

# 考虑佣金的关联价值拍卖模型

毕志伟<sup>1</sup>, 王彦<sup>2</sup>

(1. 华中科技大学数学系, 武汉 430074; 2. 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072)

**摘要:** 在标准的只考虑买卖双方的拍卖模型中引入第三方, 拍卖公司. 拍卖公司提供服务要收取一定的佣金, 佣金费用由买家支付, 支付额占成交价的比例为  $k$ . 文章发现, 佣金比例  $k$  的大小对买卖双方均有一定影响: 买方的出价策略变得谨慎但是其均衡期望收益却与  $k$  无关; 卖方的期望收益受到影响而降低. 事实上, 拍卖公司的佣金就是来自于卖方的期望收益中. 文中就第一价格与第二价格机制在关联价值模型上讨论佣金问题, 得到的结果有较普遍的意义.

**关键词:** 拍卖; 佣金比例; 均衡期望收益

**中图分类号:** F08

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1007 - 9807(2005)03 - 0024 - 04

## 0 引言

当卖家要出售一项特有的物品或服务时, 如果不清楚潜在的买家将会开出多高的价格, 便无法确定一个合适的均衡价格来进行买卖. 拍卖方式被认为是这类物品的最佳销售方式. 尽管人类的拍卖活动已有 2500 年的历史, 但是对其理论的研究却是近几十年的事情. 自从 1961 年经济学家维克瑞 (Vickrey) 的文章发表以来, 许多学者对拍卖机制的理论进行了大量而深入的探讨. 这些文章中有对某一种物品或服务的拍卖机制的设计方案的研究, 例如石油、天然气、矿藏的开采权, 国债发行, 电讯资源使用的拍卖问题<sup>[1~3]</sup>, 也有许多文章是在实际问题的背景下, 针对标准的拍卖机制中的条件进行推广或改造的研究<sup>[4~6]</sup>. 例如买家之间信息, 资金, 规模的非对称性情形的研究, 拍卖物品的价值的类型的研究等<sup>[7~14]</sup>.

经典的拍卖理论<sup>[15,16]</sup>只考虑买家与卖家两个主体. 在此基础上分析买卖双方在最大利益原则驱动下的行为特点. 包括: 买方的最优出价策略, 卖方的期望收益, 入门费及保留价等等. 但在现实的拍卖活动中, 除了买卖双方之外, 还有第三

方——拍卖公司也介于其中. 事实上, 拍卖法规定, 拍卖行为必须由专门的拍卖公司来操作. 自然, 拍卖公司要从拍卖行为中获取一定的佣金. 本文就关联价值模型研究了有第三方情形的拍卖行为问题, 所考虑的佣金与拍卖价成比例, (例如, 是拍卖成交价的 5%) 并且是由买家支付. 由此产生的问题是: 与不考虑佣金相比, 买家的出价策略会不会因为要缴纳佣金而有所变化? 卖家的期望收益是否会受到影响?

对这一佣金问题, 本文在关联价值拍卖模型下, 针对封标第一价格拍卖 (First-price Sealed-bid Auction) 与封标第二价格拍卖 (Second-price Sealed-bid Auction) 进行了讨论, 得出了较有经济意义的结论: 佣金的收取虽然影响到买方的出价策略, 使之偏于保守, 但却不会改变买方的期望收益. 而另一方面, 虽然表面上佣金不由卖方支付, 但佣金政策却使卖家的期望收益下降, 即实质上佣金是由卖家支付的. 并且, 与不考虑佣金的标准情形相比, 卖家在第一价格拍卖和第二价格拍卖机制下的期望收益的比较定理依然成立. 借助本文模型, 可以对佣金政策的作用的认识更加本质. 本文所使用的关联价值模型基于文献<sup>[16]</sup>.

收稿日期: 2002 - 09 - 20; 修订日期: 2005 - 01 - 19.  
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (70071012).  
作者简介: 毕志伟 (1957 -), 男, 湖北人, 副教授.

## 1 拍卖的基本知识

拍卖作为一种商品或服务的有效交易机制,已有2500多年的历史.在当今的经济活动中它已经是一种非常基本的资源配置手段.拍卖机制的基本原理在于依据适当的拍卖规则,通过竞买人的竞争而最大地实现被拍卖物品的价值,出价最高者获得被拍卖物品,从而实现物资的合理配置.

传统的拍卖方式有四种:公开式增价拍卖(英式拍卖),公开式降价拍卖(荷兰式拍卖),密封式第一价格拍卖及密封式第二价格拍卖<sup>[4,16]</sup>.由于被拍卖物品的价值不确定(否则采用定价交易),或者说,潜在的竞买人对物品的价值估计不确定,故在竞买时的买家的出价会有所差异.已有的理论<sup>[12]</sup>已经证明:在一定的条件下,当竞买人对物品的价值为私有价值(称作私有价值模型)时,上述四种拍卖机制对卖家的结果一样:期望收益相等.而当竞买人对物品的价值评价受多个方面的信息所影响时,例如既有自己的估计,也受其他竞买人的看法和关于物品的品质报告等影响(称作关联价值模型),则上述期望收益等价定理不再成立.

对一些价值判断中含个性成分很强的物品,如收藏的艺术品,唱片,特别的电话号码等,可以采用私有价值模型来表示其拍卖行为.

对一些价值判断中个性和共性成分都有的物品,如矿藏开发权,地产,广告牌位,国债等,可以采用关联价值模型来表示.其中个性的理解不限于个人的爱好,还在于个体对物品的价值的看法(例如市场前景,销售方式等).

## 2 关联价值模型

考虑一个卖家,一个不可分割的拍卖品及  $n$  个竞买人情形.

设  $n$  个竞买人都是无差异的,因而采用完全相同的竞价策略,又设他们是风险中性的,因而追求收益的最大化.

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是竞买人  $1, 2, \dots, n$  对物品的评价变量,每位竞买人只知道自己对物品的评价价值,不了解别人的评价价值,因而  $X_i (1 \leq i \leq n)$  都是随机变量,设大家对物品的评价是理性的,即存在有限区间  $[\underline{x}, \bar{x}]$ , 使得  $X_i$  的值  $x_i \in [\underline{x}, \bar{x}]$ ,  $1 \leq i \leq n$ . 用  $S$  表示卖家公布的关于物品品质的信息,如证书,鉴定报告等,则竞买人  $i$  关于物品的价值会受其他人的估价及  $S$  的影响,并且由于这些信息往往在竞买过程中才显示出来,故不能预先表达达到  $x_i$  之中,于是,一旦买家  $i$  取胜,则他关于物品的价值  $V_i$  便应当是  $S$  及  $X_i (1 \leq i \leq n)$  的函数,记其形式为

$$V_i = u(S, X_1, \dots, X_n), \quad (1 \leq i \leq n) \quad (1)$$

其中,函数  $u$  满足非负,连续,偏导非负,期望值有限等条件.而随机变量  $S, X_1, \dots, X_n$  的联合分布密度函数  $f$  满足所谓的“关联条件”.

$$\partial^2 (\ln f) / \partial z_i \partial z_j = 0 \iff$$

$$f(z_1, \dots, z_m) \text{ 是关联函数} \quad (2)$$

这一条件的经济意义是指,当别人对物品的估价看好时,你的评价也看好的概率较大,这一条件很容易被满足,例如私有价值与共同价值模型.

以下两节分别就第一价格及第二价格拍卖规则考虑有佣金费用情形的竞买人的竞价行为及卖家的期望收益变化问题.

## 3 有佣金的第二价格拍卖

保持以上记号与假定.记  $Y_1 = \max(X_2, X_3, \dots, X_n)$ ,  $b(\cdot)$  为均衡出价函数.当  $X_1 = x$ ,  $Y_1 = y$  时物品的期望价值为(见文献[2])

$$v(x, y) = E[V_1 : X_1 = x, Y_1 = y] \quad (3)$$

由于胜者是依照第二高出价交易物品,故竞买人 1 在估价  $X_1 = x$ , 出价为  $b(t)$  时的期望收益是

$$= E[(v(x, y) - (1+k)b(t)) \cdot 1_{\{b(t) < b(t)\}} : X_1 = x] \quad (4)$$

其中,  $k$  是佣金系数,  $0 < k < 1$ . 写作积分式,有

$$= \int_x^t [v(x, y) - (1+k)b(t)] \cdot f_{Y_1}(t/x) dt \quad (5)$$

其中,  $f_{Y_1}( \cdot / x )$  是  $X_1 = x$  下,  $Y_1$  的条件分布密度函数, 相应的条件分布函数记作  $F_{Y_1}( \cdot / x )$ .

买家 1 的问题是: 求出最优均衡出价策略, 仍记作  $b( \cdot )$ , 使  $V_1$  最大.

由一阶条件  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=x} = 0$  可得到关于  $b( \cdot )$  的方程如下:

$$[v(x, x) - (1 + k)b(x)]f_{Y_1}(x/x) = 0, \quad (6)$$

解出

$$b(x) = \frac{1}{1+k}v(x, x) \quad (7)$$

这便是买家 1, 从而是每个买家的最优出价策略. 特别, 当  $k = 0$  时, 有

$$b(x) = v(x, x) = E[V_1 / X_1 = Y_1 = x] \quad (8)$$

比较式(7)(8)可知, 由于佣金因素, 竞买人的出价变低了一些. 但是, 将式(7)代入式(5)可推出, 采用均衡策略时竞买人的最大期望收益为

$$\begin{aligned} m x &= \int_x^x v(x, \cdot) - (1+k) \cdot \\ &\frac{1}{1+k}v(\cdot, \cdot) dF_{Y_1}(\cdot/x) = \\ &\int_x^x [v(x, \cdot) - v(\cdot, \cdot)] dF_{Y_1}(\cdot/x) \quad (9) \end{aligned}$$

与不收取佣金 ( $k = 0$ ) 时的结果一样.

另一方面, 当  $X_1 = x, Y_1 = \cdot$  时的卖家的期望收益为

$$\begin{aligned} R(x, \cdot) &= E[b(x)] = E\left[\frac{1}{1+k}v(x, x)\right] = \\ &\frac{1}{1+k}E[v(x, x)] \quad (10) \end{aligned}$$

与不收取佣金 ( $k = 0$ ) 时的  $R = E[v(x, x)]$  相比, 卖家的期望收益有所下降. 即有

**命题 1** 在考虑佣金的关联价值第二价格拍卖中, 竞买人的均衡出价会随佣金价  $k$  的增加而相应降低, 但竞买人的期望收益却不受佣金影响; 与之相反, 卖家的期望收益则因佣金价  $k$  的增加而减少.

#### 4 有佣金的第一价格拍卖

在第一价格拍卖机制下, 取胜者依据自己的

出价来交易物品, 故在  $X_1 = x, Y_1 = \cdot$  时, 竞买人 1 在出价为  $b(t)$  时的期望收益是

$$\begin{aligned} &= E[(v(x, \cdot) - (1+k) \cdot \\ &b(t)) 1_{\{b(\cdot) < b(t)\}} | X_1 = x] = \\ &\int_x^t [v(x, \cdot) - (1+k)b(t)] dF_{Y_1}(\cdot/x) \quad (11) \end{aligned}$$

其中, 记号的含义同上节. 买家 1 的问题依然是: 求最优出价策略  $b( \cdot )$ , 使其期望收益  $V_1$  最大.

由一阶条件  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=x} = 0$  得到关于  $b( \cdot )$  的微分方程

$$\begin{aligned} &- \int_x^x (1+k)b(x) dF_{Y_1}(\cdot/x) + [v(x, x) - \\ &(1+k)b(x)] f_{Y_1}(x/x) = 0 \quad (12) \end{aligned}$$

利用  $F_{Y_1}(x/x) = 0$ , 关于积分变量  $\cdot$  积分, 得

$$\begin{aligned} &(1+k)b(x) F_{Y_1}(x/x) + (1+k)b(x) \cdot \\ &f_{Y_1}(x/x) = v(x, x) f_{Y_1}(x/x) \quad (13) \end{aligned}$$

上式两边在区间  $[x, x]$  上积分 (注意到式(13)的等号左边是乘积函数  $(1+k)b(x) F_{Y_1}(x/x)$  的导数), 得

$$\begin{aligned} &(1+k)b(x) F_{Y_1}(x/x) = \\ &\int_x^x v(\cdot, \cdot) f_{Y_1}(\cdot/x) d \quad (14) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} b(x) &= \frac{1}{1+k} \frac{1}{F_{Y_1}(x/x)} \cdot \\ &\int_x^x v(\cdot, \cdot) f_{Y_1}(\cdot/x) d \quad (15) \end{aligned}$$

由式(15), 与不收取佣金 ( $k = 0$ ) 相比, 均衡出价变低了一些. 但是将式(15)代回到式(11), 可以得到

$$\begin{aligned} m x &= \int_x^x [v(x, \cdot) - (1+k) \frac{1}{1+k} \frac{1}{F_{Y_1}(x/x)} \cdot \\ &\int_x^x v(\cdot, \cdot) f_{Y_1}(\cdot/x) d] dF_{Y_1}(\cdot/x) = \\ &\int_x^x [v(x, \cdot) - \frac{1}{F_{Y_1}(x/x)} \int_x^x v(\cdot, \cdot) \cdot \\ &f_{Y_1}(\cdot/x) d] dF_{Y_1}(\cdot/x) \quad (16) \end{aligned}$$

上式中不包含系数  $k$ , 因此, 买家的最大期望收益与佣金价  $k$  无关. 另一方面, 卖家的收益来源于买家的期望出价, 故得到与上一节类似的结果:

**命题2** 在考虑佣金的关联价值第一价格拍卖中,竞买人的出价较不收取佣金时有所降低,但其均衡期望收益不受佣金影响,与之相反,卖家的期望收益则因收取佣金费用而有所减少。

文献[15]已证明,在关联价值模型情形,第二价格机制下卖家的期望收益要高于第一价格机制下的期望收益,买家的期望收益则相对降低。由于收取佣金不影响买家的期望收益,故这一结果在佣金情形也是成立的。

**命题3(比较定理)** 在考虑相同的佣金费用的关联价值模型中,与第一价格机制相比,第二价格机制使得卖家的期望收益增大,竞买人的均衡期望收益减少。

#### 参考文献:

- [1] Arupratan D. A theory of treasury auctions[J]. *Journal of International Money and Finance*, 2001, 20: 743—767.
- [2] Sunnevag KJ. Designing auctions for offshore petroleum lease allocation[J]. *Resources Policy*, 2000, 26: 3—16.
- [3] Jain R S. Spectrum auctions in India: Lessons from experience[J]. *Telecommunications Policy*, 2001, 25: 671—688.
- [4] Maskin E, Riley J. Asymmetric auction[J]. *Review of Economic Studies*, 2000, 67: 413—438.
- [5] Han Hong, Matthew Shum. Econometric models of asymmetric ascending auctions[J]. *Journal of Econometrics*, 2003, 112: 327—358.
- [6] Valentina B. Asymptotic revenue equivalence in auctions[J]. *Journal of Economic Theory*, 2002, 106: 161—176.
- [7] Parimal Kanti Bag. Optimal auction design and R&D[J]. *European Economic Review*, 1997, 41: 1655—1674.
- [8] Anders Lunander. Procurement bidding in first-price and second-price, sealed-bid auctions within the common-value paradigm[J]. *Computational Economics*, 2002, 19: 227—244.
- [9] Chakraborty I, Kosmopolou G. Auctions with endogenous entry[J]. *Economics Letters*, 2001, 72: 195—200.
- [10] Deltas G, Engelbrecht-Wiggans R. Auctions with and inexperienced bidder[J]. *Economics Letters*, 2001, 73: 35—42.
- [11] 刘树林,汪寿阳,黎建强. 投标与拍卖的几个数学模型[J]. *管理科学学报*, 1998, 1(2): 11—16.  
Liu Shulin, Wang Shouyang, Lai K K. Several mathematical models for bidding and auctions[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 1998, 1(2): 11—16. (in Chinese)
- [12] 李为冰,张列平. 拍卖与谈判理论研究[J]. *上海交通大学学报*, 2000, 34(11): 1566—1569.  
Li Weibing, Zhang Lieping. Study on the auction and negotiation[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2000, 34(11): 1566—1569. (in Chinese)
- [13] 黄怀志,何铭,王浣尘. 不完全信息下的封闭投标式拍卖机制研究[J]. *上海交通大学学报*, 1997, 31(4): 16—22.  
Huang Huanzhi, He Ming, Wang Huanchen. Research on the sealed-bid auction mechanism with incomplete information[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 1997, 31(4): 16—22. (in Chinese)
- [14] Krishna V. *Auction Theory*[M]. London: Academic Press, 2002.
- [15] Milgrom P R, Weber R J. A theory of auctions and competitive bidding[J]. *Econometrica*, 1982, 50: 1089—1122.
- [16] Riley J G, Samuelson W F. Optimal auctions[J]. *American Economic Review*, 1981, 71: 381—392.
- [17] 詹文杰,汪寿阳. 评“Smith奥秘”与双向拍卖的研究进展[J]. *管理科学学报*, 2003, 6(1): 1—12.  
Zhan Wenjie, Wang Shouyang. Review on Smith's mystery and development of double auctions[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2003, 6(1): 1—12. (in Chinese)

(下转第80页)

## 5 结束语

关联价值模型较好地刻划了现实经济活动中的“关联物品”的价值。它包含了私有价值物品与公共价值物品的拍卖问题。在此基础上引入佣金因素可以较好地反映客观现实。

通过以上模型及命题,对竞买人与卖家在佣金情形的均衡出价期望收益的分析结果显示,虽然佣金是由竞买人支付的,但并不影响其期望收益,从这个意义上看,收取佣金对竞买人没有利害关系,但是却降低了卖家的期望收益,尽管表面上看佣金不是由卖家所支付的。

## Inventory models with resource constraints and shortages allowed on seasonal demand

CHANG Ching-Ter<sup>1</sup>, LAI Wen-ling<sup>2</sup>

1. Department of Information Management, National Changhua University of Education, Taiwan Changhua 50058, China;

2. Taoyuan County Weir-Chang Junior High School, Taiwan Taoyuan 33000, China

**Abstract:** To the best of authors' knowledge there is no work done on the inventory problem with seasonal demand, shortages allowed, and resource constrained. In this study, we propose an integer programming method to solve the problem. The proposed model not only can easily be applied to real life but also allow constraints to be added by decision maker to fit for the real world situations. Finally, some examples are included for demonstrating the usefulness of the proposed model.

**Key words:** inventory; seasonal demand; shortages; resource constraints

---

(上接第 27 页)

## Affiliated value model considering effect of commission

BI Zhi-wei<sup>1</sup>, WANG Yan<sup>2</sup>

1. Department of Mathematics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China;

2. College of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China

**Abstract:** The auction company is induced as a third side in standard auction model which considers only bidders and seller. The auction company takes some commission from the winner of the auction. The main result is that the volume of the commission rate  $k$  has both effects on the bidder's bid strategy and the expected profits of the seller: bidder's bid becomes more passive but its expected profits is not dependent on the commission rate  $k$ ; the seller's expected profit has really decreased. In fact, the commission obtained by auctioneer comes from the profit of the seller. With the affiliated value model that induced commission, this paper considers the strategy in the first-price auction and second-price auction.

**Key words:** auction; commission rate; equilibrium expected revenue