Generalized monotone bifunctions and equilibrium problem[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1996, 92: 31—43.

[12]Konnov I V. Combined Relaxsasion Methods for Variational Inequality[M]. Berlin-Heiderberg, New York: Springer-Verlag, 2001.

[13]Blum E, Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems[J]. The Mathematics Student, 1994, 63: 123—145.

[14]Kinderlehrer D, Stampacchia G. An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications[M]. New York: Academic Press, 1980.

[15]Lin Z H, Li Y. Homotopy method for solving variational inequalities[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1999, 100(1): 207—218.

[16]Xu Q, Yu B, Feng G C. Homotopy method for variational inequalities[J]. 数学进展(Advances in Mathematics), 2001, 3: 477—479.

Relations among Nash equilibrium, variational inequalities and generalized equilibrium problem

XU-Qing, ZHU Dao-li, LU Qi-hui

Department of Management Science in School of Management, Fudan University, Shanghai 200433, China

Abstract: In this paper, we introduce some relationships between Nash equilibrium, variational inequalities, and generalized equilibrium problem. We also investigate the relations among monotonicities of their corresponding mappings and bifunctions. The results of this paper would be the theoretical basis for further studying in Nash equilibrium and generalized equilibrium problems.

Key words: Nash equilibrium; variational inequalities; generalized equilibrium problem; monotonicity